Lietuvos matematikos mokytojų asociacija

KOMBINATORIKOS, TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR MATEMATINĖS STATISTIKOS PRADMENYS

VILNIUS, 1994

Autorius – Ričardas Razmas, Vilniaus gamtos ir techninių mokslų licėjaus mokytojas ekspetas.

Recenzentai – Stasys Čirba, Vilniaus technikos universiteto docentas, matematikos katedros vedėjas,

– Antanas Skūpas, Vilniaus gamtos ir techninių mokslų licėjaus mokytojas metodininkas

Turinys

PRATARMĖ

Nuo 1993/94 m. m. į bendrojo lavinimo vidurinių mokyklų matematikos programą įtraukti klausimai, kurie anksčiau nebuvo nagrinėjami. Tai kombinatorikos, tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pradmenys. Šių klausimų nėra mokykliniuose matematikos vadovėliuose, o pateikti juos taip, kaip nušviečiami aukštosios matematikos vadovėliuose, metodikos požiūriu netikslinga. Esant literatūros stygiui, šis leidinys bent iš dalies užpildys šią spragą.

Leidinyje pateikta medžiaga apima visą programą. Be to, įtraukti keli klausimai, neįeinantys į programą. Jie pažymėti *(žvaigždute). Vidurinės mokyklos matematikos programoje ir vadovėliuose nėra aibių teorijos sąvokų ir jas atitinkančios simbolikos, todėl kombinatorika, tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pradmenys išdėstomi nesiremiant aibių teorija.

Kiekvieno skyrelio pabaigoje yra pakankamai uždavinių, skirtų darbui klasėje ir savarankiškam darbui namuose. Pateikti visų uždavinių atsakymai, o sudėtingesnių uždavinių ir sprendimai. Daugumos uždavinių atsakymai užrašyti tokia forma, kad iš jo nesunku suvokti sprendimo eigą ir faktiškai yra glaustai užrašytas uždavinio sprendimas.

Leidinys skiriamas bendrojo lavinimo vidurinių mokyklų matematikos mokytojams ir moksleiviams.

Autorius

I skyrius

KOMBINATORIKA

Matematikos sritis, kurioje tiriami klausimai, kiek skirtingų kombinacijų, tenkinančių tam tikras sąlygas, galima sudaryti iš turimų objektų, vadinama kombinatorika.
Įvairios grupės, sudarytos iš bet kokių daiktų ir besiskiriančių viena nuo kitos arba pačiais daiktais, arba jų išdėstymo eile, vadinami junginiais.

Daiktai, iš kurių sudaryti junginiai, vadinami elementais.
Kombinatorika atsirado XVI a. Iš pradžių kombinatorikos uždaviniai dažniausiai būdavo susiję su azartiniais žaidimais. Italų matematikas Tartalija (1499–1557) nagrinėjo skirtingų kombinacijų skaičių, lošiant kauleliais.

XVII a. kombinatorikos klausimus teoriškai pradėjo nagrinėti prancūzų matematikai B. Paskalis (1623 – 1662) ir P. Ferma (1601 – 1665). Tolimesnė kombinatorikos raida susijusi su J. Bernulio (1654 – 1705), G. Leibnico (1646 – 1716), L. Oilerio (1707 – 1783) vardais. Tačiau ir jų darbuose vyrauja kombinatorikos taikymai įvairiems žaidimams.

Pastaruoju metu kombinatorikos metodai taikomi tikimybių teorijoje, matematinėje statistikoje, tiesiniame programavime ir kitose srityse.

1. Bendrieji kombinatorikos dėsniai

Kombinatorikos uždaviniai įvairūs, bet dauguma sprendžiami remiantis dviem pagrindinėmis taisyklėmis.

1. Kombinatorinė sudėties taisyklė. Dažnai nagrinėjamas kombinacijas galima suskirstyti į keletą grupių taip, kad kombinaciją galima priskirti tik vienai grupei. Aišku, kad norėdami gauti bendrą kombinacijų skaičių, turime sudėti visų grupių kombinacijų skaičius. Šis teiginys vadinamas sudėties taisykle ir trumpai formuluojamas taip:

Jei objektui A parinkti yra α būdų, o objektui B parinkti yra β būdų, tai pasirinkti arba A, arba B yra $\alpha + \beta$ būdų.

Taikant sudėties taisyklę, reikia žiūrėti, kad nė vienas objekto A pasirinkimo būdas nesutaptų su kokiu nors objekto B pasirinkimo būdu, t. y., kad nė viena kombinacija nepatektų į dvi grupes.

1 pavyzdys. Viename krepšelyje yra 10 skirtingų obuolių, kitame krepšelyje – 6 skirtingos kriaušės. Keliais būdais galima pasirinkti vieną vaisių?

Sprendimas. Pasirinkti 1 obuolį galima 10 būdų, pasirinkti 1 kriaušę galima 6 būdais. 1 vaisių (obuolį arba kriaušę) galima pasirinkti 10 + 6 = 16 būdų.

2 pavyzdys. Senelė kaime užaugino 12 vištų, 10 žąsų ir 8 antis. Vieną paukštų nutarė padovanoti į svečius atvažiavusiai anūkei. Kiek yra būdų parinkti vieną paukštį?

Sprendimas. 1 vištą parinkti galima 12 būdų, parinkti 1 žąsį galima 10 būdų, o parinkti 1 antį galima 8 būdais. Pagal sudėties taisyklę, vieną paukštį (arba vištą, arba žąsį, arba antį) galima parinkti 12 + 10 + 8 = 30 būdų.

Uždaviniai

1. Mokyklos bufete yra 4 rūšių bandelių ir 5 rūšių pyragaičių. Mergaitė nori nusipirkti arba bandelę, arba pyragaitį. Kiek pasirinkimo galimybių turi mergaitė?
2. Berniukas turi 12 raudonų balionų, 10 žalių ir 8 mėlynus. Vieną balioną nori padovanoti draugui. Keliais būdais berniukas gali parinkti dovaną?
3. Andrius turi 20 skirtingų pašto ženklų, Jonas 40% daugiau, negu Andrius, o Petras 50% daugiau, negu Jonas. Berniukai nutarė vieną ženklą parduoti. Keliais būdais jie gali išrinkti pardavimui skiriamą ženklą?

2. Kombinatorinė daugybos taisyklė. Sudarant kombinacijas iš dviejų elementų, paprastai žinome, keliais būdais galima pasirinkti pirmąjį elementą ir keliais – antrąjį elementą. Be to, antrojo elemento pasirinkimo skaičius nepriklauso nuo to, kaip buvo pasirinktas pirmasis elementas. Sakykime, kad pirmąjį elementą galėjome pasirinkti α būdų, o antrąjį β būdų. Tada tų elementų porą galima pasirinkti $\alpha \cdot \beta$ būdų. Šią taisyklę trumpiau galima pasakyti taip:

Jei objektui A pasirinkti yra α būdų, o po kiekvieno tokio pasirinkimo objektą B galima pasirinkti β būdų, tai porą (A, B) galima pasirinkti $\alpha \cdot \beta$ būdais.

Šią taisyklę galima taikyti, kai renkami trys arba daugiau objektų.

1 pavyzdys. Duoti skaitmenys 1, 2, 3, 4. Kiek iš jų galima sudaryti dviženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis?

Sprendimas. Pirmąjį skaitmenį galima pasirinkti 4 būdais (galima paimti bet kurį iš 4 duotųjų skaitmenų). Antrąjį skaitmenį galima pasirinkti 3 būdais (galima pasirinkti bet kurį iš 3 po pirmojo pasirinkimo likusių skaitmenų). Pagal daugybos taisyklę dviženkliui skaičiui sudaryti yra 4 · 3 =12 būdų.

2 pavyzdys. Kiek skirtingų triženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis galima sudaryti iš skaitmenų 0, 1, 2, 3, 4?

Sprendimas. Pirmąjį skaitmenį galima pasirinkti 4 būdais (galima paimti bet kurį iš skaitmenų, išskyrus 0). Antrąjį skaitmenį galima pasirinkti 4 būdais (galima paimti bet kurį iš likusių skaitmenų, tame skaičiuje ir 0). Trečiąjį skaitmenį galima pasirinkti 3 būdais. Pagal daugybos taisyklę triženklį skaičių galima sudaryti $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ būdais.

3 pavyzdys. Kiek skirtingų keturženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis ir dalių iš 5 galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 5?

Sprendimas. Keturženklis skaičius turi būti dalus iš 5, todėl jo gale gali būti tik skaičius 5. Lieka parinkti pirmuosius 3 skaitmenis. Pirmąjį skaitmenį galime parinkti 3 būdais, antrąjį – 2 būdais, trečiąjį – 1 būdu. Pagal daugybos taisyklę tris pirmuosius skaitmenis galima pasirinkti $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ būdais, todėl gausime 6 keturženklius skaičius, kurių gale yra skaitmuo 5.

Uždaviniai

4. Klasėje yra 25 mokiniai. Reikia išrinkti seniūną ir jo pavaduotoją. Kiek gali būti skirtingų rinkimų rezultatų?
5. Kiek skirtingų triženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5?
6. Kiek galima parašyti natūraliųjų skaičių, kurių kiekvienas būtų parašytas trimis skirtingais skaitmenimis?
7. Pirmadienio tvarkaraštyje yra 6 skirtingų dalykų pamokos. Kiek galima sudaryti skirtingų tos dienos pamokų tvarkaraščių?

3. Skaičiaus faktorialas. Visų natūraliųjų skaičių sandauga nuo 1 iki n žymima simboliu $n!$ (skaitoma: „en faktorialas“).

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Susitarta laikyti, kad $0! = 1$. Iš tikrųjų: $n! = n \cdot (n - 1)!$ Ši lygybė turi būti teisinga, kai $n = 1$, t. y., kad būtų $1! = 1 \cdot (1 - 1)!$ Todėl $0! = 1$.

Pavyzdžiui, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

2. Gretiniai

Duoti skaitmenys 1, 2, 3. Sudarykime visus galimus dviženklius skaičius su skirtingais skaitmenimis:

12, 13, 23,

21, 31, 32

Gavome 6 junginius – dviženklius skaičius. Skirtingi junginiai vienas nuo kito skiriasi arba pačiais elementais, arba jų išdėstymo tvarka. Tokius junginius vadiname gretiniais iš 3 elementų po 2.

Du skirtingi gretiniai skiriasi vienas nuo kito arba pačiais elementais, arba jų išdėstymo tvarka. Pavyzdžiui, ab ir ba yra skirtingi gretiniai.

Apibrėžimas. Gretiniais iš n elementų po k vadinami tokie junginiai, kurių kiekvienas turi k elementų, parinktų iš n elementų, ir kurie vienas nuo kito skiriasi arba elementais, arba jų eile.

Gretinių skaičius iš n elementų, paimtų po k elementų, žymimas A_n^k $(k \leq n, k \in N)$. A yra pirmoji raidė prancūziško žodžio „arrangement“, kuris reiškia išdėstymą, sutvarkymą.

Teorema. Gretinių skaičius apskaičiuojamas pagal formulę

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1) \qquad (1)$$

Įrodymas. Iš n elementų reikia sudaryti gretinius po k elementų.

Pirmąjį elementą galime išsirinkti n būdų, nes galima paimti bet kurį iš n duotųjų elementų. Lieka (n – 1) elementas.

Antrąjį elementą galima išrinkti (n – 1) būdų. Lieka (n – 2) elementai.

Trečiąjį elementą galima išrinkti (n – 2) būdų.

...

Paskutinįjį k-tąjį elementą galima išrinkti (n – k + 1) būdų, nes prieš tai jau buvo išrinktas (k – 1) elementas, t. y. buvo likę n – (k – 1) = n – k + 1 elementų.

Pagal daugybos taisyklę k elementų iš n elementų galima išrinkti n·(n – 1)·(n – 2)·...· ((n – k + 1) būdų, t. y.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1).$$

(1) formulės skaitiklį ir vardiklį padauginę iš (n – k)!, gauname kitą gretinių skaičiaus formulę:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (2)$$

Iš tikrųjų

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k)\cdot(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k)} = n\cdot(\mathrm{n}-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$

Susitarta laikyti, kad $A_0^0 = 1$, $A_n^0 = 1$, nes remiantis (2) formule, gauname:

$$A_0^0 = \frac{0!}{(0-0)!} = \frac{0!}{0!} = \frac{1}{1} = 1,\ A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

<u>1 pavyzdys</u>. Išspręskime lygtį $2A_x^2 = A_x^3$.

Lygtis apibrėžta, kai $x \geq 3, x \in N$.

$$2x(x-1) = x(x-1)(x-2);$$

$$2 = x - 2;$$

$$x = 4.$$

Ats.: 4.

<u>2 pavyzdys</u>. Išspręskime nelygybę $A_{x+1}^{x-2} < A_x^{x-1}$.

Nelygybė apibrėžta, kai $x \geq 2, x \in N$. Pritaikę (2) formulę, gauname

$$\frac{(x+1)!}{3!} < \frac{x!}{1!};$$

$$\frac{x+1}{6} < 1;$$

$$x < 5.$$

Atsižvelgdami į apibrėžimo sritį, gauname: $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

<u>3 pavyzdys</u>. Apskaičiuokite, kiek galima sudaryti natūraliųjų skaičių, iš kurių kiekvienas būtų parašytas 3 skirtingais skaitmenimis.

Iš 10 skaitmenų 0, 1, 2, 3, ..., 9 galima sudaryti A_{10}^3 gretinius. Iš šio skaičiaus reikia atimti tuos gretinius, kurie prasideda skaitmeniu 0. Tokių gretinių bus tiek, kiek gretinių po 2 skaitmenis galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, ..., 9, t. y. A_9^2.

Vadinasi, ieškomasis skaičius yra $A_{10}^3 - A_9^2 = 648$.

<u>II būdas</u>. Pirmąjį skaitmenį galima parinkti 9 būdais (negalima imti 0).

Antrąjį skaitmenį galima parinkti 9 būdais, nes galima paimti bet kurį iš likusių skaitmenų, tame skaičiuje ir 0.

Trečiąjį skaitmenį galima parinkti 8 būdais. Pagal daugybos taisyklę gauname: 9 · 9 · 8 = 648.

Uždaviniai

8. Klasėje 20 mokinių. Reikia išrinkti seniūną ir jo pavaduotoją. Keliais būdais tai galima padaryti?

9. Klasėje dėstoma 12 dalykų. Kasdien būna po 6 skirtingas pamokas. Kiek skirtingų vienos dienos tvarkaraščių galima sudaryti?

10. 25 abiturientai apsikeitė nuotraukomis. Kiekvienas padovanojo savo nuotrauką kiekvienam klasės draugui. Kiek buvo panaudota nuotraukų?

11. 20 mokinių iš ryto pasisveikino paspausdami vienas kitam ranką. Kiek buvo rankų paspaudimų?

12. Kiek skirtingų triženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5?

13. Keliais būdais galima sudaryti trispalvę vėliavą, turint 7 skirtingų spalvų audeklus, jei visos spalvos turi būti skirtingos?

14. Kiek lyginių keturženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis galima sudaryti iš skaitmenų 1, 3, 5, 7, 8?

15. Kiek skirtingų natūraliųjų skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5 jų nekartojant?

16. Kiek skirtingų triženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 0, 1, 2, 3, 4 jų nekartojant?

17. Kiek skirtingų natūraliųjų skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 0, 1, 2, 3, 4 jų nekartojant?

18. Keliais būdais galima sudaryti trispalvę vėliavą, turint 5 skirtingų spalvų audeklus, jei viena juosta turi būti žalia?

19. Kiek nelyginių keturženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis galima sudaryti iš skaitmenų 1, 8, 9, 4? Kiek lyginių?

20. *Apskaičiuokite sumą tokių triženklių skaičių, kuriuos galima parašyti skaitmenimis 2, 3, 5, jų nekartojant.

