Lietuvos matematikos mokytojų asociacija

KOMPLEKSINIS MATEMATIKOS KURSO SISTEMINIMAS

(Darbo patirtis)

Vilnius, 1993

Autorė – Onutė JABLONSKIENĖ, Vilniaus 7-osios vidurinės mokyklos mokytoja ekspertė

Recenzentai – Milda VOSYLIENĖ, LMKI katedros vedėja, doc.,

Juozas MAČERNIS, Vilniaus 23-osios vidurinės mokyklos mokytojos ekspertas,

Skaitmeninę vadovėlio versiją paruošė:

Loreta Pilipauskienė, Vilniaus Baltupių progimnazijos matematikos vyresnioji mokytoja;

Oksana Okolovič, Vilniaus Simono Stanevičiaus progimnazijos matematikos mokytoja-metodininkė;

Leidinėlis „Kompleksnis matematikos kurso sisteminimas” – tai referatas, kurį esu skaičiusi ir Respublikiniuose, ir Sąjunginiuose pedagoginiuose skaitymuose 1988 m. Tai mano darbo patirtis ruošiant mokinius tiek brandos, tiek stojamiesiems egzaminams. Tokia darbo metodika man palengvino sėkmingai paruošti mokinius egzaminams. Tai joks receptas tvirtoms matematikos žinioms įgyti, o tik darbo patirtis. Skiriu ją Respublikos mokytojams ir būsiu laiminga, jei ja pasinaudos bent pradedantieji mokytojai.

Autorė

Organizuojant baigiamąjį kartojimą 10–12 klasėse, mano manymu, svarbiausias mokytojo uždavinys – pasiekti, kad kartojimas nebūtų vien paprastas, primityvus išeitos medžiagos atgaminimas ir įtvirtinimas. Jei kartojame neapgalvotai, parinkdami uždavinius, kuriuos galima išspręsti vienos siauros temos žiniomis, panaudojus tam tikrą algoritmą, neišryškiname sistemos, neišskiriame sprendimo pagrindinių akcentų, tai tokiomis pamokomis sukeliame mokiniams nuobodulį, neugdome jų kūrybinių sugebėjimų ir, kol kartojame logaritmus, užmirštame trigonometriją, progresiją, išvestines, integralą ir t.t.

Taigi kursą kartojame 19–20 pamokų, o egzaminų laukiame su baime. Antra vertus, kartojimas, organizuojamas pateikiant vadovėlio gale esančius uždavinius, nejungiančius kelių temų kompleksiškai, mano giliu įsitikinimu, nėra kūrybinis darbas. Neugdydami mokykloje kūrybiškumo, stokosime kūrybiškai dirbančių inžinierių, darbininkų ir net mokslinių darbuotojų. Trečia, esu tikra, kad geras kurso kartojimo organizavimas – tai pirmiausia kūrybinis mokytojo darbas: tai ir planavimas, ir mokomasis procesas. Kartojimo pamokose labai svarbu sumaniai vadovauti mokiniams, neužgožti jų savarankiškumo, kūrybinio polėkio, iniciatyvos.

Visam gyvenimui iš mano pedagoginės praktikos išliko atmintyje įvykis, privertęs giliai susimąstyti, persiorganizuoti pedagoginiame darbe. 1974 metais, dėstydama penktoje klasėje, „Kvanto“ žurnalo skyrelyje „Kvantas mažiesiems“ radau uždavinį: „Iš negyvenamos salos išplaukė valtis, kurios pagaminimui Robinzonas paaukojo 18 metų. Ant jo peties tupėjo papūga, ir štai ką ji įvairiais gyvenimo momentais kartojo:

1. Laikykis manęs, mes išplaukiame į krantą, klausyk manęs, nes man tris kartus metų daugiau negu tau.

2. Dar nei vienas laivas neatplaukė, reikia patiems statyti laivą, jūrą aš pažįstu gerai, juk nugyvenau du tavo gyvenimus.

3. Tvirtinkim irklą, mes dar pagyvensime, nes man pusantro karto daugiau metų negu tau.

Kiek gi laiko Robinzonas pragyveno saloje ir kiek metų papūga?“

Kiek kartų beskaičiau sąlygą, kaip besudarinėjau lygtį, atsakymo, nurodyto žurnale, negavau. Ir štai uždavinį pateikiau savo mokiniams, išsakydama ir savo abejones dėl atsakymo. Vienas iš mokinių, pakilęs iš suolo, pasiūlė samprotauti garsiai kaip sudarinėju lygtį, o jie, mokiniai, pabandysią kritikuoti. Pradėjusi skaityti pirmą sakinį ir komentuoti, ką pažymėsiu nežinomuoju sudarant lygtį, išgirdau, kad darau loginę klaidą. Vos vienuolikos metų mokinys per minutę pastebėjo tai, ko nepastebėjau aš visą vakarą: papūga tik kartojo Robinzono mintis, ir sakinys „aš trigubai vyresnė už tave“ - reiškė, kad tuo laiku Robinzonas buvo vyresnis už papūgą trigubai.

Ne veltui sakoma, kad japonų vaikas, mokantis vaikščioti, pakeltas ant rankų pradeda verkti, o mes, savo mokinių sparnus auginame, stipriname ilgus metus, o pakilti ir skristi jiems bijome leisti. 12 metų mokytojo vadovaujamas mokinys žengia matematikos mokslo labirintais, sužinodamas vis naujas matematikos tiesas, kurias reikia sujungti į vieną visumą. Kartojimas turi būti kryptingas, sisteminantis visą išeitą kursą, atskleidžiantis jo svarbiausias ypatybes, ryšį su kitomis temomis, kartu jis turi būti lavinantis ir aktyvinantis mokinių mąstymą, o svarbiausia – nukreipiantis mokinius taikyti įgytas žinias kompleksiškai. Įsitikinau, kad šitaip dirbant galima pasiekti ne tik gilių žinių, ne tik suformuoti tvirtus mokinių skaičiavimo įgūdžius, bet ir išmokyti mokinius daryti išvadas, apibendrinti, analizuoti. Taip sprendžiamas ir mokinių savarankiškumo ir kūrybiškumo ugdymo klausimas.

Be to, savo darbe vadovaujuosi principu – kartojimo medžiaga turi būti perteikiama ant tvirto ankstesnių žinių pamato. Tuo tikslu visus metus, ar tai dėstydama naują medžiagą, ar tai sudarydama išeito skyriaus įtvirtinimo įgūdžius, nuolat kartoju ir kitas temas. Mokinių teorinių žinių spragos lyginamos pamokose, įvairiai organizuojamose konsultacijose, įskaitose. Eksperimentuodama nustačiau, kad efektyviausias žinių kartojimo būdas – įskaitų savaitė. Mokiniai, gavę teorijos klausimus bei uždavinius praktiniam tos teorijos pritaikymui, kasdien po penkis raštu atsakinėja, tai ko išmoko. Po to per 10–15 minučių abipusio bendravimo išsiaiškinu, kaip mokinys sąmoningai ir tvirtai išmoko kursą, pateikdama visą seriją klausimų. Tiems, kurie įskaitos neišlaikė, skiriu kitos savaitės papildomą dieną, reikalaudama, kad įskaitą išlaikytų. Per metus dvyliktoje klasėje paprastai organizuoju keturias įskaitas.

