PATVIRTINTA
Nacionalinės švietimo agentūros direktoriaus
2021 m. birželio 23 d. įsakymu Nr. VK-350

MATEMATIKOS VALSTYBINIO BRANDOS EGZAMINO KANDIDATŲ DARBŲ VERTINIMO INSTRUKCIJA

Pagrindinė sesija

I dalis

Užd. Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ats.	C	D	C	A	A	D	B	C	B	C

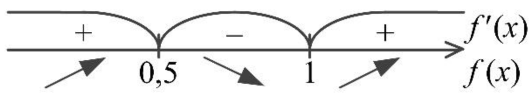
II dalis

11.1	12.
11.2	15π.
11.3	18.
12	6 val. (arba 6 h, arba 6).
13.1	$60° \left(\text{arba } \frac{\pi}{3}\right)$.
13.2	$-\vec{a}-\vec{b}$ (arba $-\vec{b}-\vec{a}$).
14.1	$\frac{1}{36}$ (arba 0,02(7)).
14.2	$\frac{15}{16}$ (arba 0,9375).
15	23.
16	9.
17	30 dB (arba 30).
18	$g(-1)=4-\sqrt{3}$ (arba $4-\sqrt{3}$).

© Nacionalinė švietimo agentūra, 2021 m.

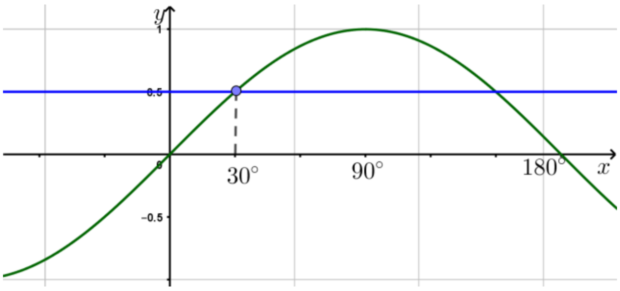
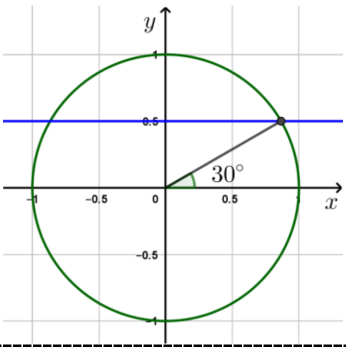
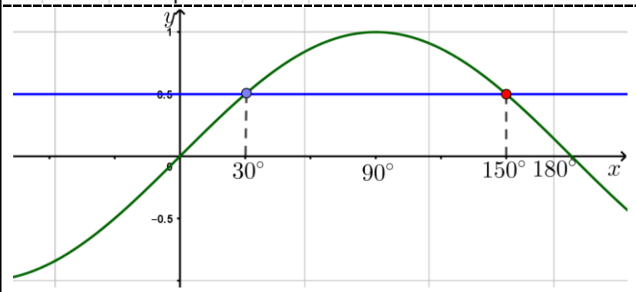
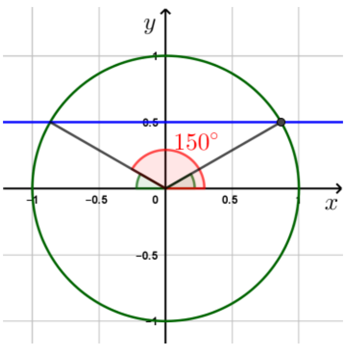
III dalis

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
19		**4**	
19.1		**1**	
	$120 \cdot 1{,}05 = 126$ (Eur). *Ats.:* 126 Eur.	1	Už teisingą atsakymą.
19.2		**2**	
	$126 \cdot 1{,}05 = 132{,}30$ (Eur),	1	Už teisingai apskaičiuotą trečio mėnesio pabaigoje grąžinamą sumą.
	$120 + 126 + 132{,}30 = 378{,}30$ (Eur). *Ats.:* 378,30 Eur.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
19.3		**1**	
	Pagal geometrinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę: $\dfrac{120 \cdot (1{,}05^n - 1)}{1{,}05 - 1} = 2400(1{,}05^n - 1)$. *Ats.:* $2400(1{,}05^n - 1)$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
20		**8**	
20.1		**1**	
	Ats.: $f'(x) = 12x^2 - 18x + 6$.	1	Už teisingą atsakymą.
20.2		**2**	
	$12x^2 - 18x + 6 = 0$, $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1$.	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą.
	 *Ats.:* $x \in (-\infty; 0{,}5), (1; +\infty)$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
20.3		**2**	
	$f'(x) = -1$, $12x^2 - 18x + 6 = -1$, $12x^2 - 18x + 7 = 0$,	1	Už teisingai sudarytą kvadratinę lygtį.
	$D = -12$. Lygtis sprendinių neturi, todėl neegzistuoja toks taškas, kuriame duotosios funkcijos grafikui nubrėžtos liestinės krypties koeficientas lygus -1.	1	Už teisingą pagrindimą.