21. Išspręskite lygtį: $2A_{x-2}^{x-3} = A_x^{x-2}$.

22. Išspręskite nelygybę: $A_{10}^{x-1} \geq \frac{2}{x} A_{10}^{x}$.

23. Apskaičiuokite: $\frac{A_{20}^5 + A_{20}^6}{A_{20}^4}$.

24. Raskite funkcijos $f(x) = A_{7-x}^{x-3}$ reikšmių aibę.

25. Išspręskite lygtis: a) $A_{2x}^3 = 14 \cdot A_x^3$; b) $A_{3x}^4 = 15 \cdot A_{2x}^3$.

26. Išspręskite lygtis: a) $\frac{x}{A_x^3} = \frac{1}{12}$; b) $\frac{A_x^4 + A_x^3}{A_x^3} = 13$.

3. Kėliniai

Sudarę visus triženklius skaičius iš skaitmenų 1, 2, 3, jų nekartodami, gauname:

$$123, 132, 213, 231, 312, 321.$$

Turime junginius, sudarytus iš duotųjų 3 elementų, parinktų po 3. Šie junginiai sudaryti iš tų pačių elementų, o skiriasi tik tų elementų tvarka. Tokius junginius vadiname kėliniais.

Apibrėžimas. Gretiniai iš n elementų po n vadinami kėliniais iš n elementų.

Kėlinių skaičius žymimas P_n.

Skirtingi kėliniai sudaryti iš tų pačių elementų ir vienas nuo kito skiriasi tik elementų eile.

Teorema. Kėlinių iš n elementų skaičius lygus n!

Remiantis gretinių skaičiaus formule (2),

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

P yra pirmoji prancūzų kalbos žodžio „permutation" raidė, šis žodis reiškia perstatą.

Pavyzdžiui, $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, $P_6 = 6! = 720$.

1 pavyzdys. Kiek galima sudaryti skirtingų penkiaženklių skaičių iš skaitmenų 0, 1, 2, 3, 4, jų nekartojant?

Sprendimas. Iš 5 skaitmenų galima sudaryti P_5 kėlinius. Iš šio skaičiaus reikia atimti skaičių kėlinių, kurie prasideda 0. Tokių kėlinių bus tiek, kiek galima sudaryti kėlinių iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, t. y., P_4. Vadinasi ieškomasis skaičius yra $P_5 - P_4 = 96$.

2*pavyzdys. Apskaičiuokime sumą tokių keturženklių skaičių, kuriuos galime parašyti perstatinėdami skaitmenis 1, 2, 3, 4.

Sprendimas. Sakykime, kad keturženklio skaičiaus gale yra 4. Prieš jį esančius 3 skaitmenis galima perstatyti $P_3 = 6$ būdais, todėl turėsime 6 keturženklius skaičius, kurie baigiasi skaitmeniu 4. Tiek pat bus keturženklių skaičių, kurie baigiasi skaitmenimis 1, 2, 3. Vadinasi, kiekvienas skaitmuo kiekviename skyriuje bus parašytas 6 kartus. Sudėję pirmojo skyriaus skaitmenis, gauname 6 · (1 + 2 + 3 + 4) = 60, sudėję antrojo skyriaus skaitmenis, gauname 600, trečiojo – 6000, ketvirtojo – 60000. Visų keturženklių skaičių suma lygi

$$60 + 600 + 6000 + 60000 = 66660.$$

Uždaviniai

27. Apskaičiuokite: a) $\frac{52!}{50!}$; b) $\frac{5!+6!}{4!}$; c) $\frac{10!-8!}{89}$.

28. Išspręskite lygtis: a) $\frac{(n+2)!}{n!} = 72$; b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$;

c) $\frac{(2n)!}{(2n-3)!} = \frac{20n!}{(n-2)!}$; d) $\frac{x!}{(x-4)!} = \frac{12x!}{(x-2)!}$.

29. Keliais būdais suole galima susodinti 5 moksleivius?

30. Keliais būdais knygų lentynoje galima sustatyti 6 skirtingas knygas?

31. Į ekskursiją vyksta 10 moksleivių. Keliais būdais galima sudaryti ekskursantų sąrašą, jei tarp jų nėra bendrapavardžių?

32. Duoti skaitmenys 1, 2, 3, 4, 5. Kiek galima sudaryti penkiaženklių skaičių, kurių visi skaitmenys skirtingi ir dalijasi iš 5?

33. *Kiek yra devynženklių skaičių, kurių visi skaitmenys skirtingi?

34. Duoti skaitmenys 1, 2, 3, 4, 5, 6. a) Kiek kėlinių prasideda skaitmeniu 5? b) Kiek kėlinių prasideda skaitmenimis 45?

35. * Keliais būdais suole galima susodinti 7 moksleivius, kad du iš jų – Jonas ir Andrius – sėdėtų greta? (Visų moksleivių vardai skirtingi).

Nurodymas. Joną ir Andrių greta galima susodinti 2! Būdais. Likusius 5 moksleivius galima susodinti 5! Būdų. Be to, Jono ir Andriaus duetą kitų atžvilgiu galima pasodinti 6 vietose.

36. * Knygų lentynoje yra 5 skirtingi algebros ir 3 skirtingi geometrijos vadovėliai. Keliais būdais juos galima sustatyti į eilę, kad vieno dalyko knygos būtų greta?

37. Apskaičiuokite $\frac{P_{k+1}}{(k-n)!\cdot A_{k-1}^{n-1}}$.

38. Raskite *x* iš lygties $(x+2)! = 132 \cdot A_x^k \cdot P_{x-k}$.

4. Deriniai

Tarkime, kad iš keturių moksleivių *a, b, x, y* reikia išrinkti dviejų žmonių delegaciją.

Aišku, kad delegacija bus skirtinga, jei skirsis bent vienu nariu. Parinkimo tvarka čia nesvarbi. Todėl galimos tokios delegacijos sudėtys:

ab, ax, ay, bx, by, xy.

Turime junginius, kuriuose nesvarbi elementų parinkimo tvarka. Tokius junginius vadiname deriniais.

Apibrėžimas. Deriniais iš n elementų po k vadinami tokie junginiai, kurių kiekvienas turi k elementų, parinktų iš duotųjų n elementų, ir kurie vienas nuo kito skiriasi tik pačiais elementais.

Pavyzdžiui, ab ir ba yra vienas ir tas pats derinys.

Derinių skaičių iš n elementų po k žymime C_n^k.

C yra pirmoji raidė prancūziško žodžio „combinaison“ – „derinys“.

Teorema. Derinių iš n po k skaičius apskaičiuojamas pagal formulę:

$$C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \quad (1)$$

Įrodymas. Kiekvieną derinį, turintį k elementų, galima sutvarkyti k! būdais, perstatant jo elementus. Gausime gretinius, kurių bus k! kartų daugiau negu derinių. Vadinasi, $k!\cdot C_n^k = A_n^k$. Iš čia

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

Pavyzdžiui. $C_4^2 = \frac{5\cdot4}{2!} = 10$; $C_{10}^3 = \frac{10\cdot9\cdot8}{3!} = 120$.

(1) formulėje skaitiklį ir vardiklį padauginę iš (n – k)!, gausime kitą derinių skaičiaus formulę:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2)$$

Susitarta laikyti, kad $C_n^0 = 1$ ir $C_0^0 = 1$, nes remiantis (2) formule, turime:

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = 1;\ C_0^0 = \frac{0!}{0!(0-0)!} = \frac{1}{1\cdot1} = 1.$$

Pagrindinė derinių savybė:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (3)$$

Įrodymas. Remiantis (2) formule, turime:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!};\ C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Iš čia $C_n^k = C_n^{n-k}$.

(3) formulę patogu taikyti, kai $k > \frac{1}{2}n$. Pavyzdžiui,

$$C_{100}^{98} = C_{100}^{100-98} = C_{100}^2 = \frac{100\cdot99}{2!} = 4950.$$

Pavyzdžiai.

1. Kiek įstrižainių turi iškilusis šešiakampis?

Sprendimas. 2 iš 6 taškų tarpusavyje galima sujungti C_6^2 būdų. Iš šio skaičiaus atėmę kraštinių skaičių 6, gausime įstrižainių skaičių: $C_6^2 - 6 = 9$.

2. Klasėje 12 berniukų ir 8 mergaitės. Reikia išrinkti 5 moksleivių delegaciją, į kurią įeitų 3 berniukai ir 2 mergaitės. Kiek gali būti skirtingų delegacijų sudėčių?

Sprendimas. Berniukams parinkti yra C_{12}^3 būdų, o mergaitėms – C_8^2 būdų. Remiantis daugybos taisyklę, delegacijų skaičius lygus $C_{12}^3 \cdot C_8^2 = 6160$.

3. * Jokios trys iškiliojo dvylikakampio įstrižainės nesikerta viename taške. Raskite jo įstrižainių susikirtimo taškų skaičių.

Sprendimas. Nubrėžkime keturkampį. Dvi jo įstrižainės susikerta tik viename taške. Todėl įstrižainių susikirtimo taškų bus tiek, kiek galima sudaryti keturkampių, t. y. $C_{12}^4 = 495$.

4. * Iš 36 kortų kaladės, kurioje yra 4 tūzai, ištrauktos 6 kortos:

a) keliais atvejais tarp jų bus vienas tūzas?

b) Keliais atvejais tarp jų bus bent vienas tūzas?

c) Keliais atvejais tarp jų bus du tūzai?

d) Keliais atvejais tarp jų bus bent du tūzai?

e) Keliais atvejais tarp jų bus trys tūzai?

f) Keliais atvejais tarp jų bus keturi tūzai?

Sprendimas.

a) Vieną tūzą galima pasirinkti C_4^1 būdais. Dar reikia pasirinkti 5 kortas, tarp kurių nebūtų nė vieno tūzo. Jas galima pasirinkti C_{32}^5 būdų. Remiantis kombinatorine daugybos taisykle, vienas tūzas bus $C_4^1 \cdot C_{32}^5$ atvejais.

b) 6 kortoms iš 36 paimti yra C_{36}^6 būdų. Iš šio skaičiaus reikia atimti variantų skaičių, kai nėra nė vieno tūzo, t. y. C_{32}^6.

Ats.: $C_{36}^6 - C_{32}^6$.

c) 2 tūzams parinkti yra C_4^2 būdų. Trūkstamas 4 kortas galima parinktiC_{32}^4 būdų. Remiantis kombinatorinę daugybos taisykle, du tūzai bus $C_4^2 \cdot C_{32}^4$ atvejais.

d) 6 kortas iš 36 galima parinkti C_{36}^6 būdų. Iš šio skaičiaus reikia atimti skaičių variantų, kai nėra nė vieno tūzo C_{32}^6 ir atimti skaičių variantų, kai yra tik vienas tūzas $C_4^1 \cdot C_{32}^5$.

Ats.: $C_{36}^6 - C_{32}^6 - C_4^1 \cdot C_{32}^5$.

e) Ats.: $C_4^3 \cdot C_{32}^3$.

f) Ats.: $C_4^4 \cdot C_{32}^2$.

5. * Šokių ratelį lanko 7 mergaitės ir 5 berniukai. Keliais būdais iš jų galima sudaryti 4 šokėjų poras?

Sprendimas. 4 mergaites galima parinkti C_7^4 būdų. Kai mergaitės jau parinktos, yra svarbi berniukų parinkimo tvarka, todėl juos galima parinkti A_5^4 būdų. Remiantis kombinatorinę daugybos taisykle, 4 šokėjų poroms sudaryti yra $C_7^4 \cdot A_5^4$ būdų.

Galima iš pradžių C_5^4 būdais parinkti 4 berniukus. Po to svarbi bus mergaičių parinkimo tvarka, todėl jas galėsime parinkti A_7^4 būdais. Vadinasi, 4 žokėjų poras galima sudaryti $C_7^4 \cdot A_5^4 = C_5^4 \cdot A_7^4$ būdų.

Uždaviniai

39. Apskaičiuokite: a) C_{18}^{17}; b) C_{20}^{18}; c) $C_5^4 + C_5^0$.

40. Išspręskite lygtis: a) $3C_{2x}^{x-1} = 5C_{2x-1}^{x}$; b) $C_x^3 = \frac{1}{5}C_{x+2}^4$; c) $C_{2x-1}^{x} : C_{2x}^{x-1} = 9:17$.

41. Išspręskite nelygybes: $C_x^5 < C_x^4$; b) $C_x^5 < C_x^3$; c) $C_{19}^{x-1} < C_{19}^{x}$.

42. Išspręskite lygčių sistemą: $\begin{cases} C_x^2 = 66; \\ C_x^y = C_x^{y+2}. \end{cases}$

43. Klasėje 20 mokinių. Reikia išrinkti 2 budinčiuosius. Keliais būdais tai galima padaryti?

44. Šaškių turnyre dalyvauja 12 moksleivių. Kiekvienas sužais su kiekvienu po vieną partiją. Kiek bus sužaista partijų?

45. Šachmatų turnyre kiekvienas dalyvis sužaidė su kiekvienu po vieną partiją. Iš viso buvo sužaista 210 partijų. Kiek šachmatininkų dalyvavo turnyre?

46. Iš 10 skirtingų gėlių žiedų reikia sudaryti 3 žiedų puokštę. Kiek skirtingų puokščių galima sudaryti?

47. Kiek įstrižainių turi iškilusis 10-kampis?

48. * Keliuose taškuose susikerta iškiliojo 10-kampio įstrižainės, jei žinoma, kad viename taške susikerta tik 2 įstrižainės?

49. Kiek gaunama lygiagretainių perkirtus 5 lygiagrečias tieses vienos krypties 4 lygiagrečiomis tiesėmis kitos krypties?

50. Onutė turi 7 skirtingas matematikos knygas, o Jonas 5 skirtingas fizikos knygas. Keliais būdais jie gali pasikeisti po 3 knygas?

51. Dėžėje yra 50 loterijos bilietų, iš kurių 5 laimingi. Ištraukti 7 bilietai. Keliais atvejais tarp jų bus 2 laimingi bilietai?

52. Dėžėje yra 20 detalių, tarp kurių 3 nestandartinės. Paimtos 5 detalės. Keliais atvejais tarp paimtųjų detalių yra bent viena nestandartinė?

53. Klasėje 8 berniukai ir 12 mergaičių. Reikia sudaryti delegaciją, į kurią įeitų 2 berniukai ir 3 mergaitės. Kiek skirtingų delegacijų galima sudaryti?

54. * 36 kortų kaladėje yra 4 karaliai. Ištrauktos 5 kortos. Keliais atvejais tarp jų bus du karaliai?

55. * 36 kortų kaladėje yra 4 karaliai. Ištrauktos 5 kortos. Keliais atvejais tarp jų bus bent du karaliai?

56. Matematikos egzaminui parinkti 20teorinių klausimų ir 25 uždaviniai. Kiek skirtingų bilietų galima sudaryti, jei į egzamino bilietą nutarta įtraukti 2 teorinius klausimus ir 3 uždavinius?

57. Plokštumoje duota n taškų, iš kurių jokie 3 taškai nėra vienoje tiesėje, išskyrus k taškų, esančių vienoje tiesėje. Keliomis tiesėmis galima sujungti taškus?

58. * Iš 2 deputatų ir 8 teisininkų reikia sudaryti 5 žmonių komisiją. Keliais būdais galima sudaryti komisiją, jei į ją turi įeiti bent vienas deputatas?

5. Junginiai su pasikartojimais

1. Kėliniai su pasikartojimais. Išnagrinėkime tokius pavyzdžius.

1 pavyzdys. Kiek gausime skirtingų žodžių perstatydami raides žodyje „matematika“?

Sprendimas. Šiame žodyje 10 raidžių. Jei visos raidės būtų skirtingos, tai iš jų būtų galima sudaryti 10! skirtingų žodžių. Tačiau ne visi kėliniai sudaro naujus žodžius. Aišku, kad sukeitę raides m, o taip pat a ir t raides vietomis, naujo žodžio negausime. Vadinasi, turime surasti skaičių kėlinių, sudarančių tą patį žodį.

2 raides m tarpusavyje galima sukeisti 2! būdais. 3 raides a tarpusavyje galima sukeisti 3! būdais. 2 raides t galima sukeisti 2! būdais. Pritaikę daugybos taisyklę, gauname, kad kiekvienas naujas žodis kartosis 2! · 3! · 2! kartų. Todėl skirtingų žodžių skaičius lygus $\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}$.

Apskritai, jei yra duota n elementų a_1, a_2, ..., a_n, iš kurių kiekvienas atitinkamai gali kartotis a_1, a_2, ..., a_n kartų, tai skirtingų kėlinių, kuriuos galima sudaryti iš duotųjų elementų, skaičius lygus

$$P_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)} = \frac{n!}{a_1!\cdot a_2!\cdot \ldots \cdot a_n!} \qquad (1)$$

Nepamirškime, kad $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$.