Pirmoji: kvadratinė funkcija, kvadratinė lygtis. Vietos teorema, kvadratinių nelygybių sprendimas. Intervalų metodas ir šiai temai pritaikyti uždaviniai.

Antroji: logaritminė, rodiklinė funkcijos, jų savybės. Logaritmų savybės. Logaritminės, rodiklinės funkcijų išvestinės, pirmykštės ir jų taikymui skirti uždaviniai.

Trečioji įskaita skirta trigonometrijos kurso kartojimui: sinuso, kosinuso, tangento grafikai ir savybės. Pagrindinės trigonometrinės tapatybės. Sudėties formulės, dvigubo argumento formulės ir jų išvedimas. Trigonometrinių funkcijų sumos keitimas, sandauga. Trigonometrinių lygčių sprendimas. Uždaviniai skirti tapatybių, lygčių ir nelygybių teorijos įtvirtinimui. Trigonometrinių funkcijų išvestinės bei pirmykštės.

Ketvirtoji įskaita – laipsnis. Aritmetinė šaknis. Skaičiaus modulis. Veiksmai su laipsniais ir šaknimis. Laipsninės funkcijos išvestinė. Reiškinių prastinimas ir racionaliosios lygtys.

Įskaitų išdėstymo tvarka gali būti įvairi, o jų organizavimas ir pravedimas atima mokytojui nemažai laiko, bet per eilę metų įsitikinau, kad tai geriausias būdas medžiagai susisteminti, įtvirtinti, likviduoti ir teorijos, ir praktikos spragas. Kiekvienoje kartojimo pamokoje stengiuosi išmokyti mąstyti, sukurdama optimalias sąlygas, parinkdama uždavinius, stimuliuojančius mąstymą. Ir matematikos teorijos pamokoje, ir kartojimo pamokose siekiu loginio išbaigtumo, nepamiršdama, kad pamokoje dedamas pagrindas sėkmingam savarankiško namų darbų atlikimui. Todėl, planuojant kartojimo pamokas, itin svarbus uždavinių parinkimas namų darbams.

1980 metais išleidau abiturientų laidą, kurią mokiau nuo penktos klasės. Taigi visos mokinių klaidos ir geros žinios – mano. Per stojamąjį egzaminą du mano mokiniai, turėję penketus iš matematikos, gavo trejetus, o iš kitų penketukininkų dauguma gavo ketvertus. Atrodė, šitiek įdėta darbo ir toks akibrokštas! Pakalbėjau su auklėtiniais, stengdamasi išsiaiškinti, kodėl taip atsitiko, kodėl jie neišsprendė, man atrodo, visai nesunkių uždavinių.

Štai tie uždaviniai. Išspręskite nelygybes:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(3n^2+1)-2n^5}{(n+3)^2\ (n-2)^3} < x^2 - 3x;$$

$$9^k - 10\cdot 3^{k-1} + 4 > \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{n^2+2n+1};$$

$$x^{|x+3|} \geq \frac{x^{1,3-f'(-2)}}{\sqrt{x}}, jeigu\ f(x) = \ln(9-x^2) - \frac{2x}{3+2x}$$

Arba: 1. Raskite skaičius A ir B, kad funkcija f(x) = $A\sin x + B$ tenkintų sąlygą f'(c) = 1 ir $\int_0^n f(x)dx = 2$.

Pagrindinis motyvas, kodėl jie jų neišsprendė arba sprendė tik dalinai – išsigando sąlygos, trijų keturių temų, sujungtų į vieną. Todėl tolesniame darbe nutariau mokinius mokyti spręsti uždavinius, jungiančius kelias temas į vieną.

Kaip tai darau praktiškai? Kartojant trigonometrijos kursą, pirmiausia susisteminu teorinę medžiagą. Šią pamoką organizuoju įvairiai. Akivaizdi nauda mokiniams yra įskaitos organizavimas. O geriausiai pavykęs pamokos tipas yra pamoka – seminaras. Prieš savaitę mokiniams pateikiu po du klausimus (vieną klausimą gauna du trys mokiniai), paskelbiu būsimos pamokos temą, pateikiu planą, reglamentą. Pamokoje dirba mokiniai, o aš tik susisteminu pakartotą medžiagą. Atsakinėjantys įskaitoje turi kalbėti trumpai, bet aiškiai. Pavyzdžiui, mokiniams, nagrinėjantiems funkcijos $y = cosx$ grafiką ir savybes, galima pateikti tokius klausimus:

1. Kokiu principu ir kuo remiantis iš funkcijos $y = cosx$ grafiko gauname grafiką funkcijos $y = \arccos x, y = \sin x$?

2. Pavaizduokite grafiką funkcijų:

$y = e^{\ln \cos x}$, $y = 2^{\log_2 (-x)}$, $y = e^{\ln|\cos x|}$,

$y = |\sin x \cdot \mathrm{ctg} x|, y = 3\cos x$ ir t.t.

3. Raskite funkcijos $\mathrm{y} = \log_3 \cos x$ apibrėžimo sritį.

Mokytojui su mokiniais nebūtina nagrinėti visų trigonometrinių funkcijų grafikus ir savybes lentoje. Svarbiausias tikslas – išmokyti nubrėžti grafiką ir mokėti jį skaityti, nustatyti ryšį tarp kitų trigonometrinių funkcijų. Klausydama pranešimų, atkreipiu mokinių dėmesį į tai, kad sudėties formulės yra raktas visoms trigonometrijos formulėms gauti. Čia itin svarbu, kad mokinys pajustų viso trigonometrijos mechanizmo sudarymo dėsningumą. Tai įsisąmones, nesunkiai išves formulę pats, jei ją būtų pamiršęs. Po tokio teorinio seminaro namų darbams skiriu pakartoti visiems lygčių $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}\, x = a$ sprendimą. Be teorijos, namų darbams skiriu pačias elementariausias trigonometrines lygtis, kurioms išspręsti mokiniai priversti peržiūrėti teorinę medžiagą. Išspręskite lygtis:

1. $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin\frac{5\pi}{2}$

2. $\sin 4x \cos 5x + \cos 4x \sin 5x = \cos\pi - \cos\frac{4\pi}{3}$

3. $\ln 1 + \sin 6x \cos 2x - \sin 2x \cos 6x = 0$

4. $cos^2 3x - sin^2 3x = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{33^2 - 25^2}{29}}$

5. $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) \sin x - \cos(2x + \frac{\pi}{4})\, cosx = \cos\frac{2\pi}{3}$

6. $tg\frac{x}{5} + \ tgx = tgx\, tg\frac{x}{5}$

7. Raskite a reikšmių aibę, prie kurios lygtis $\cos 3x = 2a + 7$ turi sprendinius.

Tokios užduotys skatina mokinius pakartoti lygčių sprendimo algoritmą, pasitikrinti savo raštingumą, permąstyti pamokoje įgytas žinias, jas įtvirtinti ir pakartoti.

Antrą kartojimo pamoką skiriu trigonometrinių lygčių sprendimo būdams susisteminti ir įtvirtinti.