20.4		**3**	
	$\int_{-1}^{a}(4x^3-9x^2+6x)dx=-3a^3-7,$ $(x^4-3x^3+3x^2)\Big\vert_{-1}^{a}=-3a^3-7,$	1	Už teisingai gautą pirmykštę funkciją.
	$a^4-3a^3+3a^2-(1+3+3)=-3a^3-7,$ $a^4-3a^3+3a^2-7=-3a^3-7,$	1	Už teisingai įstatytus rėžius.
	$a^4+3a^2=0,$ $a^2(a^2+3)=0,$ $a^2=0$ arba $a^2+3=0,$ $a=0$ sprendinių nėra. *Ats.:* $a=0.$	1	Už teisingai išspręstą lygtį.

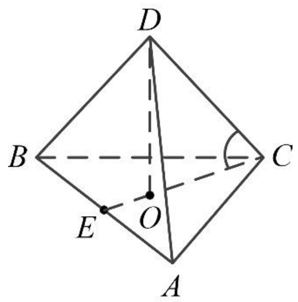
Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
21		**7**	
21.1		**2**	
	$\log_2(9-x^2)=3,$ $9-x^2=8,$	1	Už teisingai pritaikytą logaritmo apibrėžimą.
	$x^2=1,$ $x=-1$ arba $x=1.$ *Ats.:* $x=-1$ arba $x=1.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
21.2		**2**	
	I būdas $2\sin x=1,$ kai $x\in(90°;180°),$ $\sin x=\frac{1}{2},$ $x=(-1)^k\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)+\pi k,\ k\in\mathbf{Z},$ $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$ (arba $x=(-1)^k\cdot 30°+180°k$).	1	Už teisingai pasirinktą lygties sprendimo būdą.
	Kai $k=0,$ tai $x=\frac{\pi}{6}$ (arba $x=30°$) nepriklauso duotajam intervalui. Kai $k=1,$ tai $x=\frac{5\pi}{6}$ (arba $x=150°$) priklauso duotajam intervalui. Kai $k=2,$ tai $x=\frac{13\pi}{6}$ (arba $x=390°$) nepriklauso duotajam intervalui. *Ats.:* $x=150°$ (arba $x=\frac{5\pi}{6}$).	1	Už teisingai pasirinktą sprendinį, priklausantį duotajam intervalui.

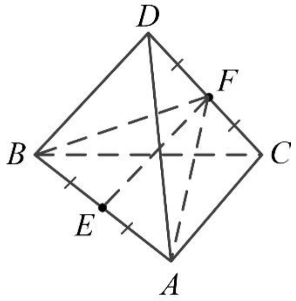
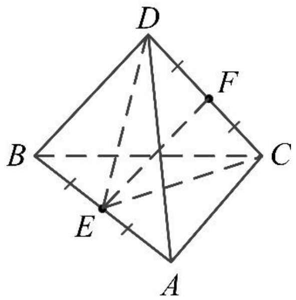
	II būdas $2\sin x=1$, kai $x\in(90°;180°)$, $\sin x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{6}$ (arba $x=30°$).	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (iš trigonometrinių funkcijų reikšmių lentelės teisingai pasirinktą x reikšmę).
	Kadangi $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$, tai $x=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$ (arba $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$, tai $x=180°-30°=150°$). *Ats.:* $x=150°$ (arba $x=\frac{5\pi}{6}$).	1	Už teisingai panaudotą redukcijos formulę.
	III būdas  arba 	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą.
	 arba  *Ats.:* $x=150°$ (arba $x=\frac{5\pi}{6}$).	1	Už teisingai pasirinktą sprendinį, priklausantį duotajam intervalui.