2 pavyzdys. Kiek kėlinių galima sudaryti iš žodžio „ananasas“ raidžių?

Sprendimas. Šiuo atveju turime 4 raides a, 2 raides n, 2 raides s; iš viso 8 raides. Pagal (1) formulę kėlinių skaičius lygus $P_{(4,2,2)} = \frac{8!}{4!2!2!} = 420$.

Uždaviniai

59. Kiek galima gauti skirtingų žodžių, perstačius raides žodyje „kakava“?

60. Kiek kėlinių galima sudaryti iš žodžio „auksas“ raidžių?

61. Keliai būdais galima sudėti knygų lentynoje 4 algebros ir 5 geometrijos knygas, jei kiekvieno dalyko knygos nevienodos?

62. Kiek kėlinių galima sudaryti iš žodžio „kava“ raidžių?

2. Kėliniai su neribotu pasikartojimų skaičiumi. Išnagrinėkime tokius pavyzdžius.

1 pavyzdys. Kiek skirtingų dviženklių skaičių galime sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, kai tas pats skaitmuo skaičiuje gali kartotis?

Sprendimas. Dešimčių vietoje galima parašyti bet kurį duotą skaitmenį. Kadangi skaitmuo skaičiuje gali kartotis, tai skaitmenys renkami su grąžinimu. Išrinkus dešimčių skaitmenį, vienetų vietoje galima rašyti vėl bet kurį skaitmenį. Vadinasi, dešimčių vietoje galima rašyti 3 skaitmenis, vienetų vietoje taip pat 3 skaitmenis. Pagal daugybos taisyklę gauname $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ skirtingų dviženklių skaičių.

2 pavyzdys. Kiek skirtingų keturženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 1, 3, 5?

Sprendimas. Vienetų, dešimčių, šimtų ir tūkstančių vietoje galima parašyti bet kurį iš duotųjų skaitmenų. Vadinasi, vienetų skaitmeniui parinkti yra 3 būdai, dešimčių skaitmeniui – 3 būdai, šimtų skaitmeniui – 3 būdai, tūkstančių skaitmeniui – 3 būdai. Pagal daugybos taisyklę gauname $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$ skirtingą keturženklį skaičių.

Kėlinių su pasikartojimais iš n elementų po k skaičius žymimas $\bar{P}_n^k$ arba $\bar{A}_n^k$.

Remdamiesi išnagrinėtais pavyzdžiais, galime padaryti išvadą, kad kėlinių su pasikartojimais iš n elementų po k skaičius apskaičiuojamas pagal formulę

$$\bar{P}_n^k = n^k \qquad (2)$$

Kadangi elementai renkami su grąžinimu, tai junginio skaičius k gali būti kiek norima didelis ir didesnis už n.

Uždaviniai

63. Kiek keturženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, jei skaitmenys gali kartotis?

64. Kiek penkiaženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, jei skaitmenys gali kartotis?

65. Moneta metama 10 kartų. Kiek gausime skirtingų herbo ir skaičiaus iškritimo kombinacijų?

66. Buto viduje yra 8 durys. Kiekvienos durys gali būti uždarytos arba atidarytos. Kiek yra skirtingų padėčių, kuriose gali būti visos durys?

67. Kiek galima parašyti šešiaženklių skaičių su nelyginiais skaitmenimis, jei kiekvienas skaitmuo gali kartotis?

3. Deriniai su pasikartojimais.* Deriniai iš n elementų po k elementų su pasikartojimais apskaičiuojami pagal formulę:

$$\bar{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \qquad (1)$$

arba

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k \qquad (2)$$

Šių formulių įrodymą praleidžiame. Sprendžiant uždavinius patogu remtis (2) formule.

Pavyzdžiai.

1. Kioske yra 6 skirtingų rūšių atvirukų. Keliais skirtingais būdais galima nusipirkti 10 atvirukų rinkinį?

Sprendimas. $\bar{C}_6^{10} = C_{10+6-1}^{10} = C_{15}^{10} = \frac{15!}{10!5!} = 3003.$

2. Mokyklos bufete yra 4 rūšių pyragaičių. Keliais skirtingais būdais galima nusipirkti 6 pyragaičius?

Sprendimas. $\bar{C}_4^6 = C_9^6 = C_9^3 = 84.$

3. Turime neribotą kiekį monetų po 1, 2 ir 5 centus. Keliais būdais galima parinkti 10 monetų?

Sprendimas. $\bar{C}_3^{10} = C_{12}^{10} = C_{12}^2 = 66.$

Uždaviniai

68. Apskaičiuokite: a) $\bar{C}_3^{10}$; b) $\bar{C}_2^{12}$); c) $\bar{C}_3^{15} + \bar{C}_4^{16}$.

69. Dovanoms reikia nupirkti 20 knygų. Knygyne yra 5 rūšių knygų. Keliais skirtingais būdais gali būti parinktos dovanoms skirtos knygos?

70. Daržovių parduotuvėje yra 10 rūšių vaisių. Keliais būdais galima nusipirkti 12 vaisių?

71. Turime 10 vienodų matematikos knygų. Keliais būdais jas galima išdalinti 12 moksleivių?

6. Niutono formulė

1. Skaičiai C_n^k pasižymi įdomiomis ir svarbiomis savybėmis. Vieną iš jų jau turėjome: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Įrodysime antrąją savybę:

$$C_n^{k+1} + C_n^k = C_{n+1}^{k+1};\ k < n. \qquad (1)$$

Remdamiesi derinių skaičiaus formule $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

gauname:

$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(k+1)(n-k)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}.$$

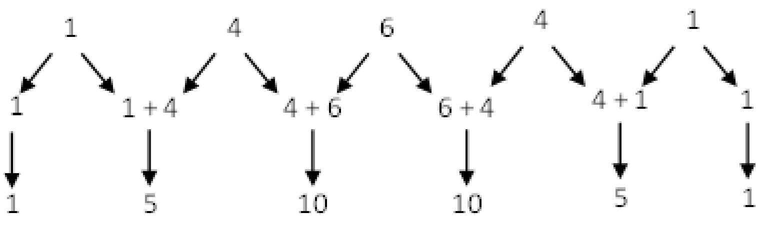
$$C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}.$$

Iš čia $C_n^{k+1} + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$.

<u>2. Paskalio trikampis</u>. (B. Paskalis (1623 – 1662) prancūzų fizikas ir matematikas). Remiantis (1) formule, galima užrašyti C_n^k reikšmių lentelę, kuri vadinama Paskalio trikampiu:

n = 0	1
n = 1	1 1
n = 2	1 2 1
n = 3	1 3 3 1
n = 4	1 4 6 4 1
n = 5	1 5 10 10 5 1
n = 6	1 6 15 20 15 6 1
...	...

Lentelė sudaryta taip. Pirmas ir paskutinis kiekvienos eilutės elementas yra lygus 1, nes $C_n^0 = C_n^n = 1$. Kiti eilutės elementai apskaičiuojami remiantis (1) formule: kiekvienas jų lygus skaičių, esančių virš jo kairėje ir dešinėje, sumai. Pavyzdžiui, 6-toji eilutė iš 5-osios gaunama taip:



<u>3. Niutono binomas</u>. Skaičiai, esantys antroje (n = 2) ir trečioje (n = 3) Paskalio trikampio eilutėse, gaunami dvinarį (binomą) $a + b$ pakėlus kvadratu ir kubu. Pavyzdžiui,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Šias formules galima užrašyti šitaip:

$$(a+b)^2 = C_2^0a^2 + C_2^1ab + C_2^2b^2,$$
$$(a+b)^3 = C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3.$$

Kyla natūrali išvada, kad bet kuriam $n \in N$ yra teisinga formulė

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \cdots + C_n^ka^{n-k}b^k + \cdots + C_n^nb^n. \quad (2)$$

Šios formulės teisingumą įrodysime matematinės indukcijos metodu. Kai $n = 1$, (2) formulė atrodo taip:

$$(a+b)^1 = C_1^0a + C_1^1b = a + b, \text{ nes } C_1^0 = C_1^1 = 1.$$

Tarkime, kad (2) formulė teisinga, kai *n* = *m*, t. y.

$$(a+b)^m = C_m^0a^m + C_m^1a^{m-1}b + \cdots + C_m^ka^{m-k}b^k + \cdots + C_m^mb^m.$$

Norėdami įrodyti, kad formulė teisinga, kai *n* = *m* + 1, abi lygybės puses padauginame iš (*a* + *b*). Gauname:

$$(a+b)^{m+1} = (C_m^0a^m + C_m^1a^{m-1}b + \cdots + C_m^ka^{m-k}b^k + \cdots + C_m^mb^m)(a+b) =$$
$$= C_m^0a^{m+1} + C_m^1ab + \cdots + C_m^ka^{m-k+1}b^k + \cdots + C_m^mab^m + C_m^0a^mb + C_m^1a^{m-1}b^2 +$$
$$+ \cdots + C_m^ka^{m-k}b^{k+1} + \cdots + C_m^mab^{m+1}$$
$$= C_m^0a^{m+1} + (C_m^0 + C_m^1)a^mb + \cdots + (C_m^k + C_m^{k-1})a^{m-k+1}b^k + \cdots + C_m^mb^{m+1}.$$

Kadangi, $C_m^0 = C_{m+1}^0 = 1$, $C_m^m = C_{m+1}^{m+1} = 1$, $C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k$, tai

$$(a+b)^{m+1} = C_{m+1}^0a^{m+1} + C_{m+1}^1a^mb + \cdots + C_{m+1}^ka^{m+1-k}b^k + \cdots + C_{m+1}^{m+1}b^{m+1}.$$

Vadinasi, jeigu (2) formulė yra teisinga, kai *n* = *m*, tai ji teisinga ir kai *n* = *m* + 1. Kadangi, ji yra teisinga, kai *n* = 1, tai, remiantis matematinės indukcijos principu, ji teisinga visiems $n \in N$.

(2) formulė pavadinta žymaus anglų fiziko ir matematiko I. Niutono vardu, nors ji buvo žinoma žymiai anksčiau. Niutono nuopelnas toks, kad jis(2) formulę apibendrino ir pritaikė, kai *n* trupmeninis skaičius.

Dešinioji (2) formulės dalis vadinama binomo laipsnio dėstiniu. Koeficientai C_n^k vadinami binominiais koeficientais.

4. Niutono formulės savybės. Išvardysime būdingas Niutono formulė savybes:

1) dešinėje Niutono formulės dalyje yra n + 1 dėmuo;

2) kiekvienas dėmuo yra $C_n^k a^{n-k} b^k$ pavidalo. Dėmuo $C_n^k a^{n-k} b^k$ yra (k + 1)-oje vietoje, todėl formulė

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

vadinama (k + 1)-ojo nario formule. Ji plačiai taikoma sprendžiant uždavinius;

3) visų binominių koeficientų suma lygi 2^n. Iš tikrųjų, (2) formulėje įrašę a = b = = 1, gauname

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n;$$

4) kiekvieno dėstinio nario a laipsnio rodiklis yra vienetu mažesnis, negu pirmesniojo, o b laipsnio rodiklis – vienetu didesnis. Bet kuriame naryje a ir b laipsnių rodiklių suma lygi n;

5) dėstinio binominiai koeficientai yra Paskalio trikampio n-tosios eilutės skaičiai;

6) dėstinio binominiai koeficientai, vienodai nutolę nuo pirmojo ir paskutiniojo nario, yra lygūs, nes $C_n^k = C_n^{n-k}$;

7) norint gauti sekančio nario koeficientą, pakanka padauginti pirmesnio už jį nario koeficientą iš to nario a rodiklio ir padalyti iš pirmesniųjų narių skaičiaus;

8) (2) formulėje vietoj b įrašę –b, gauname

$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \cdots - (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots (-1)^n b^n.$

Vadinasi + ir – ženklai eina pakaitomis.

Pavyzdžiai.

1. $(x+a)^5 = x^5 + C_5^1 x^4 a + C_5^2 x^3 a^2 + C_5^3 x^2 a^3 + C_5^4 x a^4 + a^5 =$
$= x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$

2. Rasime binomo laipsnio $\left(\frac{1}{x} + x\right)^{12}$ dėstinio devintąjį narį.

Sprendimas. Pritaikę (k + 1)-ojo nario formulę $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, gauname

$$T_{8+1} = C_{12}^8 \left(\frac{1}{x}\right)^{12-8} x^8 = C_{12}^4 x^{-4} x^8 = 495x^4.$$

3. Raskime dėstinio $\left(a^{-\frac{8}{9}}+\sqrt[3]{a^2}\right)^7$ narį, neturintį a.

Sprendimas. Tarkime, kad a neturi $(k+1)$-asis narys. $T_{k+1}=C_n^k\left(a^{-\frac{8}{9}}\right)^{n-k}\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^k$.

Kadangi šis narys neturi a, tai

$$\left(a^{-\frac{8}{9}}\right)^{n-k}\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^k=a^0;$$

$$-\frac{8}{9}n+\frac{8}{9}k+\frac{2}{3}k=0.$$

Įrašę n = 7, gauname, kad k = 4. Vadinasi, a neturi 5-asis narys.

4. * Binomo $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ dėstinio pirmieji trys koeficientai sudaro aritmetinę progresiją. Rasime visus racionaliuosius dėstinio narius.

Sprendimas. Pirmieji trys dėstinio nariai yra:

$$\left(\sqrt{x}\right)^n;\ n\left(\sqrt{x}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt[4]{x}};\ \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt{x}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{2^2\left(\sqrt[4]{x}\right)^2}.$$

Jų koeficientai 1, $\frac{n}{2}$, $\frac{n(n-1)}{8}$ sudaro aritmetinę progresiją, todėl $1+\frac{n(n-1)}{8}=2\cdot\frac{n}{2}$. Iš čia gauname: n = 8, n = 1. Kai n = 1, dėstinys neturi racionaliųjų narių.

Kai n = 8, k + 1 narys

$$T_{k+1}=C_8^k\left(\sqrt{x}\right)^{8-k}\cdot\frac{1}{2^k\left(\sqrt[4]{x}\right)^k}=C_8^k\frac{1}{2^k}x^{\frac{8-k}{2}-\frac{k}{4}},$$

k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Kad narys būtų racionalusis, būtina ir pakankama sąlyga: $\frac{8-k}{2}-\frac{k}{4}=\frac{16-3k}{4}$ turi būti sveikasis skaičius. Todėl k = 0; 4; 8. Vadinasi, racionalieji dėstinio nariai yra x^4, $\frac{35}{8}x$, $\frac{1}{256x^2}$.

Uždaviniai

72. Raskite aštuntąjį dėstinio $(2x-3)^{10}$ narį.

73. Raskite ketvirtąjį dėstinio $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^9$ narį.

74. Raskite dėstinio narį, nepriklausantį nuo x: a) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$; b) $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^{12}$.

75. Raskite laipsnio rodiklį n, jeigu binomo laipsnio $\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{-1}\right)^n$ dėstinio penktasis narys nepriklauso nuo a.

76. Raskite dėstinio narį, kuriame nebūtų x, jeigu binomo laipsnio $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^n$ dėstinio binominių koeficientų suma lygi 256.

77. Raskite didžiausią daugianario narį: a) $(0{,}5+0{,}5x)^{10}$; b) $(0{,}1+0{,}9x)^{12}$.

78. Raskite daugianario $(1+x^2+x^3)^9$ koeficientą prie x^8.

79. * Raskite visus racionaliuosius dėstinio $\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[9]{x}\right)^{21}$ narius.

80. Daugianario $(x+y)^n$ antrojo, trečiojo ir ketvirtojo narių koeficientai sudaro aritmetinę progresiją. Raskite *n*.

81. *Raskite visus racionaliuosius daugianario $\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt[9]{x}\right)^{20}$narius.

82. * Daugianario $(1+x)^n$ penktojo, šeštojo ir septintojo narių koeficientai sudaro aritmetinę progresiją. Raskite *n*.

II skyrius

TIKIMYBIŲ TEORIJOS PRADMENYS

Tikimybių teorija atsirado analizuojant azartiniuose lošimuose pasitaikančias situacijas, rengiant rekomendacijas kauliuko žaidėjams.