Pamokos medžiaga atrodo taip:

<u>1. Lygtys kvadratinės arba suvedamos į kvadratines vienos ar kitos trigonometrinės funkcijos atžvilgiu:</u>

1. $sin^2 2x = 3 + 2sin2x$

2. $3sin^2(x - \frac{\pi}{3}) = 3\cos\,(x - \frac{\pi}{3})$

3. $1 - \ \sqrt{3}\, sinx = cos2x$

4. $\cos(4x + 2) - 3\cos(2x + 1) = -1$

<u>2. Homogeninės arba lygtys suvedamos į homogenines:</u>

1. $sin^2 2x \ - 3sin2xcos2x + \ 2cos^2 2x = 0$

2. $cos^2 3x = cos3xsin3x$

3. $4sin^2 x + 8sinxcosx + 10cos^2 x = 3$

4. $sin2x + 5cos^2 x = 4sin^2 2x + 4cos^2 2x$

<u>3. Lygtys, sprendžiamos pakeičiant sumą sandauga, lygia nuliui:</u>

1. $cosx + cos3x = 0$

2. $cosx - sinx = \sqrt{2}$

3. $sin7x - sinx = cos4x$

4. $1 + cos2x + cosx = cos^2 45° - sin^2 135°$

<u>4. Trigonometrinės lygtys, turinčios pašalinius sprendinius:</u>

1. $sinx + tgxctgx = 2$

2. $2sinxctgx + 1 = \cos(-x)$

3. $2cosxtgx + \sin(-x) = 1$

4. $2cos2x - 3cosx + 1 = tg7\pi \cdot ctgx$

Visai nebūtina spręsti visas lygtis. Iš pirmo ketverto sprendžiame antrą ir trečią, iš antro – vieni sprendžia pirmą ir trečią, kiti antrą ir ketvirtą. Tik lygtis su pašaliniais sprendiniais visas išsamiai išnagrinėjame.

Namų darbams išspręskite tokias lygtis:

1. $3 + tg2x = 2tg(\pi - 2x)$

2. $3sinx + cos2x = 2 \cdot 0{,}4^{\log_{0,4} sin15°} \cdot 0{,}16^{\log_{0,4} \sqrt{2cos15°}}$

3. $3sin^2x - 2sin2x + 5cos^2x = 4\log_3 tg60°$

4. $3cos2x + 4sinx - 1 = 2ctg\frac{9\pi}{2} \cdot tgx$

Pamokoje visas mano dėmesys skirtas lygčių sprendimo tipams pakartoti, jiems susisteminti. Todėl jau neblaškau mokinių dėmesio mintinio skaičiavimo elementais, reikalaujančiais tvirtų žinių.

Trečioje ir ketvirtoje kartojimo pamokose svarbiausia laikau priminti ir įtvirtinti trigonometrinių lygčių sprendinių atrinkimą nurodytam intervale. Ši tema aktuali įsitvirtinus naujai matematikos egzamino formai universitete.

Pateikiu šios pamokos užduotis.

Klasėje:

1. Išspręskite lygtį $1 + sin2x = (sin3x + cos3x)^2, kai\ x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ ir raskite lygties šaknų sumą.

2. Raskite lygties $f'(x) + 2cos^2 2x = q'(-2)$ didžiausią neigiamą šaknį laipsniais, jei $f(x) = \sqrt{2} - 5x - 2{,}5cos2x; g(x) = -0{,}2tg(5x + 10)$.

3. Raskite lygties $|sinx| = sinx + 2cosx$ šaknų, esančių intervale $[0; 4\pi]$ skaičių.

4. Raskite funkcijos $y = 0{,}5sin2x - sinx$ grafiko taškų, kuriuose liestinė lygiagreti tiesei $y = -x + 3$, abscises, priklausančias atkarpai $[0; 2\pi]$.

Likus laikui, gabiems mokiniams siūlau išspręsti lygtį:$|sinx| = \frac{-sinx}{(x-4)^2}$.

<u>Namams skiriu tokias užduotis:</u>

1. Raskite lygties $|cosx| = cosx + 2\sqrt{3}sinx$ sprendinių sumą, esančią intervale $[-2\pi; 2\pi]$.

2. Raskite funkcijos $y = 0{,}5cos2x + cosx - x$ grafiko taškų, kuriuose liestinė statmena tiesei $y = x + 2$, abscisių, priklausančių atkarpai $[0; 2\pi]$ skaičių.

3. Raskite funkcijos $y = cosx + \frac{1}{3}sin3x - \sqrt{3}sinx - \frac{1}{\sqrt{3}}cos3x$ kritinius taškus intervale $[0; 2\pi]$.

Iš pirmo žvilgsnio atrodytų, kad pamokos medžiaga gausoka ir sunkiai prieinama kiekvienam abiturientui. Taip būtų, jei mokiniai dirbtų spontaniškai, nebūtų ruošiami tokioms pamokoms. Antra, maždaug pusė abiturientų stoja į specialybes, reikalaujančias gerai mokėti matematiką, o mes, mokytojai, manydami, kad mokiniai pernelyg apkrauti, lengviname pamokos medžiagą, namų darbams duodami uždavinius, esančius tik vadovėlyje. Todėl, norintys tęsti mokslą aukštojoje mokykloje priversti ieškotis korepetitorių, įtemptai dirbti savarankiškai.

Realizuodama pamokos tikslus, noriu parodyti, kad joje nieko neleistino nėra, kad viskas sukonstruota, įtvirtinant matematikos žinias.

Pradėsiu nuo pirmosios lygties. Ją sprendžiant, primenu lygties sprendinių, esančių nurodytame intervale, atrinkimą. Turime

$$1 + sin2x = (sin3x + cos3x)^2\, , jei\ x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$$

Pakėlę dešinę pusę kvadratu ir pritaikę dvigubo argumento formulę, gauname:

$$1 + sin2x = 1 + sin6x,\ \ sin6x - sin2x = 0\ arba\ 2sin2xcos4x = 0$$

Taigi turime $sin2x = 0\ arba\ cos4x = 0$.

Iš čia: $x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z,\ arba\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}, n \in Z$

Belieka atrinkti sprendinius, priklausančius intervalui $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$. Jei $x=\frac{\pi k}{2}, tai -\frac{\pi}{4}\leq\frac{k\pi}{2}\leq\frac{\pi}{4};\ -\frac{1}{2}\leq k\leq\frac{1}{2}\ ir\ k\in Z$; tai k = 0, o x = 0.

Jei $x=\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{4}, tai\ -\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{4}\leq\frac{\pi}{4};\ -\frac{3\pi}{8}\leq\frac{\pi n}{4}\leq\frac{\pi}{8};\ -\frac{3}{2}\leq n\leq\frac{1}{2}, ir\ n\in Z, tai\ n=-1\ ir\ n=0, o\ x=-\frac{\pi}{8}\ ir\ x=\frac{\pi}{8}$.

Atsakymas. $\frac{-\pi}{8};\frac{\pi}{8}$; 0.

Spręsdami lygtį $|sinx|=sinx+2cosx$ intervale $[0;4\pi]$, pirmiausia prisimename skaičiaus modulio apibrėžimą, t.y. $|x|=x, jei\ x\geq 0\ , o\ |x|=-x, jei\ x\leq 0$. Šiuo atveju lygtis virsta nesudėtinga lygtimi. Tai įsitikina mokiniai, panagrinėję sinuso grafiką intervale $[0;4\pi]$.

Taigi: $y=sinx, kai\ x\in[0;4\pi]$;

Jei $x\in[0;\pi]$, arba $x\in[2\pi;3\pi]$, tai $sinx=sinx+2cosx$.