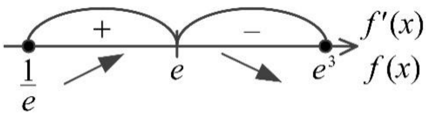
21.3		**3**	
	I būdas $\sqrt{2-x}=\sqrt{x}-2,$ $2-x=x-4\sqrt{x}+4,$	1	Už teisingai atliktus pertvarkymus, abi lygties puses pakėlus kvadratu.
	$4\sqrt{x}=2x+2,$ $2\sqrt{x}=x+1,$ $x^2-2x+1=0,$	1	Už teisingai gautą kvadratinę lygtį.
	$x=1.$ Patikriname: $\sqrt{1}=\sqrt{1}-2.$ Gauname neteisingą lygybę. *Ats.:* Sprendinių nėra (arba Ø).	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	II būdas Lygties $\sqrt{2-x}=\sqrt{x}-2$ sprendiniai turi tenkinti šias sąlygas: $\begin{cases} 2-x\geq 0, \\ x\geq 0, \\ \sqrt{x}-2\geq 0; \end{cases}$	1	Už teisingai sudarytą nelygybių sistemą.
	$\begin{cases} x\leq 2, \\ x\geq 0, \\ x\geq 4. \end{cases}$	1	Už teisingai išspręstas nelygybes.
	Nelygybių sistema sprendinių neturi, todėl ir lygtis neturi sprendinių, nes lygybė nėra teisinga su jokia x reikšme. *Ats.:* Sprendinių nėra (arba Ø).	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	**Sprendimas ir atsakymas**	**Taškai**	**Vertinimas**
22		**4**	
22.1		**1**	
	$\mathbf{P}(R)=\dfrac{1-\dfrac{1}{5}}{2}=\dfrac{2}{5}=0{,}4.$ *Ats.:* 0,4.	1	Už teisingą atsakymą.
22.2.1		**1**	
	$\mathbf{P}(MM)=\mathbf{P}(M)\cdot\mathbf{P}(M)=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{25}=0{,}04.$ *Ats.:* 0,04.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
22.2.2		**2**	
	I būdas Skaičiuojame įvykio A – ištraukti kamuoliukai yra vienodos spalvos – tikimybę: $\mathbf{P}(A)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(\dfrac{1}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25},$	1	Už teisingai apskaičiuotą įvykio A tikimybę.
	$\mathbf{P}(\overline{A})=1-\mathbf{P}(A)=1-\dfrac{9}{25}=\dfrac{16}{25}=0{,}64.$ *Ats.:* 0,64.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

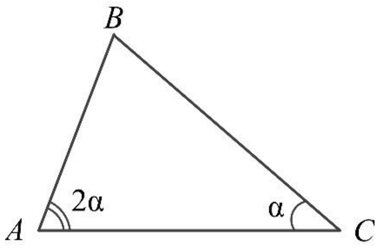
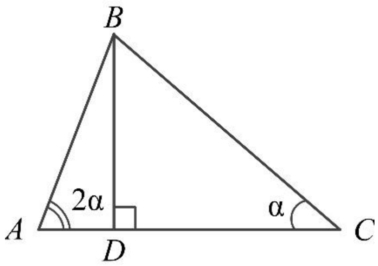
	II būdas Skaičiuojame įvykio B – ištraukti kamuoliukai yra skirtingos spalvos – tikimybę: $\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(MR)+\mathbf{P}(RM)+\mathbf{P}(M\check{Z})+\mathbf{P}(\check{Z}M)+$ $\mathbf{P}(\check{Z}R)+\mathbf{P}(R\check{Z})=$	1	Už bent vieną teisingai apskaičiuotą tikimybę, kai ištrauktų kamuoliukų spalvos skiriasi.
	$=2\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\right)=\frac{16}{25}=0{,}64.$ *Ats.:* 0,64.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	**Sprendimas ir atsakymas**	**Taškai**	**Vertinimas**
23		**5**	
23.1		**1**	
	$S_{\text{pav.}}=4S_{\Delta}=4\cdot\frac{6^2\sqrt{3}}{4}=36\sqrt{3}.$ *Ats.:* $S_{\text{pav.}}=36\sqrt{3}.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
23.2		**2**	
	 **I būdas** $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BA\cdot EC=9\sqrt{3},$ $EC=3\sqrt{3},$ $OC=\frac{2}{3}EC=2\sqrt{3}.$	1	Už teisingai apskaičiuotą OC ilgį.
	Iš stačiojo trikampio DOC: $\cos\angle DCO=\frac{OC}{DC}=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$ *Ats.:* $\cos\angle DCO=\frac{\sqrt{3}}{3}.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	II būdas Pagal kosinusų teoremą trikampyje DEC: $DE^2=DC^2+EC^2-2DC\cdot EC\cos\angle DCE,$	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (pvz., kosinusų teoremos taikymas).
	$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BA\cdot EC=9\sqrt{3},$ $EC=ED=3\sqrt{3},$ $\cos\angle DCE=\frac{27-27-36}{-2\cdot 6\cdot 3\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$ *Ats.:* $\cos\angle DCE=\frac{\sqrt{3}}{3}.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