Italas Pačiolis (1445 – 1514) vienas pirmųjų pradėjo nagrinėti lošimo kauliukais dėsningumus. Nagrinėjant azartinius lošimus, į tikimybių teorijos kūrėjų gretas įsijungė prancūzai B. Paskalis (1623 – 1662), P. Ferma (1601 – 1665), olandas H. Hiuigensas (1629 – 1695).

Žymų vaidmenį, paverčiant tikimybių teoriją matematinių mokslu, suvaidino J. Bernulis (1654 – 1705), A. Muavras (1667 – 1754), P. Laplasas (1749 – 1827), K. Gausas (1777 – 1855), S. Puasonas (1781 – 1840), rusų matematikai P. Čebyšovas (1821 – 1894), A. Markovas (1856 – 1922), A. Liapunovas (1857 – 1918), A. Kolmogorovas (1903 – 1987).

Tikimybių teorijos kūrėjų gretose garbingą vietą užima ir lietuviai: J. Kubilius, V. Statulevičius, B. Grigelionis ir kiti Lietuvos matematikai.

1. Pradinės tikimybių teorijos sąvokos

1. Įvykis. Tikimybių teorijoje įvykiais vadinami bandymo arba stebėjimo rezultatai.

1 pavyzdys. Moneta metama vieną kartą – bandymas. Herbo ar skaičiaus pasirodymas – galimi jo įvykiai.

2 pavyzdys. Tikrinama detalės kokybė – bandymas. Detalė standartinė arba nestandartinė - galimi jo įvykiai.

2. Būtinasis įvykis. Įvykis, kuris atlikus bandymą, visada įvyksta, vadinamas būtinuoju įvykiu. Pavyzdžiui, jei dėžėje yra 5 balti rutuliai, tai įvykis – „ištrauktas iš dėžės rutulys – baltas“ – yra būtinasis įvykis.

3. Negalimasis įvykis. Jeigu atlikus bandymą įvykis niekada negali įvykti, tai jį vadiname negalimuoju įvykiu. Pavyzdžiui, metant lošimų kauliuką įvykis – „atsivertė 7 akutės“ yra negalimasis įvykis.

4. Atsitiktinis įvykis. Atsitiktiniu įvykiu vadiname kiekvieną įvykį, kris atliekant bandymą gali įvykti, bet gali ir neįvykti. Pavyzdžiui, atliekamas bandymas – metama moneta. Tai, kad atsivertė herbas, yra atsitiktinis įvykis, nes galėjo atsiversti ir skaičius.

Atsitiktiniai įvykiai žymimi raidėmis A, B, C ir t. t.

5. Nesutaikomi įvykiai. Du įvykiai vadinami nesutaikomais, jei kiekvieną kartą atlikus bandymą gali įvykti tik vienas iš jų. Pavyzdžiui, metant lošimų kauliuką, įvykiai A – „atsivertė 2 akutės“ ir B – „atsivertė 6 akutės“ yra nesutaikomi įvykiai. Įvykius A_1, A_2, ..., A_n vadiname poromis nesutaikomais, jei bet kurie du iš jų yra nesutaikomi.

6. Elementarusis įvykis. Kai kurie įvykiai susideda iš atskirų „smulkesnių“ įvykių. Tarkime, kad mus domina įvykis A – „atsivertė nelyginis akučių skaičius“. Šis įvykis įvyks, jei įvyks bent vienas iš šių įvykių:

E_1 – „atsivertė viena akutė“,

E_2 – „atsivertė trys akutės“,

E_3 – „atsivertė penkios akutės“.

Įvykiai E_1, E_2, E_3 yra neskaidomi į „smulkesnius“ įvykius ir yra nesutaikomi, t. y. negali įvykti kartu. Tokie neskaidomi įvykiai vadinami elementariaisiais įvykiais.

Bandymo visų elementariųjų įvykių visuma vadinama elementariųjų įvykių aibe.

Pavyzdžiui, bandymo – metamas lošimo kauliukas – elementariaisiais įvykiais laikysime šiuos šešis įvykius:

E_1 – „atsivertė 1 akutė“, E_2 – „atsivertė 2 akutės“,

E_3 – „atsivertė 3 akutės“, E_4 – „atsivertė 4 akutės“,

E_5 – „atsivertė 5 akutės“, E_6 – „atsivertė 6 akutės“.

Svarbu įsidėmėti, kad su bandymu susiję elementarieji įvykiai yra poromis nesutaikomi ir vienas iš jų yra būtinasis įvykis.

Elementarieji įvykiai, kuriems įvykstant įvyksta ir mus dominantis įvykis A, vadinami įvykiui A palankiais elementariaisiais įvykiais. Pavyzdžiui, jei mus domina įvykis A – „atsivertė nelyginis akučių skaičius“, tai palankūs įvykiui A yra elementarieji įvykiai E_1, E_3, E_5.

Uždaviniai

83. Kurie iš šių įvykių yra būtinieji:

A – „metus lošimo kauliuką, atsivertė mažiau negu 7 akutės“,

B – „metus lošimo kauliuką, atsivertė 5 akutės“,

C – „atsitiktinai pasirinktas dviženklis skaičius yra mažesnis už 100“,

D – „atsitiktinai pasirinktas dviženklis skaičius dalijasi iš 5“.

84. Nurodykite būtinuosius ir negalimuosius įvykius:

A – „vieną kartą metus lošimo kauliuką, atsivertė 7 akutės“,

B – „du kartus metus lošimo kauliuką, atsivertusių akučių skaičių suma ne didesnė už 12“,

C – „triženklis skaičius, parašytas skaitmenimis 1, 3, 7, dalijasi iš 5“,

D – „triženklis skaičius, parašytas skaitmenimis 1, 2, 6, dalijasi iš 9“.

85. Kurie iš šių įvykių yra negalimieji:

A – „po dviejų šūvių abu kartus pataikyta į taikinį“,

B – „po dviejų šūvių į taikinį pataikytą 3 kartus“,

C – „triženklis skaičius, sudarytas iš skaitmenų 1, 6, 9, dalijasi iš 4“,

D – „metus monetą atsivertė ir herbas, ir skaičius“.

86. Ar sutaikomi įvykiai *A* ir *B,* kai:

A – „atsitiktinai paimtas natūralusis skaičius nuo 1 ik 100 dalijasi iš 10“,

B – „atsitiktinai paimtas natūralusis skaičius nuo 1 ik 100 dalijasi iš 11“.

87. Dėžėje yra 4 rutuliai, pažymėti skaičiais 1, 2, 3, 4. Iš jos vienu metu ištraukiami 2 rutuliai:

1) užrašykite visus elementariuosius įvykius, susijusius su šiuo bandymu;

2) kurie elementarieji įvykiai palankūs įvykiui – „ištrauktų rutulių numeriai yra lyginiai skaičiai“;

3) kurie elementarieji įvykiai palankūs įvykiui – „ištrauktų rutulių numeriai yra nelyginiai skaičiai“?

2. Klasikinis įvykio tikimybės apibrėžimas

<u>1. Apibrėžimas</u>. Įvykio *A*, susijusio su bandymu, kurio rezultatai yra vienodai galimi, tikimybe vadiname elementariųjų įvykių, palankių *A*, ir visų elementariųjų įvykių skaičių santykį:

$$P(A) = \frac{m}{n}; \quad (1)$$

Čia $P(A)$ įvykio *A* tikimybė ir $0 \le m \le n$.

<u>2. Išvados iš apibrėžimo</u>:

1) būtino įvykio tikimybė lygi vienetui. Jei *A* būtinas įvykis, tai $m = n$, todėl

$$P(A) = \frac{n}{n} = 1;$$

2) negalimo įvykio tikimybė lygi nuliui. Negalimas įvykis neįvyksta nė viename bandyme, todėl $m = 0$, ir

$$P(A) = \frac{0}{n} = 0;$$

3) Atsitiktinio įvykio tikimybė yra teigiamas skaičius, mažesnis už vienetą. Atsitiktinis įvykis įvyksta ne visuose bandymo rezultatuose, todėl 0 < m < n. Padaliję šios nelygybės narius iš n, gauname $0 < \frac{m}{n} < 1$, todėl

$$0 < P(A) < 1.$$

3. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai.

Jei įsitikinome, kad visi bandymo rezultatai yra vienodai galimi, tai atsitiktinio įvykio tikimybę galima apskaičiuoti pagal (1) formulę.

1 pavyzdys. Metamas lošimo kauliukas. Kokia tikimybė, kad iškrito lyginis taškų skaičius?

Šiuo atveju n = 6, m = 3 (galėjo iškristi 2, 4 arba 6 taškai). Todėl $P(A) = \frac{3}{6}$ =0,5.

2 pavyzdys. Matematikos knygoje yra 300 puslapių. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai atversto puslapio numeris yra skaičius 25 kartotinis?

Šiuo atveju n = 300. Jei atversto puslapio skaičius yra 25 kartotinis, tai $1 < 25k \leq 300, \frac{1}{25} < k \leq 12, k \in N$. Vadinasi, m = 12. $P(A) = \frac{12}{300}$ =0,04.

3 pavyzdys. Iš dėžės, kurioje yra 5 brokuotos detalės ir 30 be defektų, atsitiktinai paimtos 3 detalės. Kokia tikimybė, kad visos 3 detalės be defektų?

3 detales iš 35 galima išrinkti C_{35}^3 būdų. 3 detales iš 30 nebrokuotų galima išrinkti C_{30}^3 būdų. Todėl, m = C_{30}^3, $n = C_{35}^3$ ir $P(A) = \frac{C_{30}^3}{C_{35}^3}$ ≈0,62.

Uždaviniai

88. Iš skaičių eilės nuo 1 iki 30 atsitiktinai išrinktas sveikasis skaičius. Kokia tikimybė, kad jis yra 30 daliklis?

89. Bilietai sunumeruoti nuo 1 iki 30. Atsitiktinai ištrauktas bilietas. Kokia tikimybė, kad ištraukto bilieto numeris yra 3 kartotinis?

90. Iš dėžės, kurioje yra 5 balti ir 4 raudoni rutuliai, atsitiktinai imamas vienas. Kokia tikimybė, kad paimtas raudonas rutulys?

91. Metami 2 lošimų kauliukai. Koks įvykis labiau tikėtinas: taškų suma lygi 11, ar taškų suma lygi 4?

92. Kokia tikimybė, kad iš naujo 1994 metų kalendoriaus atsitiktinai išplėštas lapelis bus trisdešimtosios dienos?

93. Kokia tikimybė, kad iš naujo 1994 metų kalendoriaus atsitiktinai išplėštas lapelis bus 28-sios dienos?

94. Kokia tikimybė, kad iš naujo 1994 metų kalendoriaus atsitiktinai išplėštame lapelyje esantis skaičius dalijasi iš 6?

95. Iš dėžės, kurioje yra 10 baltų ir 6 juodi rutuliai, atsitiktinai imami du rutuliai. Kokia tikimybė, kad abu rutuliai juodi?

96. Kortelėse surašyti sveikieji skaičiai nuo 1 iki 20 imtinai. Atsitiktinai ištrauktos 2 kortelės. Kokia tikimybė, kad parašytų skaičių suma lygi 10?

97. Darius, rinkdamas telefono numerį, pamiršo 2 paskutinius skaitmenis ir, žinodamas, kad tie skaitmenys yra skirtingi, surinko juos atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad telefono numeris surinktas teisingai?

98. Tarp 100 detalių 5 brokuotos. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimtos 3 detalės bus nebrokuotos?

99. Tvenkinyje 30 lydekų. Sugavo 5. Jas pažymėjo ir vės paleido. Antrą kartą sugavo 7 lydekas. Kokia tikimybė, kad tarp jų bus dvi pažymėtos lydekos?

100. Klasėje 13 mergaičių ir 12 berniukų. Reikia išrinkti 3 moksleivių delegaciją. Kokia tikimybė, kad į delegaciją pateks 2 mergaitės ir 1 berniukas?

101. Iš 36 kortų kaladės, kurioje yra 4 tūzai, atsitiktinai ištrauktos 3. Kokia tikimybė, kad tarp jų bus 2 tūzai?

102. * 36 kortų kaladę padalijome pusiau. Kokia tikimybė, kad kiekvienoje dalyje yra po 2 tūzus?

103. * 8 vietų eilėje atsitiktinai atsisėdo 8 matematikai. Kokia tikimybė, kad Salomėja, Elvyra ir Algis atsisės greta? (Tarp 8 matematikų bendravardžių nėra.)

104. Dėžėje 30 loterijos bilietų, tarp kurių 5 laimingi. Ištraukti 4 bilietai. Kokia tikimybė, kad 2 bilietai laimingi?

105. * Iš 36 kortų kaladės, kurioje yra 4 tūzai, atsitiktinai ištrauktos 5. Kokia tikimybė, kad tarp jų bus bent vienas tūzas?

106. * Knygų lentynoje atsitiktinai sudėtos 5 algebros ir 3 geometrijos knygos. Kokia tikimybė, kad vieno dalyko knygos sudėtos greta?

107. * Kokia tikimybė, kad atsitiktinai sustatę į eilę kubus, kurių sienose parašytos raidės a, a, a, k, k, v, gausime žodį „kakava“?

108. Futbolo turnyre dalyvauja 20 komandų. Jos burtų keliu suskirstytos į 2 pogrupius po 10 komandų. Kokia tikimybė, kad dvi stipriausios komandos bus viename pogrupyje?

109. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai sustatę į eilę kubus, kurių sienose parašytos raidės a, a, a, a, n, n, s, s, gausime žodį „ananasas“?

110. Iš žodžio „matematika“ raidžių pasirenkama raidė. Kokia tikimybė, kad:

a) pasirinkta raidė a?

b) pasirinkta balsė?

111. Saulius, rinkdamas telefono numerį, pamiršo du paskutinius skaitmenis ir , prisiminęs, kad šie skaitmenys nelyginiai ir skirtingi, surinko juos atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad telefono numeris surinktas teisingai?

112. Aštuoniose vienodose kortelėse parašyti skaičiai 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Atsitiktinai ištrauktos dvi kortelės. Kokia tikimybė, kad iš šių skaičių sudarytą trupmeną galima suprastinti?

113. Iš 10 loterijos bilietų, tarp kurių 2 laimingi, atsitiktinai ištraukti 5 bilietai. Kokia tikimybė, kad:

a) vienas bilietas laimingas?

b) du bilietai laimingi?

c) bent vienas bilietas laimingas?

114. Iš 60 klausimų, įeinančių į egzaminų bilietus, studentas išmoko 50. Kokia tikimybė, kad ištraukus bilietą, kuriame įrašyti du klausimai, abu išmokti?

115. * Iš 36 kortų kaladės, kurioje yra 4 karaliai, atsitiktinai ištrauktos 3 kortos. Kokia tikimybė, kad tarp jų bus vienas karalius?

116. Iš 10 detalių 3 detalės su defektais. Kokia tikimybė, kad tarp atsitiktinai pasirinktų 6 detalių 2 detalės bus su defektais?

117. Dėžėje yra 10 baltų rutulių ir 6 juodi rutuliai. Atsitiktinai ištraukti 2 rutuliai. Kokia tikimybė, kad abu rutuliai balti?

118. * Šachmatų turnyre dalyvauja 16 moksleivių, kurie burtų keli paskirstyti į du pogrupius po 8 šachmatininkus. Kokia tikimybė, kad:

a) du stipriausieji žaidėjai pateks į vieną pogrupį?

b) du stipriausieji žais skirtinguose pogrupiuose?

3. Priešingo įvykio tikimybė

<u>1. Apibrėžimas</u>. Įvykis, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai neįvyksta A, vadinamas įvykiui A priešingu įvykiu ir žymimas $\bar{A}$ (skaitome: „ne A“).

<u>1 pavyzdys</u>. Metama moneta. Jei įvykis A – „atsivertė herbas“, tai įvykis $\bar{A}$ – „atsivertė ne herbas, t. y. atsivertė skaičius“.

<u>2 pavyzdys</u>. Metamas lošimo kauliukas. Pažymėkime įvykį A – „iškrito 6 taškai“. Todėl įvykis $\bar{A}$ reiškia, kad iškrito ne šeši taškai, t. y., iškrito 1, 2, 3, 4 arba 5 taškai.