Jei $x\in[\pi;2\pi]$arba $x\in[3\pi;4\pi]$, tai $-sinx=sinx+2cosx$.

Pirmuoju atveju: $sinx=sinx+2cosx, tai\ cosx=0, x=\frac{\pi}{2}+k\pi, kai\ k\epsilon Z,\ kadangi$

$x\epsilon[0;\pi]$ ir $x\in[2\pi;3\pi]$, tai tradiciniu būdu arba iš grafiko gauname $x=\frac{\pi}{2};x=\frac{5\pi}{2}$.

Antruoju atveju gauname:

$-sinx=sinx+2cosx;\ -2sinx=2cosx\ I\!: cosx\neq 0; tgx=-1; x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\epsilon Z,$ o kadangi $x\in[\pi;2\pi]$ ir $x\in[3\pi;4\pi]; x=\frac{7\pi}{4}; x=\frac{15\pi}{4}$.

Ieškoma sprendinių suma intervale $[0;4\pi]$ bus $8{,}5\pi$.

Spręsdami lygtį $f'(x)+2cos^2 2x=q'(-2)$ *(9psl.),* apskaičiavę išvestines, gauname lygtį $2sin^2 2x-5sin2x+2=0$.

Ją išsprendę, gauname $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}; n\in Z$. Iš čia didžiausia neigiama šaknis -105°.

Sprendžiant ketvirtą, sunkiausią užduotį (10psl.) prisimename liestinės lygtį, išvestinės geometrinę prasmę, sąlygą, nusakančią tiesių lygiagretumą bei statmenumą. Taigi turime: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, kur x_0 lietimosi taško abscisė, o $k=f'(x_0)=-1$, nes liestinės krypties koeficientas lygus jai lygiagrečios tiesės $y=-x+3$ krypties koeficientui.

Čia pravartu prisiminti ir tiesių statmenumo sąlygą, t.y., kad krypties koeficientų sandauga lygi „-1".

Turime: $k = f'(x_0) = cos2x_0 - cosx_0, o\ k = -1$, tai $cos2x_0 - cosx_0 = -1$, $1 + cos2x_0 - cosx_0 = 0, gauname\ cosx_0 = 0, arba\ cos2x_0 = -1$, t.y.

$$x_0 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z, \qquad x_0 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z$$

Pagaliau atrenkame taškų abscises, priklausančias intervalui $[0; 2\pi]$.

Taigi gauname: $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$.

Kas padaryta tokioje pamokoje, kelios temos pakartotos?

Pakartojome lygčių sprendimo elementariausius atvejus – trigonometrinių, trigonometrinių funkcijų pirmykštę, funkcijos $y = sinx$ grafiką ir pastovaus ženklo intervalus, skaičiaus modulio apibrėžimą, liestinės lygtį, išvestinės geometrinę prasmę, dviejų tiesių lygiagretumo ir statmenumo sąlygą, sprendė, kaip atrinkti sprendinius nurodytam intervale, kaip rasti jų sumą, šaknų skaičių. Mokant atrinkti trigonometrinės lygties sprendinius nurodytame intervale, mokiniai dažnai klausia, ar visada būtina taip konstruoti šį atrinkimo procesą. Atsakau, kad ne, ne visada, bet, jei intervalas gana didelis – būtina. Norėdama pademonstruoti šio būdo privalumą, pateikiu pratimą:

Raskite lygties $sin^2 4x + sin4x - 2 = 0$ šaknų sumą intervale $[0; 50\pi]$. Išsprendę gauname:

$sin4x = -2\ (sprendinių\ nėra)\ arba\ sin4x = 1$ ir

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k\epsilon Z, be\ to\ x \in [0; 50\pi]$; tai turime $0 \leq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \leq 50\pi$;

$$-\frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi k}{2} \leq \frac{999\pi}{8}, kai\ k\epsilon Z;\ -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{399}{4}, t.y. k = 0; 1; 2; \ldots 99.$$

Vadinasi, turime šimtą šaknų, kurių sumą reikia rasti. Prisimename aritmetinės progresijos narių sumos formulę:

$$S_{100} = \frac{(\pi/8 + \pi/8 + 99 \cdot \pi/2)}{2} = 2487{,}5\pi.$$

Trigonometrinės lygties sprendinių atrinkimo klausimą galima labai gražiai spręsti, net neformuluojant užduoties išspręsti lygtį. Pavyzdžiui:

1. Raskite funkcijos $y = \frac{1}{2}cos2x + sinx$ didžiausią ir mažiausią reikšmę intervale $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

2. Raskite mažiausią teigiamą reikšmę, prie kurios funkcijos išvestinė lygi nuliui, jei $y = -\frac{1}{3}cos3x - \frac{\sqrt{3}}{3}sin2x + cosx$.

3. Nustatykite didžiausią neigiamą kintamojo x reikšmę, su kuria funkcijos $y = cos2x - 5cosx + 3$ grafikas kerta OX ašį.

4. Raskite x reikšmes, priklausančias intervalui $[-10; 1]$, prie kurių galioja lygybė $y(x) = g(x)$, jei $y(x) = 9^{sin^x x}$ ir $g(x) = 3 \cdot (\frac{1}{3})^{cos^2 x} + 6$.

Sprendžiant, kada $y = ax^2 + bx + c$ bus teigiamas visoms x, siūlau išspręsti:

1. Su kuriomis realiomis a reikšmėmis funkcijos

$y = \left(1 - \log_{\frac{1}{8}} a)x^2 - 2(3 + +\log_{\frac{1}{8}} a\right)x + 5 - \log_{\frac{1}{8}} a$ yra teigiama visoms x.

2. Raskite visas p reikšmes, kurioms esant išraiška $\lg((p-1)x^{2+2px} + 3p - 2)$ apibrėžta visoms x.

3. Raskite m reikšmes, su kuriomis nelygybė $\frac{x^2+mx-1}{2m^2-2x+3} < 1$ yra teisinga bet kurioms x.

Manau, kad tokius uždavinius būtina mokyti spręsti pamokose, nes niekas kitas taip akivaizdžiai neapibūdina mokinio matematinio išprusimo, kaip mokėjimas spręsti uždavinius, jungiančius kelias temas, o antra – išmokti spręsti galima tik dirbant.

Turbūt nereikia sakyti, kad tokiai pamokai pasiruošti labai sunku. Kiekvieno mokytojo svajonė, jog naujuose vadovėliuose būtų žymiai didesnis dėmesys kurso kartojimo uždavinių skyriui, kad mokytojui nereikėtų rankioti uždavinių iš įvairiausių rinkinių, o mokiniai juos turėtų visada po ranka, neieškodami papildomos literatūros. Be to, toks uždavinių parinkimas skatina giliau pažvelgti į sąlygą, išmokyti ją perskaityti, kelti matematinį raštingumą. Programos reikalavimai verčia mokytoją ir mokinį dirbti atidžiau, rūpestingiau, laiku likviduoti mokinių žinių spragas.

Pateikiu kai kurių savo pamokų medžiagą.

Aritmetinės progresijos kartojimas

1. Raskite aritmetinės progresijos sumą S_{11}, jei $a_3 + a_9 = 8$.

2. Aritmetinės progresijos suma apskaičiuojama pagal formulę

$S_n = \frac{1}{3}n^2 - 5n.$ Raskite tos progresijos penktąjį narį.