Sakykime, kad iš n galimų įvykių, yra m įvykiui A palankių elementariųjų įvykių. Tada įvykiui $\bar{A}$ yra $n - m$ palankių elementariųjų įvykių. Todėl

$$P(\bar{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A)$$

arba

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \quad (1)$$

Labai dažnai praktikoje, ieškant įvykio tikimybės, paprasčiau rasti priešingo įvykio tikimybę.

3 pavyzdys. Metame lošimo kauliuką. Kokia tikimybė, kad iškrito daugiau kaip vienas taškas?

Sprendimas. Įvykius A ir $\bar{A}$ galima taip nusakyti:

A – „iškrito daugiau kaip vienas taškas“,

$\bar{A}$ – „iškrito vienas taškas“.

Įvykiui $\bar{A}$ – palankus vienas elementarus įvykis, todėl $P(\bar{A}) = \frac{1}{6}$. Remiantis (1) formule, gauname

$$P(A) = 1 - \tfrac{1}{6} = \tfrac{5}{6}.$$

4 pavyzdys. Metamos dvi monetos. Kokia tikimybė, kad bent vieną kartą atsivers skaičius?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:

A – „bent vieną kartą atsivertė skaičius“,

$\bar{A}$ – „skaičius neatsivertė“.

Metant 2 monetas galimi elementarieji įvykiai: SS, HH, SH, HS.

Todėl $P(\bar{A}) = \frac{1}{4}$.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

4. Nesutaikomų įvykių sumos tikimybė

1. Įvykiai vadinami nesutaikomais, kai bet kurie du šių įvykių negali būti kartu viename bandymo rezultate.

Nesutaikomų įvykių pavyzdžiai:

1) iššovus vieną kartą, kulka pataikė į taikinį ir nepataikė;

2) metus lošimo kauliuką vieną kartą, iškrito lyginis ir nelyginis taškų skaičius.

2. Apibrėžimas. Įvykis, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta bent vienas iš įvykių A arba B, vadinamas jų suma. Žymima taip: $A + B$.

1 pavyzdys.

Įvykis A – „Jonas loterijoje laimėjo švarką“,

Įvykis B – „Jonas loterijoje laimėjo kepurę“.

Įvykis $A + B$ reiškia, kad laimėjo arba švarką, arba kepurę, arba ir švarką, ir kepurę.

2 pavyzdys. Sakykime, kad egzaminų bilietai sunumeruoti sveikaisiais skaičiais nuo 1 iki 30. Jeigu įvykis A – bilieto numeris – 7 kartotinis, o įvykis B – bilieto numeris yra 5 kartotinis, tai įvykis $A + B$ reiškia, kad bilieto numeris yra 5 arba 7 kartotinis. A ir B – nesutaikomi įvykiai, nes viename bandyme jie įvykti negali.

3 pavyzdys. Kokia tikimybė, kad antrame pavyzdyje nagrinėto bilieto numeris yra 5 ar 7 kartotinis (bilietas ištrauktas atsitiktinai).

$$P(A) = \frac{4}{30}; P(B) = \frac{6}{30}; P(A) + P(B) = \frac{4}{30} + \frac{6}{30} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

Įvykiai A ir B nesutaikomi, todėl įvykiui $A + B$ palankių rezultatų skaičius lygus 10. Vadinasi, $P(A + B) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ (2)

Palyginę (1) ir (2), matome, kad

$$P(A) + P(B) = P(A + B).$$

3. Teorema. Dviejų nesutaikomų įvykių sumos tikimybė yra lygi šių įvykių tikimybių sumai. $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Įrodymas. Tarkime, kad n – visų bandymo įvykių skaičius. m_1 – įvykiui A palankių įvykių skaičius, m_2 – įvykiui B palankių įvykių skaičius.

Kadangi A ir B nesutaikomi įvykiai, jie negali būti viename bandymo rezultate, todėl įvykis $A + B$ turi $m_1 + m_2$ palankių įvykių.

$$P(A) = \frac{m_1}{n}; P(B) = \frac{m_2}{n}; P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B).$$

Ši teorema yra teisinga n poromis nesutaikomų įvykių A_1, A_2, A_3, ..., A_n sumai, t.y.

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

1 išvada. Priešingų įvykių A ir $\bar{A}$ tikimybių suma lygi vienetui.

Iš tikrųjų, $P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$, nes A ir $\bar{A}$ nesutaikomi įvykiai. Įvykis $A + \bar{A}$ yra būtinasis, todėl $P(A + \bar{A}) = 1$. Vadinasi, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

2 išvada. Jei įvykiai A_1, A_2, A_3, ..., A_n sudaro pilną įvykių grupę, (poromis yra nesutaikomi, o suma – būtinasis įvykis), tai šių įvykių tikimybių suma lygi vienetui.

Remdamiesi teorema apie poromis nesutaikomų įvykių sumos tikimybę, turime

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

Kadangi $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$ yra būtinasis įvykis, tai

$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1$. Todėl ir $P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1$.

Uždaviniai

119. Dėžėje yra 4 spalvų rutuliai: 50 baltų, 20 žalių, 20 mėlynų, 10 raudonų. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai ištrauktas rutulys yra raudonas arba mėlynas?

Sprendimas. Įvykis A – „ištrauktas raudonas rutulys". $P(A) = \frac{10}{100} = 0{,}1$. Įvykis B – „ištrauktas mėlynas rutulys". $P(B) = \frac{20}{100} = 0{,}2$. Įvykis $A + B$ – „ištrauktas raudonas arba mėlynas rutulys". Įvykiai A ir B nesutaikomi, todėl $P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$.

120. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai surinkto telefono numerio paskutinis skaitmuo yra 7 arba 3 kartotinis?

121. Metami du lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad iškritusių taškų suma yra 2 arba 3?

122. Abiturientų, stojančių į universitetą, matematikos rašto darbai užšifruoti skaičiais nuo 1 iki 99 imtinai. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai parinkto darbo numeris yra 10 arba 11 kartotinis?

123. Knygoje 300 puslapių. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai atverstas puslapio numeris yra 17 arba 19 kartotinis?

124. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimtas natūralusis dviženklis skaičius bus 12 arba 13 kartotinis?

5. Nepriklausomų įvykių sandaugos tikimybė

1. Įvykis *A* vadinamas nepriklausomu nuo *B*, jeigu jo tikimybė nepriklauso nuo to, ar *B* įvyko, ar neįvyko.

2. Apibrėžimas. Įvykis, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta abu įvykiai *A* ir *B*, vadinamas jų sandauga.

Žymima taip: *AB*.

Pavyzdžiui, jeigu įvykis *A* – ištraukto bilieto numeris dalijasi iš 2, įvykis *B* – bilieto numeris dalijasi iš 5, tai įvykis *AB* reiškia, kad bilieto numeris dalijasi ir iš 2, ir iš 5.

3. Teorema. Dviejų nepriklausomų įvykių sandaugos tikimybė lygi tų įvykių tikimybių sandaugai:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Uždaviniai

125. Du šauliai, nepriklausomai vienas nuo kito, šauna po vieną kartą į tą patį taikinį. Pirmojo pataikymo tikimybė 0,6, antrojo – 0,8. Kokia tikimybė, kad pataikys abu?

Sprendimas.

Įvykis A – „pataikė pirmasis šaulys“, $P(A) = 0,6$;

Įvykis B – „pataikė antrasis šaulys“, $P(B) = 0,8$;

Įvykis AB – „pataikė abu šauliai“.

A ir B nepriklausomi įvykiai, todėl $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48$.

126. Pirmoje dėžėje yra 12 detalių, iš jų 5 nestandartinės. Antroje dėžėje yra 20 detalių, iš jų 4 nestandartinės. Iš kiekvienos dėžės atsitiktinai išimama viena detalė. Kokia tikimybė, kad abi detalės bus nestandartinės?

127. Metami du lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad viename iškris nelyginis taškų skaičius, o kitame 6 taškai?

128. Kambaryje nepriklausomai viena nuo kitos dega dvi lemputės. Tikimybė, kad valandos bėgyje neperdegs pirmoji lemputė lygi 0,9. O antroji – 0,7. Kokia tikimybė, kad valandos bėgyje neperdegs nė viena lemputė?

129. Moksleivis išmoko 20 iš 25 fizikos bilietų ir 20 iš 30 istorijos bilietų. Kokia tikimybė, kad išlaikys abu egzaminus?

130. Mestos 3 monetos. Kokia tikimybė, kad visose monetose iškris skaičius?

Pastabos.

1. Pasirenkant iš uždavinyno arba pačiam sudarinėjant uždavinius įvykių sumos teoremos taikymui, reikia įsitikinti, kad įvykiai yra nesutaikomi. Kai įvykiai A ir B sutaikomi, jų sumos tikimybė skaičiuojama pagal formulę

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Pavyzdys. Du šauliai nepriklausomai vienas nuo kito šauna į tą patį taikinį. Pirmojo pataikymo tikimybė lygi 0,9, antrojo – 0,8. Kokia tikimybė, kad į taikinį pataikys arba pirmasis, arba antrasis šaulys?

Sprendimas. Įvykis A – pataikė pirmasis šaulys.

Įvykis B – pataikė antrasis šaulys.

Įvykis $A + B$ – pataikė pirmasis arba antrasis šauliai.

A ir B sutaikomi įvykiai, todėl

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,9 + 0,8 - 0,9 \cdot 0,8 = 0,98.$$

Sutaikomų įvykių sumos tikimybės skaičiavimas neįeina į mokyklinę programą.

2. Renkantis uždavinius įvykių sandaugos teoremos taikymui, reikia įsitikinti, kad įvykiai yra nepriklausomi. Kai įvykiai A ir B priklausomi, jų sandaugos tikimybė apskaičiuojama pagal formulę

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B);$$

arba

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Čia $P_A(B)$, $P_B(A)$ – sąlyginės tikimybės.

Priklausomų įvykių sandaugos tikimybės skaičiavimas neįeina į mokyklinę programą.

6. Sąlyginė tikimybė.*Dviejų įvykių sandaugos tikimybė*

1. Sąlyginė tikimybė. Sąlyginės tikimybės sąvoką paaiškinsime pavyzdžiu.

Tarkime. Kad dėžutėje yra 5 balti ir 3 juodi rutuliai. Atsitiktinai vienas po kito išimami du rutuliai. Išnagrinėkime 2 įvykius:

A – „pirmasis rutulys baltas“,

B – „antrasis rutulys baltas“.

Pagal sąlygą $P(A) = \frac{5}{8}$. Dėžutėje liko 7 rutuliai, iš kurių tik 4 balti, todėl $P(B) = \frac{4}{7}$.

Tarkime, kad pirmas ištrauktas juodas rutulys. Tada $P(B) = \frac{5}{7}$.

Vadinasi, įvykio *B* tikimybė priklauso nuo to, ar įvyko, ar neįvyko įvykis *A*. Tokiu atveju sakome, kad įvykio *B* tikimybė priklauso nuo įvykio *A*, t. y., įvykio *B* tikimybė yra sąlyginė. Tokia tikimybė žymima $P_A(B)$.

2. Teorema. Sąlyginei tikimybei teisinga formulė

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0. \quad (1)$$

Įrodymas. Sakykime, kad *n* – visų elementariųjų įvykių skaičius, *k* – įvykiui *B* palankių įvykių skaičius, *m* – įvykiui *AB* palankių įvykių skaičius.

Tarkime, įvykis *B* įvyko. Tada iš anksčiau galimų *n* elementariųjų įvykių gali įvykti tik *k* elementariųjų įvykių, kurie palankūs įvykiui *B*. Todėl įvykiui *A* yra palankūs tik tie elementarieji įvykiai, kurie tuo pačiu metu yra palankūs ir įvykiui *B*. Vadinasi, įvykiui *A* palankūs tik tie elementarieji įvykiai, kurie palankūs įvykiui *AB*. Todėl

$$P_B(A) = \frac{m}{k} = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (1)$$

Analogiškai gausime ir įvykio *B* sąlyginės tikimybės, kai *A* yra įvykęs, formulę

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}, P(A) \neq 0. \quad (2)$$

3. Dviejų įvykių sandaugos tikimybė. (1) ir (2) formules galima užrašyti šitaip:

$$P(AB) = P(A)P_A(B),$$

$$P(AB) = P(B)P_B(A). \quad (3)$$

(3) formulės išreiškia įvykių sandaugos tikimybės sąryšį su tų įvykių tikimybėmis ir sąlyginėmis tikimybėmis.

Dviejų įvykių sandaugos tikimybė yra lygi vieno iš to įvykio tikimybei, padaugintai iš kito įvykio sąlyginės tikimybės, kai pirmasis įvykis įvyko.

Išvada. Jei įvykiai A ir B nepriklausomi, tai $P_A(B) = P(B)$, todėl

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(A) \cdot P(B),$$

t. y., dviejų nepriklausomų įvykių sandaugos tikimybė yra lygi tų įvykių tikimybių sandaugai.

1 pavyzdys. Dėžėje yra 5 balti ir 4 juodi rutuliai. Atsitiktinai vienas po kito išimami 2 rutuliai. Kokia tikimybė, kad abu rutuliai balti?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:

A – „pirmasis rutulys baltas“.

B – „antrasis rutulys baltas“.

AB – „abu rutuliai balti“.

$P(A) = \frac{5}{9}$, $P_A(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Įvykiai A ir B priklausomi, todėl

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}.$$

2 pavyzdys. Iš 32 kortų kaladės viena po kitos ištrauktos 2 kortos. Raskime tikimybes, kad:

a) ištraukti du tūzai,

b) ištrauktos dvi čirvų kortos,

c) ištrauktas karalius ir dama.

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:

a) A – pirmoji korta – tūzas, $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$;

B – antroji korta – tūzas, $P_A(B) = \frac{3}{31}$.

b) C – pirmoji korta – čirvas, $P(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$;

D – antroji korta – čirvas, $P_C(D) = \frac{7}{31}$.

c) E – pirmoji korta – karalius, $P(E) = \frac{1}{8}$;

F – antroji korta – dama, $P_E(F) = \frac{4}{31}$.

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{31} = \frac{3}{248};$$

$$P(CD) = P(C) \cdot P_C(D) = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{31} = \frac{7}{124};$$

$$P(EF) = P(E) \cdot P_E(F) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{31} = \frac{4}{248} = \frac{1}{62}.$$

7. Sutaikomų įvykių sumos tikimybė*

Du įvykiai vadinami sutaikomais, jei abiems įvykiams yra bent vienas palankus elementarusis įvykis.

Teorema. Dviejų sutaikomų įvykių sumos tikimybė yra lygi šių įvykių tikimybių sumai be tų įvykių sandaugos tikimybės.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Įrodymas. Sakykime, kad iš viso yra n elementariųjų įvykių, iš kurių įvykiui A palankūs m_1 įvykių, įvykiui B palankūs m_2 įvykiai ir įvykiui AB palankūs k elementariųjų įvykių.

Remiantis tikimybės apibrėžimu,

$$P(A) = \frac{m_1}{n}; \ P(B) = \frac{m_2}{n}; \ P(AB) = \frac{k}{n}.$$

Akivaizdu, kad įvykiui $A + B$ bus palankūs $m_1 + m_2 - k$ elementariųjų įvykių, todėl

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2 - k}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{k}{n} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

1 pavyzdys. Du šauliai nepriklausomai vienas nuo kito, šauna į tą patį taikinį. Pirmojo pataikymo tikimybė yra 0,9, antrojo – 0,8. Kokia tikimybė, kad į taikinį pataikys pirmas arba antras šaulys?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:

A – „pataikė pirmasis šaulys“,

B – „pataikė antrasis šaulys“.

Įvykiai A ir B sutaikomi, nes, atliekant bandymą, į taikinį gali pataikyti abu šauliai. Vadinasi, įvykis $A + B$ – „į takinį pataikė arba pirmasis, arba antrasis, arba abu šauliai“.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

$$P(A + B) = 0{,}9 + 0{,}8 - 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}98.$$

2 pavyzdys. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai pasirinktas dviženklis skaičius yra dalus iš 2, arba iš 5, arba iš 2 ir 5?

Sprendimas.

A – „dviženklis skaičius dalijasi iš 2“,

B – „dviženklis skaičius dalijasi iš 5“,

$A + B$ – „dviženklis skaičius dalijasi iš 2, arba iš 5, arba iš 2 ir 5“.

Kadangi įvykiai A ir B sutaikomi įvykiai, tai

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

$$P(A) = \frac{45}{90} = 0{,}5; \ P(B) = \frac{18}{90} = 0{,}2; \ P(AB) = \frac{9}{90} = 0{,}1.$$

Vadinasi, $P(A + B) = 0{,}5 + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}6$.

8. Bernulio bandymai*

Sakykime, daug kartų metamas kamuolys į krepšį. Šis bandymas turi dvi galimas baigtis: 1) į krepšį pataikyta; 2) į krepšį nepataikyta. Praktikoje dažnai turime situaciją, panašią į kamuolio metimą į krepšį, kai daug kartų kartojamas bandymas turi dvi galimas baigtis.

1. Bernulio bandymai. Bernulio bandymu vadinamas šias savybes turintis bandymas:

a) visi bandymai nepriklausomi, t. y. atliekant bandymą įvykio A tikimybė nepriklauso nuo to, ar įvyko, ar neįvyko nagrinėjamas įvykis kituose bandymuose;

b) kiekvienas bandymas turi dvi baigtis: A – įvyko, $\bar{A}$ – neįvyko.

c) stebimo įvykio A tikimybė kiekviename bandyme yra pastovi: $P(A) = p,$ o $P(\bar{A}) = 1 - p = q.$

1 pavyzdys. Moneta metama 5 kartus. Mus domina herbo pasirodymų skaičius. Tai Bernulio bandymas, kuriame stebimo įvykio *A* tikimybė $P(A) = 0{,}5$.

2 pavyzdys. Lošimo kauliukas metamas 5 kartus. Mus domina šešių akučių atsivertimas. Tai Bernulio bandymas, kuriame stebimo įvykio *A* tikimybė $P(A) = \frac{1}{6}$.

Išvesime formulė, pagal kurią galėsime apskaičiuoti keliuose iš *n* bandymų įvyko mus dominantis įvykis *A*.

2. Teorema. Tikimybė, kad Bernulio bandyme įvykis *A* įvyko *k* kartų iš *n* lygi

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \; (k = 1, 1, 2, ..., n)$$

Įrodymas. A_k – pažymėkime įvykį, kuriame laukiamas įvykis įvyko *k* kartų. Šį įvykį galima išreikšti nesutaikomų įvykių suma, kuriame kiekvienas dėmuo yra nepriklausomų įvykių *A* ir $\bar{A}$ sandauga. Kiekvienoje tokioje sandaugoje įvykis *A* paminėtas *k* kartų, o įvykis $\bar{A}$ – (*n* – *k*) kartų.

$$A_k = \underbrace{AA\ldots A}_{k}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-k} + \underbrace{AA\ldots A}_{k-1}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-k-1} + \cdots + \underbrace{AA\ldots A}_{n-k}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{k}$$

Šioje sumoje kiekvieno dėmens tikimybė viena ir ta pati ir lygi

$$\underbrace{pp\ldots p}_{k}\underbrace{qq\ldots q}_{n-k} = p^k q^{n-k}.$$

Lieka suskaičiuoti kiek dėmenų yra šioje sumoje. Jų bus tiek, kiek yra būdų parašyti *k* raidžių *A* *n* vietose, t. y. C_n^k. Todėl

$$P(A_k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Įvykio A_k tikimybę pažymėkime $P_n(k)$. Tai tikimybė, kad atlikus, n nepriklausomų bandymų, įvykis *A* įvyks lygiai *k* kartų, lygi

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (1)$$

Ši formulė vadinama Bernulio formule.

3 pavyzdys. Moneta metama 5 kartus. Raskime tikimybę, kad 3 kartus išsivertė herbas.

Sprendimas. Turime Bernulio bandymą, kai $n = 5$, $k = 3$. Tikimybė, kad metimo metu atsivertė herbas, lygi $p = \frac{1}{2}$. Remiantis Bernulio formule,

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^{5-3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}.$$

4 pavyzdys. Tikimybė, kad Arvydas kiekvienu metimu įmes kamuolį į krepšį, lygi 0,4. Ko labiau tikėtis: keturių pataikymų metus penkis kartus, ar 6 pataikymų metus aštuonis kartus (kamuolio metimai nepriklausomi)?

Sprendimas. Turime Bernulio bandymus.

Duota: $n_1 = 5$, $k_1 = 4$, $p = 0{,}4$;

Rasti: $P_5(4)$, $P_8(6)$.

Remiantis (1) formule, gauname:

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}4^4(1 - 0{,}4) = 5 \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6 = 0{,}0768.$$

$$P_8(6) = C_8^6 \cdot 0{,}4^6(1 - 0{,}4)^2 = 28 \cdot 0{,}4^6 \cdot 0{,}36 \approx 0{,}0413.$$

$$P_5(4) > P_8(6).$$

Vadinasi, labiau tikėtina, kad metus 5 kartus bus pataikyta 4 kartus, negu metus 8 kartus pataikyta 6 kartus.

9. Atsitiktiniai dydžiai

Atsitiktinis dydis yra viena svarbiausių tikimybių teorijos sąvokų.

Atsitiktinių dydžių vadiname bet kokį dydį, kuris po bandymo įgyja konkrečią, iš anksto nežinomą skaitinę reikšmę.

Atsitiktinių dydžių pavyzdžiai:

1) per parą mieste įvykusių autoavarijų skaičius;

2) per dieną sutiktų pažįstamų žmonių skaičius;

3) per krepšinio rungtynes komandos pelnytų taškų skaičius.

Norint apibūdinti atsitiktinį dydį, reikia nurodyti jo įgyjamas reikšmes ir tikimybes, su kuriomis tos reikšmės įgyjamos.

Atsitiktinį dydį žymėsime X, atsitiktinio dydžio įgyjamas reikšmes x_1, x_2, x_3, ..., x_n, o tų reikšmių atitinkamas tikimybes p_1, p_2, p_3, ..., p_n.

Pažymėkime n atsitiktinių įvykių.

Įvykis A_1 – atsitiktinis dydis X, įgijo reikšmę x_1 su tikimybe p_1.

Įvykis A_2 – atsitiktinis dydis X, įgijo reikšmę x_2 su tikimybe p_2.

...

Įvykis A_n – atsitiktinis dydis X, įgijo reikšmę x_n su tikimybe p_n.

Jei yra duotos visos atsitiktinio dydžio reikšmės ir tų reikšmių tikimybės, tai sakoma, kad yra duotas atsitiktinio dydžio *X* pasiskirstymo dėsnis, arba skirstinys.

Atsitiktinio dydžio *X* skirstinį patogu užrašyti tokia lentele:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Atlikus bandymą, atsitiktinis dydis *X* gali įgyti tik vieną kurią nors reikšmę, todėl įvykiai A_1, A_2, ..., A_n yra nesutaikomi. Be to, įvykis A_1+ A_2+ ...+ A_n yra būtinasis, nes vieną iš reikšmių x_1, x_2, x_3, ..., x_n *X* būtinai įgys. Būtinojo įvykio tikimybė lygi 1, todėl

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1.$$

Remiantis nesutaikomų įvykių sumos teorema

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1,$$

arba

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

1 pavyzdys. Atsitiktinis dydis *X* yra vieną kartą metus lošimo kauliuką, pasirodžiusių taškų skaičius. Užrašysime jo pasiskirstymo dėsnį.

Įvykis A_1 – iškrito vienas taškas $x_1 = 1,\ p_1 = \frac{1}{6}$.

Įvykis A_2 – iškrito du taškai $x_2 = 2,\ p_2 = \frac{1}{6}$.

...

Įvykis A_6 – iškrito šeši taškai $x_6 = 1,\ p_6 = \frac{1}{6}$.

Skirstinys užrašytas lentele atrodo taip:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Patikrinimas:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1.$$

2 pavyzdys. Loterijoje yra 1000 bilietų. 200 bilietų laimi po 1 Lt, 100 bilietų – po 5 Lt, 80 bilietų – po 20 Lt, 20 bilietų – po50 Lt. Laimėjimo dydis *X* yra atsitiktinis dydis. Užrašykime jo skirstinį.

Laimėjimų dydžiai:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 5,\ x_4 = 20,\ x_5 = 50.$$

Jų atitinkamos tikimybės yra

$$p_1 = \frac{600}{1000} = 0{,}6 \text{ (nes 600 bilietų be laimėjimo);}$$

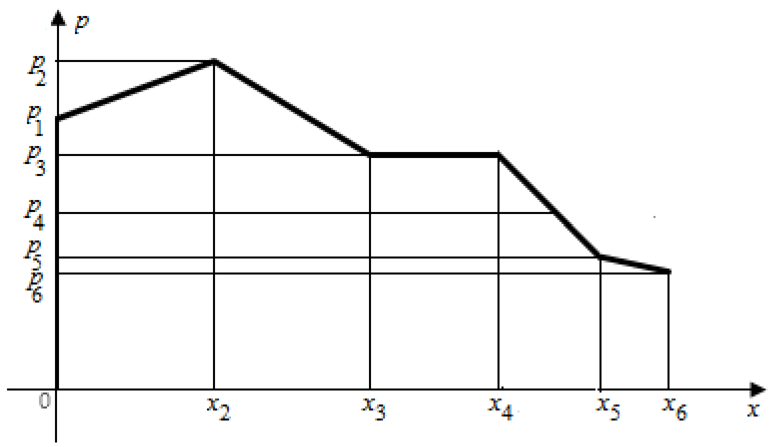
$$p_2 = \frac{200}{1000} = 0{,}2;\ p_4 = \frac{80}{1000} = 0{,}08;$$

$$p_3 = \frac{100}{1000} = 0{,}1;\ p_5 = \frac{20}{1000} = 0{,}02.$$

X	0	1	5	20	50
P	0,6	0,2	0,1	0,08	0,02

Patikrinimas: 0,6 + 0,2 + 0,1 + 0,08 + 0,02 = 1.

Atsitiktinio dydžio skirstinys gali būti pavaizduotas grafiškai. Tam *Ox* ašyje atidedame atsitiktinio dydžio reikšmes, o *Oy* ašyje – jų atitinkamas tikimybes. Laužtė, jungianti taškus $(x_i; p_i)$, vadinama pasiskirstymo daugiakampiu arba poligonu.



10. Atsitiktinio dydžio matematinė viltis (vidurkis)

Sakykime, kad yra duotas atsitiktinio dydžio *X* skirstinys užrašytas lentele

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Atsitiktinio dydžio reikšmių ir jų atitinkamų tikimybių sandaugų sumą vadiname atsitiktinio dydžio matematine viltimi, žymima taip: *MX*.

Vadinasi, $MX = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$.

Pavyzdys. Yra 100 loterijos bilietų. 30 bilietų laimi po 1 Lt, 10 bilietų – po 5 Lt, 2 bilietai – po 25 Lt, likusieji – be laimėjimo. Laimėjimo dydis *X* yra atsitiktinis dydis. Apskaičiuokime šio dydžio matematinę viltį ir koks laimėjimas vidutiniškai tenka vienam loterijos bilietui.

Laimėjimo dydis X yra atsitiktinis dydis, kuris įgyja reikšmes: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$, $x_4 = 25$, kurių atitinkamos tikimybės yra

$$p_1 = \frac{58}{100} = 0{,}58;\ p_2 = \frac{30}{100} = 0{,}3;\ p_3 = \frac{10}{100} = 0{,}1;\ p_4 = \frac{2}{100} = 0{,}02.$$

Pasiskirstymo dėsnis užrašytas lentele atrodo taip:

X	0	1	5	25
P	0,58	0,3	0,1	0,02

Matematinė viltis $MX = 0 \cdot 0{,}58 + 1 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}02 = 1{,}3$.

Nusipirkę visus 100 bilietų,

0 Lt laimėsime 58 kartus,

1 Lt laimėsime 30 kartų,

5 Lt laimėsime 10 kartų,

25 Lt laimėsime 2 kartus.

Iš viso laimėsime $0 \cdot 58 + 1 \cdot 30 + 5 \cdot 10 + 25 \cdot 2 = 130$ (Lt).

Laimėjimas, tenkantis vienam bilietui, bus 100 kartų mažesnis

$$\frac{0 \cdot 58 + 1 \cdot 30 + 5 \cdot 10 + 25 \cdot 2}{100} = 0 \cdot 0{,}58 + 1 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}02 = 1{,}3 = MX.$$

Vadinasi, laimėjimo dydžio X matematinė viltis yra skaičius, išreiškiantis vidutinį laimėjimo dydį, tenkantį vienam bilietui.

Matematinė viltis yra vidurkinė atsitiktinio dydžio reikšmė, jo reikšmių pasiskirstymo centras, todėl atsitiktinio dydžio matematinė viltis dar vadinama atsitiktinio dydžio vidurkiu.

Uždaviniai

131. Duoti atsitiktinių dydžių X ir Y pasiskirstymai.

X	1	2	3	4
P	0,4	0,3	0,2	0,1

Y	2	4	6	8	10
P	0,2	0,1	0,2	0,1	0,4

Raskite MX ir MY.

132. Atsitiktinis dydis X yra vieną kartą metus lošimo kauliuką pasirodžiusių taškų skaičius. Raskite MX.

133. Iš dėžės, kurioje yra 2 raudoni ir 3 juodi rutuliai, atsitiktinai ištraukiami du rutuliai. Raskite MX, kai X – ištrauktų raudonų rutulių skaičius.

11. Atsitiktinio dydžio dispersija

1 pavyzdys. Duoti atsitiktinių dydžių *X* ir *Y* pasiskirstymo dėsniai:

X	-2	-1	1	2
P	0,3	0,2	0,2	0,3

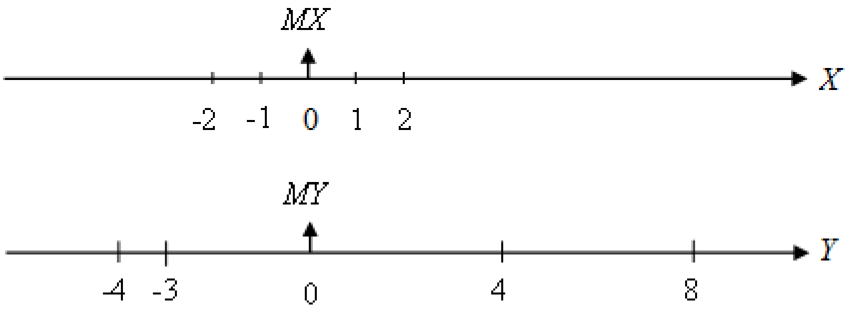
Y	-3	-2	4	8
P	0,2	0,5	0,2	0,1

Apskaičiuokime jų matematines viltis (vidurkius) *MX* ir *MY*.

$MX = -2\cdot0{,}3 - 1\cdot0{,}2 + 1\cdot0{,}2 + 2\cdot0{,}3 = 0$

$MY = -3\cdot0{,}2 - 2\cdot0{,}5 + 4\cdot0{,}2 + 8\cdot0{,}1 = 0$

Matome, kad nors atsitiktinių dydžių X ir Y pasiskirstymai skirtingi, tačiau jų matematinės viltys yra lygios.



1 pav.

1 pav. matome, kad *X* reikšmės yra arčiau ir kompaktiškiau išsidėsčiusios apie *MX*, negu dydžio *Y*. *Y* reikšmių išbarstymas yra didesnis, negu atsitiktinio dydžio *X*. Vadinasi, išsamesnei atsitiktinio dydžio charakteristikai nepakanka žinoti jo matematinę viltį (vidurkį).

Praktikoje svarbu, kaip atsitiktinio dydžio reikšmės išsiskleidusios apie matematinę viltį. Išsisklaidymo matas vadinamas dispersija.

Atsitiktinį dydį *X – MX* vadiname atsitiktinio dydžio *X* nuokrypiu nuo matematinės vilties *MX*.

Atsitiktinio dydžio $(X - MX)^2$ matematinę viltį vadiname atsitiktinio dydžio *X* dispersija ir žymime *DX*.

$$DX = M(X - MX)^2 \qquad (1)$$

Dispersija parodo, kaip atsitiktinio dydžio reikšmės yra išsibarsčiusios apie jo matematinę viltį. Jei *DX* mažas skaičius, tai *X* reikšmės artimos matematinei vilčiai *MX*. Jei *DX* – didelis skaičius, tai *X* reikšmės labai išsibarsčiusios *MX* atžvilgiu.