3. Išspręskite lygtį $(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 50)^{2\log_{1275} x} = 4$.

4. Raskite tokias n reikšmes, prie kurių seka $\sqrt{n-1}$, $\sqrt{5n-1}$, $\sqrt{12n+1}$ yra aritmetinė progresija.

5. Prie kurių α reikšmių seka $1 + sin\alpha$; $sin^2\alpha$; $1 + sin3\alpha$ yra aritmetinė progresija.

6. Raskite sumą visų lyginių triženklių skaičių.

Namų darbams:

1. Išspręskite lygtis: $lgx + lgx^2 + lgx^3 + \cdots + lgx^{100} = 5050$;

$$5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \ldots 5^{2x} = 0{,}2^{-50}.$$

2. Turistas, kildamas į kalną, pasiekia 800m aukštį per 1h, o kiekvieną kitą valandą pakyla 25m mažiau, negu prieš tai buvusią. Per kiek valandų turistas pasiekia 5700m aukštį?

3. Duota $a_1 = -20, a_{n+1} = a_n + 4.$ Raskite a_n .

Be galo mažėjančios geometrijos progresijos kartojimas

Klasėje: 1. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę

$$(0,(5) - 0,(2))^{3\log_{\frac{1}{3}} 2}.$$

2. Raskite x iš lygčių:

1) $16^{-x} \cdot 25^x = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots$

2) $2tg^2(x+4) + tg(x+4) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots)$

3) $(3\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots\right))^{2\log_2 x} = 4$

4) $\frac{131x}{3,(5)+ {}^4/_9 - 2,0(15)} = \frac{1}{0,15}$

5) $(3,(1) - 1,(3))^{\log_{9x} x} = (4,(2) - 2,(4))^{\log_x 9x}$

Namų darbams:

1. $32^{\frac{3x^2-18x}{15}} = (0,(13))^{\log_{7,5} sin30°}$

2. $\log_x 256 = 4((2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \cdots)$

3. $\log_2(x - 0,666 \dots) - \log_2(x - 0,833 \dots) + \log_2 5 = \log_2 15$

Išvestinių apskaičiavimas ir taikymas.

1. Išspręskite nelygybę $f'(x) < g'(x), kai\ f(x) = \frac{x^2+2}{x}, g'(x) = \frac{2(2x+1,5)}{x^2}$.

2. Raskite $f'\left(\frac{\pi}{6}\right), kai\ f(x) = 4x + \frac{9}{cosx}$ ir išspręskite lygtį

$$x^2 - 7x + 2 - \sqrt{(x-4)^2} = f'(\frac{\pi}{6}).$$

3. Išspręskite nelygybę: $|x^2 - 4| \geq f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) - 2x, kai\ f(x) = sin^2x.$

4. Išspręskite lygtį $f'(x) = 0, kai\ f(x) = 2x - 0,25sin4x + 0,5sin2x.$

Gabiems mokiniams:

Išspręskite nelygybę: $3^{|x-5|} \leq \frac{3\frac{5}{6} - f'(-1)}{\sqrt{3}}, jei\ f(x) = \ln(1-2x) + \frac{x^2}{1-2x^2}$.

Namų darbams:

1. Įrodykite, kad $y' = 0, jei\ y = tg^2x\ sin^2x - tg^2x + sin^2x.$

2. Išspręskite lygtį $g'(x) = y'(x), jei\ g(x) = 3x + 2\ ir\ y(x) = 3\ln(x-2).$

3. Išspręskite nelygybę $|9 - x^2| < 8x + f'\left(\frac{\pi}{24}\right), kai\ f(x) = cos4x + 2x.$

Šiai temai pakartoti skiriu įskaitinius uždavinius:

1. Raskite didžiausią neigiamą sveikąjį skaičių, tenkinantį nelygybę

$\frac{30-6x+x^2}{6-x} > 7f'(0)$, kai $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2} + 0{,}5sin2x + cos\frac{x}{5} + lg17$.

Ats. -5.

2. Raskite didžiausią sveikąjį skaičių x, su kuriuo teisinga nelygybė

$$|x-1|(x-4) \geq \frac{1}{3}f'(1)(x^2-4), kai\ f(x) = \frac{3x^3-3x^2-2x+1}{2x-1} + 7\sqrt{2}$$

Ats. 1.

3. Raskite lygties $f'(x) + \frac{\pi}{2} = sin^2x + f(\pi)$ sprendinių sumą (laipsniais), kai $x \in [-90°; 0°]$ ir $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}sin2x \cdot cos2x$.

Ats. $-120°$.

4. Raskite didžiausią neigiamą sveikąjį skaičių, tenkinantį nelygybę $\frac{f'(0)}{x+2} < \frac{10}{|x-1|}$, kai $f(x) = \frac{tgx}{tg2x-tgx+1} + 4$.

Ats. -3.

5. Raskite didžiausią sveiką skaičių, tenkinantį nelygybę

$\left(|x-2| + 3f'(0)\right)(x-3) < 0, kai\ f(x) = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-3}{0{,}5x^2-3x+3} - 2tg\frac{\pi}{17}$.

Ats. 4.

6. Raskite mažiausią teigiamą lygties $3sin^25x + f'(x) = 3\pi + f(\pi)$ šaknį laipsniais, kai $f(x) = 1{,}4sin5x - 3x + tg\pi$.

Ats. 18°.

7. Raskite didžiausią sveiką skaičių, tenkinantį nelygybę

$$x|x-4| \leq f\left(\frac{1}{3}\right), kai\ f(x) = (3x+1) \cdot (9x^2 - 3x + 1 + cos3\pi x).$$

Ats. 5.

8. Raskite mažiausią sveiką x reikšmę, su kuria teisinga nelygybė

$$\frac{f'(\frac{\pi}{2})}{x-2} > \left|\frac{-3}{2x-1}\right|, kai\ f(x) = \frac{sinx}{sinx - sin3x} + \ (1 + x - \frac{\pi}{2})^2 + ln^2 5.$$

Ats. 3.

9. Išspręskite lygtį $2f'(x)\left(\sqrt{3x+1} - 1\right) = 3x + 4f'(0), kai\ f(x) = x\sqrt{x+4}$.

Ats. 5.

10. Išspręskite lygtį $1 - \frac{x+7}{x^2 f'(x)} = x - f(1), kai\ f(x) = \frac{\sqrt{2x+7}}{x}$.

Ats. 9.

11. Išspręskite lygtį

$$\sqrt{f'(x)} = g'(x), kai\ f(x) = 3x - 12\ln(x+3)\ , o\ g(x) = 20\sqrt{x+3} - x + \ \pi^2$$

Ats. 13.

12. Raskite lygties $f'(x) + f(0) = g'(x) + 2g'(\pi)$ šaknų skaičių, priklausančių intervalui $\left(-\pi; \pi\right)$, kai $f(x) = 2x + cos2x + 3, o\ g(x) = \pi + 2sinxcosx$.

Ats. 3.

13. Raskite lygties $f'(x) + \ f'(\pi) = 2f(0)$ mažiausią teigiamą šaknį laipsniais, kai $f(x) = 2 + 6x - \frac{1}{12}(10sin6x + sin12x)$.

Ats. 10°.

14. Išspręskite lygtį $f'(x) + 7 = g(x) + g'(0)$ ir raskite didžiausią sprendinį laipsniais iš intervalo [0°; $360°$], kai $f(x) = 0{,}25sin4x + 5x^2 \cdot \sqrt[5]{x} + x$;

$g(x) = 7cos2x + 11x^{\frac{6}{5}}$.

Ats. 315.

15. Išspręskite lygtį $\sqrt{f'(x)} + 12g'(x) + g(2) = 0,\ jei\ f(x) = x - 12\ln(3-x)\ ir\ g(x) = \sqrt{3-x}.$

Ats. -1.

16. Raskite lygties $x\sqrt{1-8x-4x^2} \cdot f'(x) = 3(x+1) \cdot f(x)$ šaknų sumą, kai $f(x) = x\sqrt{2x+3}$.

Ats. -1,5.

17. Išspręskite lygtį $\frac{2-x}{x^2 f'(x)} + 4\sqrt{x-2} = 2, kai\ f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$.

Ats. $\emptyset$.

18. Išspręskite lygtį $9\sqrt{x+1} + 3f'(x) = f'(3)$,

$$kai\ f(x) = \sqrt{(2x+3)^3} - \frac{3}{2}\sqrt{5}.$$

Ats. -1.

19. Raskite mažiausią x reikšmę, tenkinančią nelygybę $\frac{|x-3|}{x^2 - 5x+6} \geq f'(x), jei$

$$f(x) = \frac{2x^2-1}{2x+1} + \frac{1}{5}cos5x - 5.$$

Ats. 1,5.

20. Raskite mažiausią sveiką x reikšmę, tenkinančią nelygybę

$$|5x-3| > x^2 - x + f'(0), kai\ f(x) = \frac{3x^2-2}{1-x} + sin^2x.$$

Ats. -4.

21. Raskite funkcijos $f(x) = 2sin^2\frac{x}{6} + sin\frac{x}{3} - \frac{x}{3}$ kritinių taškų, tenkinančių sąlygą $x^2 + 19{,}5x < 10$ skaičių.

Ats.3.

22. Raskite lygties $f'(x) = 2 + \frac{1}{3}\sqrt[3]{x} = 2sin^3x$ sprendinį laipsniais, kai $f(x) = 2x + 0{,}25\sqrt[3]{x^4} + \sin(270° + x) - \frac{2}{3}cos^3x\ ir\ x \in (-90°; 0)$.

Ats. -60°.

23. Raskite lygties $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi x\right) + tg\pi(1 - x) = 0$ sprendinį (radianais), kai $x \in (0; 0{,}5)$.

Ats. 0,25.

24. Raskite lygties $\sin(\pi + 7x) + \ sinx = \sin\,(\pi + 5x)$ sprendinių skaičių, kai $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Ats. 7.

25. Raskite lygties $sin4x = 1 - 2cos^2x$ šaknų, tenkinančių sąlygą $|x| < 1$, skaičių.

Ats. 3.

26. Raskite lygties $9cos^4x - sin^4x = 2sin^22x$ sprendinių, priklausančių intervalui $[-180°; 180°]$, skaičių.

Ats. 4.

Įskaitą galima įvairiai organizuoti. Paminėsiu patį primityviausią būdą.

Pamokoje išsprendžiu ir giliai išanalizuoju penkis – keturis tipinius pratimus ir padaugintas sąlygas įteikiu mokiniams. Praėjus savaitei, kurios metu mokiniai dirbo savarankiškai, organizuoju konsultaciją. Atsakau į visus klausimus. Jei kai kurie uždaviniai mokiniams sunkiau sekėsi, tai dar skiriu šio tipo uždavinių papildomai ir dar po savaitės, mokiniai iš šios temos atsiskaito raštu.

Pamokos, skirtos duotų uždavinių sprendimų paruošimui, medžiaga gali atrodyti taip:

1. *Raskite didžiausią sveikąjį nelygybės* $x|x-4| \leq \frac{5}{6} f'(\frac{1}{3})$ *sprendinį, jei* $f(x) = (3x+1) \cdot (9x^2 - 3x + 1 + cos3\pi) + ln^2 11.$

Sprendimas: $f'(x) = 3(9x^2 - 3x + 1 + cos3\pi x) + (18x - 3 - 3\pi sin3\pi x) \cdot (3x+1)$

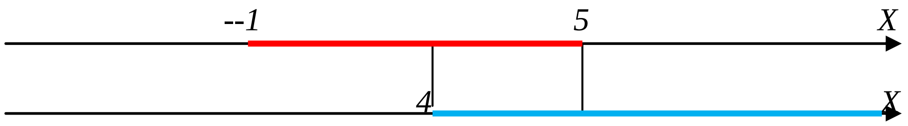
Randame $f'(x) = 3(1 - 1 + 1 - 1) + (6 - 3 - 0) \cdot (1 + 1) = 6$

Gauname nelygybę $x|x-4| \leq 5.$

Pomodulinio reiškinio šaknis 4 suskaido skaičių ašį intervalais $(-\infty; 4)\ ir [4; \infty]$.

Norint surasti didžiausią sveiką sprendinį, imame intervalą $[4; \infty)$ ir tik tada, jei šiame intervale nelygybė neturės sprendinių, nagrinėsime nelygybę antrame intervale.

Jei $x \in [4; \infty), tai\ x(x-4) \leq 5,\ x^2 - 4x - 5 \leq 0,\ (x-5)(x+1) \leq 0.$



$4 \leq x \leq 5.$ Didžiausias sveikas skaičius, tenkinantis nelygybę, 5.

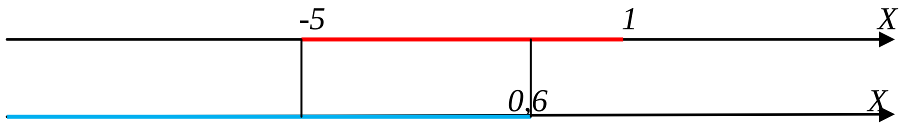
Ats. 5.

2. Raskite mažiausią sveikąjį nelygybės $|5x-3| > x^2 - x + f'(0)$ sprendinį, jei $f(x) = \frac{3x^2-2}{1-x} - \frac{1}{4} cos4x + \sqrt{3}.$

Sprendimas: $f'(x) = \frac{6x(x-1) - 1 \cdot (3x^2-2)}{(1-x)^2} + sin4x;\ f(0) = \frac{0 + 1(-2)}{1} + sin0 = -2$

Turime: $|5x-3| > x^2 - x - 2.$ Pomodulinio reiškinio šaknis 0,6 suskaido skaičių ašį intervalais $(-\infty; 0{,}6)\ ir\ [0{,}6; \infty)$.

Norint rasti mažiausią sveikąjį nelygybės sprendinį, pradžioje nagrinėjame nelygybę intervale $(-\infty; 0{,}6)$ ir jei šiame intervale nelygybė turės sprendinius, tai tarp jų rasime ir mažiausią. Jei $x < 0{,}6, tai\ gauname: -5x + 3 > x^2 - x - 2,\ t.y. x^2 + 4x - 5 < 0; (x+5)(x-1) < 0$



$-5 < x < 0{,}6$. Mažiausias sveikas skaičius, tenkinantis nelygybę yra -4

Ats. -4.

3. Išspręskite lygtį $f'(x) = 0$ .ir rasti lygties šaknų sumą laipsniais, priklausančių intervalui $[0°; 360°]$, jei $f(x) = \frac{1}{2}sin2x + 5cosx - 3x + 10ln2$.