Atsitiktinio dydžio dispersiją galima apskaičiuoti pagal (1) formulę.

Dar patogiau skaičiuoti pagal (2) formulę, kurią pateikiame be įrodymo.

$$DX = MX^2 - (MX)^2 \qquad (2)$$

Dydis $\sigma = \sqrt{DX}$ vadinamas vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu.

2 pavyzdys. Duotas atsitiktinio dydžio *X* skirstinys.

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Apskaičiuokime *MX* ir *DX*.

$MX = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$; Remiantis (1) formule.

$DX = (X - MX)^2 = M(X-1)^2 = (0-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2-1)^2 \cdot \frac{1}{4} =$ $0{,}5$.

3 pavyzdys. Atsitiktinis dydis *X* yra vieną kartą metus lošimo kauliuką pasirodžiusių taškų skaičius. Apskaičiuokime jo dispersiją *DX*.

Atsitiktinio dydžio X skirstinys yra

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$MX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$$

$DX = M(X - MX)^2 = M(X - 3{,}5)^2 = (1-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} +$

$+(4-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (5-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6}$.

$DX \approx 2{,}917$.

Uždaviniai

Raskite atsitiktinių dydžių *X* ir *Y* matematinę viltį ir dispersiją, kai duotos jų pasiskirstymo lentelės.

134.

X	1	2	3
P	0,1	0,3	0,6

135.

X	-2	-1	0
P	0,6	0,3	0,1

136.

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

137.

Y	0	1	2	3
P	0,4	0,3	0,2	0,1

138.

X	4	6	7
P	0,7	0,2	0,1

139.

Y	-3	-2	0
P	0,2	0,4	0,4

140.

X	-1	0	1
P	0,3	0,4	0,3

141.

Y	-2	1	2	3
P	0,3	0,3	0,3	0,1

142.

X	5	7	10	15
P	0,2	0,5	0,2	0,1

143.

Y	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

III skyrius

MATEMATINĖS STATISTIKO PRADMENYS

1. Generalinė aibė ir imtis

Pagrindinės matematinės statistikos sąvokos yra generalinė aibė ir imtis. Panagrinėkime tokį pavyzdį. Automatinė linija per dieną pagamina 5000 apdailos plytelių, kurios turi būti nustatyto ilgio, pločio, storio. Reikia patikrinti, ar linija gamina kokybiškas detales, nustatyti, kokią produkcijos dalį sudaro nekokybiškos plytelės.

Geriausią informaciją turėtume patikrinę kiekvieną plytelę. Tačiau visoms išmatuoti reikės sugaišti daug laiko. Todėl tenka iš visų pagamintų plytelių atsitiktinai parinkti tam tikrą plytelių kiekį, pavyzdžiui 100, ir pagal jų kokybę spręsti apie visą produkciją.

Atsitiktinio dydžio galimų reikšmių visumą vadiname generaline aibe, o šios aibės elementų skaičių vadiname generalinės aibės tūriu. Tyrimui pasirinkta generalinės aibės dalis vadinama imtimi. Nagrinėtame pavyzdyje per dieną pagamintos plytelės – generalinė aibė, jos tūris lygus 5000. Patikrinimui parinktos detalės – imtis. Imties elementų skaičius vadinamas imties tūriu.

Sudarant imtį, jos elementus reikia parinkti taip, kad jų požymiai atitiktų generalinės aibės elementų savybes. Todėl generalinės aibės elementai pasirenkami atsitiktinai. Konkrečioje imtyje $x_1, x_2, x_3,..., x_n,$ jos elementai yra skaičiai, išreiškiantys tam tikrą nagrinėjamo objekto požymį. Imties elementai dar vadinami stebėjimo duomenimis.

2. Imties skaitinės charakteristikos

1 pavyzdys. Sakykime, kad atsitiktinai paimtų 5 detalių svoris gramais yra $x_1 = 10{,}2$; $x_2 = 10{,}3$; $x_3 = 10{,}2$; $x_4 = 10$; $x_5 = 10{,}4$.

Šiuos duomenis surašę didėjančia tvarka, gausime sutvarkytą imtį, kuri vadinama imties variacine eilute.

10; 10,2; 10,2; 10,3; 10,4.

2. Imties plotis. Imties pločiu vadinamas didžiausios ir mažiausios imties reikšmių skirtumas $x_n^* - x_1^*$.

1 pavyzdžio imties plotis 10,4 – 10 = 0,4.

3. Imties centras. Imties centru vadinamas didžiausios ir mažiausios imties reikšmių aritmetinis vidurkis. Jis žymimas raide c.

Pavyzdžiui, imties 1, 2, 5, 3, 7, 6 centras $c = \frac{1+7}{2} = 4$.

4. Mediana. Mediana vadinamas skaičius, dalijantis imties tūrį į dvi lygias dalis.

Pavyzdžiui, imties 1, ,5, 7, 9, 16 mediana lygi 7, o imties 2, 3, 4, 5, 6, 11 mediana lygi $\frac{4+5}{2} = 4{,}5$.

5. Dažnių lentelė. Stebėjimo duomenis patogu surašyti į lentelę, kurios pirmojoje eilutėje užrašome skirtingas variacinės eilutės reikšmes x_k, o antrojoje surašoma, kiek kartų ši reikšmė pasikartoja. Skaičius, parodantis kiek kartų elementas pasikartoja imtyje, vadinamas to elemento dažniu ir žymimas raide m_k.

2 pavyzdys. Marytė per pirmąjį trimestrą iš matematikos gavo tokius įvertinimus: 7, 10, 6, 8, 9, 8, 10, 9, 10, 8

Šią imtį užrašę dažnių lentelėje, gauname:

x_k	6	7	8	9	10
m_k	1	1	3	2	3

Elementų dažnių suma yra lygi imties tūriui: 1 + 1 + 3 + 2 + 3 = 10

Elemento dažnio m_k santykis su imties elementų skaičiumi n vadinamas santykiniu dažniu ir žymimas taip: p_k^*. Vadinasi,

$$p_k^* = \frac{m_k}{n}.$$

Lentelėje esančių elementų santykiniai dažniai yra: 0,1; 0,1; 0,3; 0,2; 0,3.
Santykinių dažnių suma lygi 1:
0,1 + 0,1 + 0,3 + 0,2 + 0,3 = 1

Dažnių lentelę galima pavaizduoti grafiškai. Tam abscisių ašyje atidedame imties reikšmes $x_1, x_2, \ldots, x_k$, o ordinačių ašyje – jų atitinkamus dažnius $m_1, m_2, \ldots, m_k$, (arba santykinius dažnius $p_1^*, p_2^*, \ldots p_k^*$). Lentelė, jungianti atidėtus taškus, vadinama poligonu.

3 pavyzdys. Tikrinant atsitiktinai parinktų detalių ilgį, gauti tokie matavimo rezultatai:

43, 39, 41, 40, 43, 41, 44, 42, 41, 41, 43, 42, 40, 42,
41, 42, 39, 42, 42, 40, 41, 43, 41, 39, 39, 40, 42, 41

Sudarykite imties variacinę eilutę, imtį užrašykite dažnių lentele. Raskite imties tūrį, plotį, didžiausiąją ir mažiausiąją imties reikšmes. Pavaizduokite dažnių lentelę grafiškai.
Sprendimas.

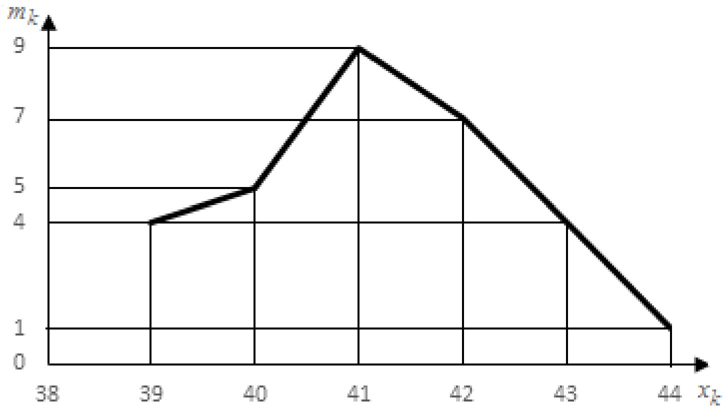
Imties variacinė eilutė tokia:
39, 39, 39, 39, 40, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 43, 44.

Dažnių lentelė

x_k	39	40	41	42	43	44
m_k	4	5	9	7	4	1

Imties tūris – 30. Didžiausioji imties reikšmė – 44, mažiausioji – 39.

Dažnių lentelės grafinis vaizdas (poligonas):



3. Stebėjimo duomenų grupavimas

Kai stebėjimo duomenų labai daug ir jie paprastai labai „negražūs“, skaičiavimams palengvinti stebėjimo duomenys paprastai apvalinami ir grupuojami. Intervalas, kuriame telpa stebėjimo duomenys $x_1, x_2,..., x_n$ paprastai skaidomas į vienodo ilgio dalinius intervalus. Kuo dalinio intervalo ilgis bus didesnis, tuo paprastesni skaičiavimai, bet tuo didesnė bus paklaida. Priešingai, kuo dalinio intervalo ilgis mažesnis, tuo skaičiavimai sudėtingesni, bet paklaida mažesnė.

Intervalo dažniu vadinamas imties reikšmių skaičius, patenkantis į šį intervalą. Intervalo dažnio ir imties tūrio santykis vadinamas intervalo santykiniu dažniu.

Sugrupuotų duomenų lentelė dar vadinama klasifikuota lentele.

1 pavyzdys. Tikrinant 20 karvių pieno riebumą (procentais), gauti tokie duomenys:

3,68 3,57 3,60 3,64 3,92

3,56 3,82 3,98 3,70 3,66

3,88 4,00 4,11 3,91 3,71

4,09 3,58 3,90 4,14 3,78

Paėmę dalinio intervalo ilgį lygų 0,1, suklasifikuosime imtį, užrašysime ją dažnių lentele. Nubraižysime histogramą – grafinį imties vaizdą.

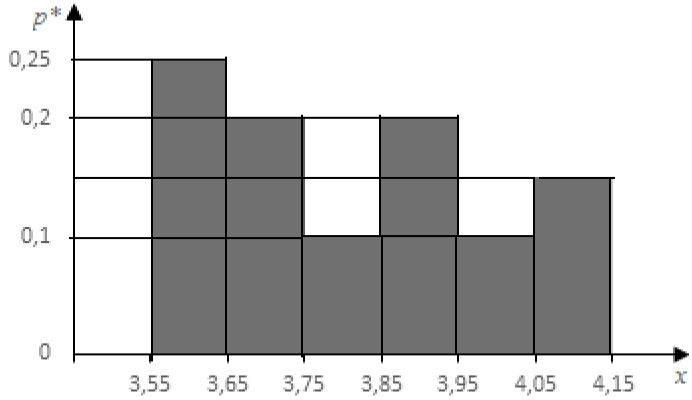
Sprendimas. Mažiausioji imties reikšmė – 3,56, didžiausioji – 4,14. Imties intervalas [3,59; 4,14] „blogai“ dalijasi į 0,1 ilgio intervalus, todėl imsime intervalą [3,55; 4,15].

x_k	[3,55; 3,65)	[3,65; 3,75)	[3,75; 3,85)	[3,85; 3,95)	[3,95; 4,05)	[4,05; 4,15]
m_k	5	4	2	4	2	3

Šioje lentelėje m_k – intervalo dažnis, t. y. imties elementų skaičius, patenkantis į duotąjį intervalą. Galima laikyti, kad reikšmės patekusios į kokį tai intervalą, yra lygios to intervalo vidurio reikšmei. Imties tūris lygus 20, intervalų santykiniai dažniai yra 0,25; 0,2; 0,1; 0,2; 0,1; 0,15. Šiuos duomenis surašę į lentelę, gauname klasifikuotos imties dažnių lentelę

x_k	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1
m	5	4	2	4	2	3
p_k^*	0,25	0,2	0,1	0,2	0,1	0,15

Norėdami nubraižyti grafinį imties vaizdą, 0x ašyje atidedame intervalus, o 0y ašyje – santykinius dažnius p_k^*. Po to virš kiekvieno intervalo braižomas stulpelis, kurio aukštis lygus santykiniam dažniui $p_k^* = \frac{m_k}{n}$. Gautoji laiptuota figūra, sudaryta iš stačiakampių, vadinama histograma. Histograma rodo, kokiomis proporcijomis duomenys pasiskirstę pasirinktuose intervaluose.



4. Imties vidurkis

Imties pasiskirstymo dėsniui apibūdinti vartojama skaitinė charakteristika – imties vidurkis.

Imties $x_1, x_2,..., x_n$ vidurkiu vadinamas aritmetinis vidurkis

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \qquad (1)$$

Sugrupuotos imties vidurkis apskaičiuojamas pagal formulę

$$\bar{x} = \frac{x_1 m_1+x_2 m_2+...+x_k m_k}{n} \qquad (2)$$

<u>1 pavyzdys</u>. Apskaičiuosime imties 3, 4, 5, 4, 6, 5, 8, 9, 8, 9 vidurkį.

Remiantis (1) formule, gauname

$$\bar{x} = \frac{3+4+5+4+6+5+8+9+8+9}{10} = 6{,}1.$$

<u>2 pavyzdys</u>. Sakykime, kad imtis užrašyta dažnių lentele

x_k	3	4	5	6	7	8	9
m_k	1	2	4	6	4	2	1

Remiantis (2) formule, šios imties vidurkis lygus

$$\bar{x} = \frac{3\cdot 1+4\cdot 2+5\cdot 4+6\cdot 6+7\cdot 4+8\cdot 2+9\cdot 1}{20} = 6.$$

5. Imties dispersija

Kita imties $x_1, x_2,..., x_n$ skaitinė charakteristika yra imties dispersija, kuri žymima s^2 ir apskaičiuojama pagal formulę

$$s^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n} \qquad (3)$$

Šioje formulėje $\bar{x}$ – imties vidurkis.

<u>1 pavyzdys</u>. Apskaičiuokime imties 2, 6, 4, 6, 5, 2, 1, 2, 3, 7 dispersiją.

Iš pradžių apskaičiuojame imties vidurkį

$$\bar{x} = \frac{2+6+4+6+5+2+1+2+3+7}{10} = 3{,}8.$$

Remiantis (3) formule, šios imties dispersija

$$s^2 = \frac{(2-3{,}8)^2+(6-3{,}8)^2+(4-3{,}8)^2+(6-3{,}8)^2+(5-3{,}8)^2+(2-3{,}8)^2+(1-3{,}8)^2+(2-3{,}8)^2+(3-3{,}8)^2+(7-3{,}8)^2}{10} =$$

= 3,96

Sugrupuotų duomenų imties dispersija apskaičiuojama pagal formulę

$$s^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2 m_1+(x_2-\bar{x})^2 m_2+\cdots+(x_n-\bar{x}) {m_k}^2}{n} \qquad (4)$$

2 pavyzdys. Sakykime, kad žinoma imties dydžių lentelė

x_k	2	3	4	5	6	8	9	10
m_k	2	3	2	2	1	5	2	3

Apskaičiuosime šios imties vidurkį ir dispersiją.

Remiantis (2) formule, imties vidurkis

$$\bar{x} = \frac{2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 4\cdot 2 + 5\cdot 2 + 6\cdot 1 + 8\cdot 5 + 9\cdot 2 + 10\cdot 3}{20} = 5{,}95.$$

Remiantis(4) formule, imties dispersija

$$s^2 = \frac{(2-5{,}95)^2\cdot 2+(3-5{,}95)^2\cdot 3+(4-5{,}95)^2\cdot 2+(5-5{,}95)^2\cdot 2+(6-5{,}95)^2+(8-5{,}95)^2\cdot 5+(9-5{,}95)^2\cdot 2+(10-5{,}95)^2\cdot 3}{20} \approx$$

$\approx 35{,}40$.