Sprendimas: $f'(x) = \frac{1}{2}cos2x(2x)' - 5sinx - 3; f'(x) = cos2x - 5sinx - 3$

Turime $1 - 2sin^2x - 5sinx - 3 = 0; 2sin^2x + 5sinx + 2 = 0; sinx = y, |y| \leq 1;$

$$2y^2 + 5y + 2 = 0;\ išsprendę\ gausime: y_1 = -\frac{1}{2}\ ;\ y_2 = -2\ (netinka)$$

$$sinx = -\frac{1}{2}; x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n\epsilon Z; x = (-1)^{n+1}30° + 180°n$$

Jei $n = 0, x = -30° \ \in [0°; 360°];$

Jei $n = -1, x = 30°;$

Jei $n = 1, x = 30° + 180 = 210°;$

Jei $n = 2, x = -30° + 360 = 330°$

Taigi $S = 30° + 210° + 330° = 570°$.

Ats. 570°.

4. Išspręskite lygtį $(x-2)\sqrt{1+8x-4x^2} \cdot f'(x) = 3(x-1)f(x), jei$

$f(x) = (x-2) \cdot \sqrt{2x-1}$.

$$f'(x) = (x-2)' \cdot \sqrt{2x-1} + \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} \cdot (x-2) = \sqrt{2x-1} + \frac{x-2}{\sqrt{2x-1}} = \frac{2x-1+x-2}{\sqrt{2x-1}}$$
$$= \frac{3x-3}{\sqrt{2x-1}}$$

$$(x-2)\sqrt{1+8x-4x^2} \cdot \frac{3(x-1)}{\sqrt{2x-1}} = 3(x-1)\left(x-2 \cdot \sqrt{2x-1}\right)$$

Gauname: $x = 2; x = 1$

$$\sqrt{1 + 8x - 4x^2} = 2x - 1;\ 1 + 8x - 4x^2 = 4x^2 - 4x + 1;\ 8x^2 - 12x = 0;$$

$$8x(x - 1{,}5) = 0; x = 0; x = 1{,}5$$

Patikrinus randame, kad lygties šaknys yra skaičiai: 1; 2; 1,5.

Ats. 1; 2; 1,5.

Logaritmų skaičiavimas

Logaritmų savybes užrašau pagalbinėje lentoje.

Logaritmų savybės, kuriomis naudosimės:

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \ (a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0)$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y; \log_a x^n = n \log_a x;\ \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x;\ \log_a 1 = 0;\ \log_a a = 1;\ \log_a a^k = k;\ \log_{a^n} x^n = \log_a x;\ \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \log_a b = \frac{1}{\log_b a};\ a^{\log_b c} = c^{\log_b a};$ kur $a > 0, b > 0, c \neq 1, b \neq 1, a \neq 1.$

Apskaičiuokite:

1. $7^{1+\log_7 3}$;

2. $3^{3\log_3 5}; 4$

3. $7^{2-\log_7 10}$;

4. $\log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{64}$;

5. $4^{\log_3 7} 5^{\log_3 7} - 7^{\log_3 20}$;

6. $7^{\log_5(1+\sqrt{2})+0,5\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{2}-1)}$;

7. $0,8(1 + 9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5}$;

8. $\left(4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots\right)\right)^{2\log_3 5}$;

9. $(0,(6) - 0,(3))^{2\log_3 5}$;

10. $0,4^{\log_{0,4} sin 75°} \cdot 0,16^{\log_{0,4} \sqrt{2cos 75°}}$;

11. $6^{\log_{\sqrt{6}} \sqrt{7-\sqrt{6}}} \cdot 64^{\log_4 \sqrt[3]{7+\sqrt{6}}}$;

12. $10\log_{32}(7\sqrt{3} + \sqrt{19}) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7\sqrt{3} - \sqrt{19})$.

Namų darbams:

1. $2\log_2 cos\frac{5\pi}{3} - lg cos 14\pi$;

2. $8^{\log_2(\sqrt{7}-\sqrt{3})} \cdot 4^{\log_{\frac{3}{\sqrt{4}}}(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$;

3. $\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{3}}}$; $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$;

4. $2^{4(\log_7 \sqrt{8+\sqrt{15}} - \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{8-\sqrt{15}})}$;

5. $(2^{\log_{2\sqrt{2}} 15})^3 - (3^{\log_{3\sqrt{3}} 5})^3$;

6. $\log_{3\sqrt{3}}(4\sqrt{2} - \sqrt{5}) - 2\log_{\frac{1}{27}}(4\sqrt{2} + \sqrt{5})$.

Lygties *sinx* = *a* sprendimas

Kompleksinį mokymą sėkmingai galima taikyti bet kurioje pamokoje, formuojant bet kurios temos įgūdžius. Pavyzdžiui, tema „Lygties sinx = a sprendimas“. Pamokoje prašau mokinius užrašyti lentoje paprasčiausius trigonometrinių lygčių sprendimo formules. Tikslas – išmokyti jas taikyti. Vietoj vadovėlyje esančių lygčių:

$sinx = \frac{1}{2}; sinx = \frac{3}{2}; sinx = -\frac{1}{2}; sinx = -0{,}6;\ sin4x = 0; \sin\left(-\frac{x}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 0$ sprendžiame tokias lygtis:

1. $2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} = cos^2\frac{\pi}{12} - sin^2\frac{\pi}{12}$;

2. $sin3xcos2x = sin2xcos3x + 2sin15°cos15°$;

3. $cos3xsin2x = \frac{1}{2} - sin3xcos2x$;

4. $sin7xcos4x = sin4xcos7x$;

5. $2(sin^3cosx + cos^3xsinx) = sin\frac{\pi}{2}$;

6. $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos^2\frac{\pi}{8} - sin^2\frac{\pi}{8}$;

7. $2sin4xcos4x = \sqrt[5]{1{,}2}$.

Namų darbams

Išspręskite lygtis:

1. $sin\frac{3x}{2} \cdot cos\frac{3x}{2} = cos\frac{2\pi}{3}$;

2. $sin5xcos4x - sin4xcos5x = sin390°$;

3. $2sinx - sin^2 2x = cos^2 2x - 2$;

4. $2sin8xcos8x = \frac{2tg\frac{\pi}{8}}{1-tg^2\frac{\pi}{8}}$;

5. $sin3xcosx + \frac{2tg\frac{\pi}{12}}{1+tg^2\frac{\pi}{12}} = sinxcos3x$.

<u>Lygties *cosx* = *a* sprendimas</u>

Išspręskite lygtis:

1. $cos4xcos\frac{\pi}{7} + sin4xsin\frac{\pi}{7} = cos4\pi$;

2. $2(cos^2 3x - sin^2 3x) = \frac{2tg\frac{\pi}{8}}{1-tg^2\frac{\pi}{8}}$;

3. $cos\frac{x}{7} - cos^2 13x = sin^2 13x$;

4. $cos6xcos2x - sin6xsin2x = sin\frac{5\pi}{4}$;

5. $cos^3 xsinx - sin^3 xcosx = \frac{1}{4}$;

6. $4cos\frac{5x}{6} = 3sin^2 x + 3cos^2 x$;

7. $2cos^2 x - 1 = sin\frac{4\pi}{3}$.

Namų darbams

Išspręskite lygtis:

1. $sin^2 2x - cos^2 2x - \frac{1}{2} = 0$

2. $2cos\frac{x}{15} = sin\frac{5\pi}{2}$

3. $2cos3xcosx + 2sin3xsinx = \sqrt{3}$

4. $cosxcos\frac{\pi}{5} + sinxsin\frac{\pi}{5} - sin\frac{\pi}{6} = 0$

5. $cos4xcosx = sin4xsinx - \frac{1}{2}tg\frac{\pi}{3}$

<u>Lygties *tgx* = *a* sprendimas</u>

1. $tg\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 2cos^2x + 2sin^2x$

2. $\frac{1}{7}tg\frac{5x}{3} + 1 = 0$

3. $\frac{2tg3x}{1-tg^2 3x} = tg60°$

4. $\frac{tg\frac{\pi}{6}+tgx}{tg\frac{\pi}{6}tgx-1} = ctg\frac{7\pi}{6}$

5. $tg40° - tgx = 1 + tgxtg40°$

6. $tgx + tg50° + tg70° = tgx \cdot tg50° \cdot tg70°$

Namų darbams

1. $tg\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 2cos\frac{5\pi}{3}$

2. $\frac{2tg\frac{x}{3}}{1-tg^2\frac{x}{3}} = 2sin\frac{5\pi}{6}$

3. $\frac{tgx-tg20°}{1+tgxtg20°} = tg210°$

4. $2tg15° - tgx = 2tgx \cdot tg15° - 1$

Gabiems mokiniams:

$tg^4x + ctg^4x + tg^2x + ctg^2x = 4$

Turiu pasakyti, kad taip trigonometrijos mokau jau ne vienus metus. Ir rezultatai neblogi. Svarbiausia, kad spręsdami šiuos uždavinius, mokiniai nuolat kartoja trigonometrijos formules, kartoja galvodami, ne kaldami mintinai.

<u>Kontrolinis darbas.</u> Paprasčiausių trigonometrinių lygčių tipo sinx = a ir cosx = a sprendimas.

Išspręskite lygtis:

1. $\sqrt{2}\cos\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = sin\frac{\pi}{2}$

2. $\sin\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1-tg^2\frac{\pi}{6}}{1+tg^2\frac{\pi}{6}}$

3. $2cos4xcos2x-2sin4xsin2x=tg\frac{\pi}{3}$

4. $2cos^2x=3sinx+2cos^2 17°+2sin^2 17°$

5. $cos2x-5cosx+3=0$

6. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos(\pi-x)=tg\frac{3\pi}{4}$

Po kelių pamokų rašytas ir antras kontrolinis darbas.

Išspręskite lygtis:

1. $sin^2x-tgx\cdot ctgx=sin^2\frac{x}{6}+cos^2\frac{x}{6}$

2. $2sinxctgx+1=\cos(-x)$

3. Raskite lygties $sin^2x=3+2sinx$ šaknų sumą laipsniais, jei $x\in[0;270°]$.

4. Raskite mažiausią šaknį laipsniais, priklausančią intervalui $(-60°;120°)$, jei $1+sin2x+cos2x=0$.

5. Išspręskite lygtį:

$\frac{cos2x+2cos^2x-2}{12x^2-8\pi x+2\pi^2}=0$

Kontrolinių rezultatai parodė, kad uždaviniai su pašaliniais sprendiniais, sprendžiami sunkiau. Gal kai kam atrodo, kad minėtose trigonometrijos pamokose monotoniškai kartojamas formulių rinkinys. Tegul ir taip, bet jei mes jų neišmokome tvirtai pamokose, tai nėra ko tikėtis, kad jie jas mokysis namuose. Viso darbo apibendrinimas – baigiamasis kontrolinis darbas 12-oje klasėje (skiriamos dvi pamokos).

Išspręskite lygtis:

1. $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2}=5;$
2. 2. $2\cdot 4^{2x}-17\cdot 4^x+8=0;$
3. 3. $-tg^2\frac{10\pi}{3}cos4x+\frac{8}{cos^2\frac{\pi}{4}}\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{2}-2x\right)=0.$

Apskaičiuokite:

$$10\left(3\sqrt{3}+4\right)\cos(\alpha+60°)\,,kai\ sinx=-0{,}6\ ir\ \ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$$

Išspręskite nelygybes:

1. $lg^2x-2lgx\leq\frac{(\sqrt{14}-\sqrt{6})^3(\sqrt{14}+\sqrt{6})^3}{2\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}\right)(16\sqrt[3]{25}-16\sqrt[3]{15}+16\sqrt[3]{9})}$

2. $x^2+x-\frac{3}{2}<f'\left(\frac{\pi}{3}\right),kai\ f(x)=\frac{1}{2}sinx+sinx+ln7$;

3. Raskite mažiausią sveiką x reikšmę, tenkinančią nelygybę;

$\frac{x^2-2x+1}{|x-3|}>f'\left(\frac{\pi}{2}\right),jei\ f(x)=\frac{1-cosx}{sin^2x}+(x-\frac{\pi}{2})^2.$

Kompleksinio matematikos mokymo naudą įrodo ir geometrijos kurso kartojimas ir sisteminimas. Tik gerai išmokę trigonometriją, išvestines, šias žinias sėkmingai taikysime ir geometrijoje. Pavyzdžiui, pakartoję ir susisteminę išvestines, jų taikymą, dvi tris pamokas sprendžiame ir ekstremumų uždavinius:

1. Iš visų stačiakampių, kurių plotas $9n^2$, išrinkite tokį, kurio perimetras būtų mažiausias.

2. Į lygiašonį trikampį, kurio pagrindas lygus 20cm ir aukštinė 8cm, įbrėžtas stačiakampis, kurio viena kraštinė yra trikampio pagrinde. Koks turi būti stačiakampio aukštis, kad jo plotas būtų didžiausias?

3. Langas yra stačiakampio, užbaigto pusskrituliu, formos. Lango perimetras 2p. Kokie turi būti lango matmenys, kad jo plotas būtų didžiausias?

4. Kūgio sudaromoji $l=20cm$. Kokia turi būti kūgio aukštinė, kad jo tūris būtų didžiausias?

5. Į rutulį, kurio spindulys $R=3cm$, įbrėžtas didžiausio tūrio ritinys. Apskaičiuokite jo tūrį.

Pakartojus trigonometriją, ją taikau algebros pamokose, o taip pat įtvirtinu, spręsdama planimetrijos bei stereometrijos uždavinius. Taip dirbdama, stengiuosi apjungti algebrą ir geometriją į vieną sudėtingą, bet neišardomą mechanizmą – matematiką.

Lietuvos matematikos mokytojų asociacija

Onutė Jablonskienė

KOMPLEKSINIS MATEMATIKOS KURSO SISTEMINIMAS

(Darbo patirtis)

Recenzentai M. Vosylienė, J. Mačernis

Atsakingoji redaktorė S. Tauraitė

Redaktorė R. Barysienė

Pasirašyta spausdinti 1993-12-06. 60x84/16. Popierius rašomasis. Sąl.sp. 1. 1,2 apsk. leid. 1. Tiražas 1000egz. Užs. Nr.230 Kaina sutartinė.

Išleido Lietuvos matematikos mokytojų asociacija

Išspaudino LMKI rotaprintas. 2057 Vilnius, Didlaukio 82