Skaičiuojant dispersiją remiantis (4) formule, susidaro daug tarpinių veiksmų, todėl dispersiją patogu skaičiuoti taikant tokią formulę

$$s^2 = x_1^2 p_1^* + x_2^2 p_2^* + \cdots + x_k^2 p_k^* - x^{-2}. \quad (5)$$

Šioje formulėje $\bar{x}$ – imties vidurkis, o $p_1^*, p_2^*, \ldots, p_k^*$ - imties elementų santykiniai dažniai.

Pavyzdžiui, 2 pavyzdžio imties elementų santykiniai dažniai tokie:

$$\frac{2}{20} = 0{,}1, \frac{3}{20} = 0{,}15, \frac{2}{20} = 0{,}1, \frac{2}{20} = 0{,}1,$$

$$\frac{1}{20} = 0{,}05, \frac{5}{20} = 0{,}25, \frac{2}{20} = 0{,}1, \frac{3}{20} = 0{,}15,$$

todėl, remiantis(5) formule, imties dispersija lygi

$$s^2 = 2^2\cdot 0{,}1 + 3^2\cdot 0{,}15 + 4^2\cdot 0{,}1 + 5^2\cdot 0{,}1 + 6^2\cdot 0{,}05 + 8^2\cdot 0{,}25 + 9^2\cdot 0{,}1 + 10^2\cdot 0{,}15 -$$
$$-5{,}95^2 = 119{,}65 - 5{,}95^2 \approx 35{,}40.$$

Imties dispersija nusako stebėjimo duomenų išsibarstymo dydį apie konkretų tašką – imties vidurkį.

Imties $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu vadinama kvadratinė šaknis iš imties dispersijos. Jis žymimas raide s,

$$s = \sqrt{s^2}.$$

Pavyzdžiui, 2 pavyzdžio imties kvadratinis nuokrypis

$$s = \sqrt{35{,}40} \approx 5{,}95.$$

3 pavyzdys. Atrankinėse šaudymo varžybose du moksleiviai pasiekė tokius rezultatus:

Andrius – 4, 5, 7, 6, 5, 7, 8, 7, 6, 8, 6, 7, 6, 8, 6, 8, 9, 8, 10, 9.

Dainius – 2, 4, 6, 4, 6, 7, 6, 8, 6, 7, 9, 6, 7, 8, 7, 9, 10, 8, 10, 10.

Parašykite imčių variacines eilutes, raskite imčių pločius ir tūrius. Apskaičiuokite imčių vidurkius, dispersijas, vidutinius kvadratinius nuokrypius. Kuris iš moksleivių geresnis šaulys?

Sprendimas.

Andrius: imties tūris n = 20, imties plotis – 6; imties variacinė eilutė – 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 10.

Dažnių lentelė

x_k	4	5	6	7	8	9	10	∑
m_k	1	2	5	4	5	2	1	20
p_k^*	0,05	0,1	0,25	0,2	0,25	0,1	0,05	1

$\bar{x} = x_1 p_1^* + x_2 p_2^* + \cdots + x_k p_k^*;$

$\bar{x} = 4 \cdot 0{,}05 + 5 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}25 + 7 \cdot 0{,}2 + 8 \cdot 0{,}25 + 9 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}05 = 7;$

$s_1^2 = x_1^2 p_1^* + x_2^2 p_2^* + \cdots + x_k^2 p_k^* - x^{-2};$

$s_1^2 = 4^2 \cdot 0{,}05 + 5^2 \cdot 0{,}1 + 6^2 \cdot 0{,}25 + 7^2 \cdot 0{,}2 + 8^2 \cdot 0{,}25 + 9^2 \cdot 0{,}1 + 10^2 \cdot 0{,}05 - 7^2 =$

= 1,8.

$s_1 \approx 1{,}34$.

Dainius: imties tūris n = 20, imties plotis – 8; imties variacinė eilutė – 2, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 10.

x_k	2	4	6	7	8	9	10	∑
m_k	1	2	5	4	3	2	3	20
p_k^*	0,05	0,1	0,25	0,2	0,15	0,1	0,15	1

$\bar{x} = 2 \cdot 0{,}05 + 4 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}25 + 7 \cdot 0{,}2 + 8 \cdot 0{,}15 + 9 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}15 = 7$

$s_2^2 = 2^2 \cdot 0{,}05 + 4^2 \cdot 0{,}1 + 6^2 \cdot 0{,}25 + 7^2 \cdot 0{,}2 + 8^2 \cdot 0{,}15 + 9^2 \cdot 0{,}1 + 10^2 \cdot 0{,}15 - 7^2 =$

= 4,3.

$s_1 \approx 2{,}07$.

Išvada: Andrius geresnis šaulys negu Dainius.

6. Įvykio tikimybės radimas imties metodu. Įvykio dažnis

Sakykime, kad n – bandymų skaičius. Kiekvieno bandymo metu įvykis A įvyko arba neįvyko. k – skaičius tų bandymų, kuriuose A – įvyko. Santykis $\frac{k}{n}$ vadinamas įvyko A statistiniu dažniu ir žymimas

$$P_k\{A\} = \frac{k}{n}.$$

Indeksas k pabrėžia, jog statistinis dažnis priklauso nuo bandymų skaičiaus. Esant pakankamai didelėms k reikšmėms

$$P(A) \approx P_k\{A\}.$$

Šią apytiksle lygybe pagrindžiamas didžiųjų skaičių dėsnis, kurį atskleidė J. Bernulis. Didžiųjų skaičių dėsnio esmė tokia:

<u>esant pakankamai dideliam nepriklausomų bandymų skaičiui, laukiamo įvykio statistinis dažnis kiek norima mažai skiriasi nuo įvykio tikimybės atskiro bandymo atveju</u>.

Uždaviniai

144. Raskite imties 3, 4, 5, 4, 6, 5, 8, 9, 8, 9 imties vidurkį, dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį.

145. Moksleivis per metus gavo tokius matematikos įvertinimus: 6,7, 5, 3, 4, 7, 6, 6, 5, 6, 5, 4, 7, 8, 9, 8, 6, 7, 6, 5.

Užrašykite imtį dažnių lentele ir apskaičiuokite imties vidurkį, dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį.

146. Šaudydamas į taikinį Jonas pasiekė tokius rezultatus: 2, 4, 5, 3, 6, 8, 9, 4, 9, 8, 5, 8, 2, 3, 8, 3, 10, 8, 10, 10. Užrašykite imtį dažnių lentele, raskite imties plotį. Apskaičiuokite imties vidurkį, dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį.

147. 100 kartų matuojant atstumą, gautieji rezultatai surašyti lentelėje

x_k	[80; 110)	[110; 140)	[140; 170)	[170; 200)	[200; 230)	[230; 260)	[260; 290)	[290; 300]
m_k	2	5	16	24	28	18	6	1

Raskite santykinius dažnius, imties vidurkį, dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį.

ATSAKYMAI
I skyrius

KOMBINATORIKA

1. 9. **2.** 30. **3.** 90. **4.** 600. **5.** 60. **6.** 9·9·8=648 **7.** 6! **8.** A_{20}^2. **9.** A_{12}^6. **10.** A_{25}^2. **11.** $0{,}5A_{20}^2$. **12.** A_5^3. **13.** A_7^3. **14.** A_4^3. **15.** $A_5^1 + A_5^2 + A_5^3 + A_5^4 + A_5^5 = 325$. **16.** $A_5^3 - A_4^2$. **17.** Sprendimas. Penkiaženklių natūraliųjų skaičių yra $A_5^5 - A_4^4 = 96$, keturženklių – $A_5^4 - A_4^3 = 96$, triženklių – $A_5^3 - A_4^2 = 48$, dviženklių - $A_5^2 - A_4^1 = 16$, vienaženklių – 4. Iš viso 260. **18.** $3A_4^2$. **19.** 12; 12. **20*.** Sprendimas. Kiekvieną skaitmenį kiekviename skyriuje galima parašyti $P_2 = 2$ kartus. Todėl, sudėję vienetus gauname 2(2 + 3 + 5) = 20, sudėję dešimtis, gauname 200, sudėję šimtus, gauname 2000; 2000 + 200 + 20 = 2220. **21.** 4. **22.** 8; 9; 10. **23.** 256. **24.** 1; 2; 3. **25.** a) 4; b) 2. **26.** a) 5; b) 15. **27.** a) 2652; b) 35; c) 40320. **28.** a) 7; b) 5; c) 3; d) 6. **29.** 5! **30.** 6! **31.** 10! **32.** $P_4 4!$ **33.** $P_{10} - P_9$. **34.** $a)\ P_5;\ b)\ P_4$. **35.** 2! 5! · 6!. **36.** 3! 5! · 2! **37.** k(k+1). **38.** 10. **39.** a) 18; b) 190; c) 6. **40.** a) 5; b) 14; c) 17. **41.** a) 5; 6; 7; 8; b) 5; 6; 7; c) $1 \le x \le 9$, $x \in N$. **42.** (12; 5). **43.** C_{20}^2. **44.** C_{12}^2. **45.** 21. **46.** C_{10}^3. **47.** $C_{10}^2 - 10$. **48*.** Sprendimas. Dvi keturkampio įstrižainės susikerta viename taške. Vadinasi, yra tiek įstrižainių susikirtimo taškų, kiek galima sudaryti keturkampių, t. y. C_{10}^4=210. **49.** $C_5^3 \cdot C_4^3$. **50.** $C_7^3 \cdot C_5^3$. **51.** $C_5^2 \cdot C_{45}^5$. **52.** $C_{20}^5 - C_{17}^5$. **53.** $C_8^2 \cdot C_{12}^3$. **54.** $C_4^2 \cdot C_{32}^3$. **55.** $C_{36}^5 - C_{32}^5 - C_4^1 \cdot C_{32}^4$. **56.** $C_{20}^2 \cdot C_{25}^3$. **57.** $C_n^2 - C_k^2 + 1$. **58*.** Sprendimas. Iš 10 žmonių 5 žmonių komisiją galima sudaryti C_{10}^5 būdu. Iš šio skaičiaus reikia atimti skaičių komisijų, kuriose nėra nė vieno deputato, t. y. C_8^5. Gauname $C_{10}^5 - C_8^5 = 196$. **59.** $\frac{6!}{3!\cdot 2!} = 60$. **60.** $\frac{6!}{2!\cdot 2!} = 180$. **61.** 4! 5! · 2. **62.** 12. **63.** 5^4=625. **64.** 3^5. **65.** 2^{10}. **66.** 2^8. **67.** 5^6. **68.** a) 66; b) 13; c) 1105. **69.** $\bar{C}_5^{20} = C_{24}^{20}$. **70.** $\bar{C}_{\mathbf{10}}^{\mathbf{12}} = C_{21}^{12}$. **71.** $\bar{C}_{10}^{15} = C_{24}^{15}$. **72.** $-2099520x^3$. **73.** 84a. **74.** a) 15; b) 495. **75.** 10. **76.** 1120. **77.** $a)\ 2^{-100}c_{100}^{50};\ b)\ \frac{4}{3}(\frac{9}{10})^{12}$. **78.** 378. **79.** $-C_{21}^9 x^3$. **80.** 7. **81**. $C_{20}^8 x^3$. **82.** 7; 14

II skyrius

TIKIMYBIŲ TEORIJOS PRADMENYS

83. *A* ir *C*. **84.** Negalimieji įvykiai – *A* ir *C*. Būtinieji – *D*, *B*. **85.** Negalimieji įvykiai – *B* ir *D*. **86.** Ne. **88.** $\frac{8}{30}$. **89.** $\frac{10}{30}$. **90.** $\frac{4}{9}$. **91.** $P(A) = \frac{2}{36}; P(B) = \frac{3}{36}$. **92.** $\frac{11}{365}$. **93.** $\frac{12}{365}$. **94.** $\frac{59}{365}$. **95.** $\frac{C_6^2}{C_{16}^2}$. **96.** $\frac{4}{C_{20}^2}$. **97.** $\frac{1}{A_{10}^2}$. **98.** $\frac{C_{95}^3}{C_{100}^3}$. **99.** $\frac{C_5^2 \cdot C_{25}^5}{C_{30}^7}$. **100.** $\frac{C_{13}^2 \cdot C_{12}^1}{C_{25}^3}$. **101.** $\frac{C_4^2 \cdot C_{32}^1}{C_{36}^3}$. **102.** $\frac{0{,}5C_4^2 \cdot C_{32}^{16}}{C_{36}^{18}}$. **103.** $\frac{5!3!\cdot 6}{8!}$. **104.** $\frac{C_5^2 \cdot C_{25}^2}{C_{30}^4}$. **105.** $\frac{C_{36}^5 - C_{32}^5}{C_{36}^5}$. **106.** $\frac{3!5!\cdot 2}{8!}$. **107.** $\frac{3!2!}{6!}$. **108.** $\frac{2C_{18}^8}{C_{20}^{10}}$. **109.** $\frac{4!2!2!}{8!}$. **110.** a) 0,3; b) 0,5. **111.** $\frac{1}{A_5^2}$.

112. $\frac{C_5^2}{C_8^2}$. **113.** $a)\ \frac{5}{9}; b)\ \frac{2}{9}; c)\ \frac{7}{9}$. **114.** $\frac{C_{50}^2}{C_{60}^2}$. **115.** $\frac{C_4^1 \cdot C_{32}^2}{C_{36}^3}$. **116.** $\frac{C_3^2 \cdot C_7^4}{C_{10}^6}$. **117.** $\frac{C_{10}^2}{C_{16}^2}$. **118.** $a)\ \frac{2C_{16}^4}{C_{16}^8} = \frac{7}{15}$; $b)\ \frac{C_2^1 \cdot C_{14}^7}{C_{16}^8} = \frac{8}{15}$. **119.** 0,3. **120.** 0,4. **121.** $\frac{1}{12}$. **122.** $\frac{2}{11}$. **123.** $\frac{8}{75}$. **124.** $\frac{1}{6}$. **125.** 0,48. **126.** $\frac{1}{12}$. **127.** $\frac{1}{12}$. **128.** 0,63. **129.** $\frac{8}{15}$. **130.** $\frac{1}{8}$. **131.** *MX* = 2; *MY* = 6,8. **132.** 3,5. **133.** 0,8. **134.** *MX* = 25; *DX* = 0,45. **135.** *MY* = -1,5; *DY* = 0,45. **136.** *MX* = 1; *DX* = 0,5. **137.** *MY* = 1; *DY* = 1. **138.** *MX* = = 4,7; *DX* = 1,21. **139.** *MY* = -1,4; *DY* = 1,44. **140.** *MX* = 0; *DX* = 0,6. **141.** *MY* = 0,6; *DY* = = 3,24. **142.** *MX* = 8; *DX* = 8. **143.** *MY* = 0,1; *DY* = 1,29.

III skyrius

MATEMATINĖS STATISTIKOS PRADMENYS

144. $\bar{x} = 6{,}1;\ s^2 = 4{,}49; s \approx 2{,}12$. **145.** Imties tūris n = 20. Dažnių lentelė

x_k	3	4	5	6	7	8	9
m_n	1	2	4	6	4	2	1
p_k^*	0,05	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,05

$n = 20;\ \bar{x} = 6;\ s^2 = 2{,}1; s = 1{,}45.$

146. Dažnių lentelė

x_k	2	3	4	5	6	8	9	10
m_n	2	3	2	2	1	5	2	3
p_k^*	0,1	0,15	0,1	0,1	0,05	0,25	0,1	0,15

Imties plotis 8. $\bar{x} = 5{,}95;\ s^2 = 35{,}40; s = 5{,}95.$

147. Santykiniai dažniai: 0,02; 0,05; 0,16; 0,24; 0,28; 0,18; 0,06; 0,01.
$\bar{x} = 201{,}20;\ s^2 = 1753{,}56; s \approx 41{,}88.$

Lietuvos matematikos mokytojų asociacija

Ričardas Razmas

KOMBINATORIKOS, TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR MATEMATINĖS STATISTIKOS PRADMENYS

Recenzentai: S. Čirba, A. Skūpas
Atsakingoji redaktorė S. Tauraitė
Redaktorė R. Barysienė

Pasirašyta spausdinti 1994. 04. 11 60 · 84/16. Popierius rašomasis. Sąl. sp. l. apsk. leid. l. Tiražas 1000 egz. Užs. Nr. 81

Išleido Lietuvos matematikos mokytojų asociacija
Išspausdino LMKI rotaprintas. 2057 Vilnius, Didlaukio 82.