23.3		**1**	
	I būdas Įrodome, kad $EF \perp AB$.  Sujungę tašką F su tetraedro viršūnėmis B ir A, gauname trikampį ABF, kuris yra lygiašonis, nes $BF = AF$ yra kaip lygių lygiakraščių trikampių ACD ir BCD pusiaukraštinės. Todėl lygiašonio trikampio AFB pusiaukraštinė EF į pagrindą AB yra ir šio trikampio aukštinė, t. y. $EF \perp AB$.	1	Už teisingą įrodymą.
	II būdas Įrodome, kad $EF \perp AB$.  Sujungę tašką E su tetraedro viršūnėmis D ir C, gauname, kad $AB \perp DE$ ir $AB \perp EC$ (lygiakraščio trikampio pusiaukraštinė sutampa su aukštine). Todėl AB yra statmena plokštumai DEC, todėl ir bet kuriai tos plokštumos tiesei, t. y. $EF \perp AB$.	1	Už teisingą įrodymą.
23.4		**1**	
	Analogiškai įrodome, kad EF yra lygiašonio trikampio CED pusiaukraštinė, todėl $EF \perp CD$. Kadangi $EF \perp AB$ ir $EF \perp DC$, tai atkarpos EF ilgis lygus atstumui tarp prasilenkiančių tiesių.	1	Už teisingą įrodymą.

<table>
<tr><td>24</td><td colspan="2"></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="2">$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,</td><td>1</td><td>Už teisingai rastą išvestinę.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$,
$1-\ln x=0$,
$\ln x=1$,
$x=e$.</td><td>1</td><td>Už teisingai rastą kritinį tašką.</td></tr>
<tr><td>I būdas


Kadangi
$f'(1)=1>0$,
$f'(e^2)=-\dfrac{1}{e^4}<0$,
tai taške $x=e$ funkcija įgyja didžiausią reikšmę.
Ats.: $x=e$.</td><td>II būdas
Apskaičiuojame funkcijos reikšmes intervalo galuose ir kritiniame taške bei jas palyginame:
$f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-e$,
$f(e)=\dfrac{1}{e}$,
$f\left(e^3\right)=\dfrac{3}{e^3}$.
Kadangi
$f\left(\dfrac{1}{e}\right)<f\left(e^3\right)<f(e)$, tai taške $x=e$ funkcija įgyja didžiausią reikšmę.
Ats.: $x=e$.</td><td>1</td><td>Už teisingą pagrindimą.</td></tr>
</table>

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
25		**3**	
	I būdas  Tegul $AB = a.$ Tai $BC = ka.$ Pagal sinusų teoremą: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{ka}{\sin 2\alpha}$, $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{k}{\sin 2\alpha}$,	1	Už teisingai pritaikytą sinusų teoremą.
	$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{k}{2\sin\alpha\cos\alpha}$, $1 = \frac{k}{2\cos\alpha}$, $\cos\alpha = \frac{k}{2}$.	1	Už teisingai panaudotą dvigubo kampo sinuso formulę ir teisingą pagrindimą.
	Kai $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, tai $\frac{1}{2} < \cos\alpha < 1$, todėl $\frac{1}{2} < \frac{k}{2} < 1$, $1 < k < 2$. *Ats.:* $1 < k < 2$.	1	Už teisingai nustatytas *k* reikšmes.
	II būdas  Brėžiame aukštinę *BD*. Iš stačiojo ΔABD, $BD = \sin 2\alpha \cdot AB$ Iš stačiojo ΔBCD, $BD = \sin\alpha \cdot AB \cdot k$	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (abi teisingas aukštinės išraiškas per kampo sinusą).
	$\frac{BD}{BD} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha \cdot k}$, $\cos\alpha = \frac{k}{2}$.	1	Už teisingą pagrindimą.
	Kai $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, tai $\frac{1}{2} < \cos\alpha < 1$, todėl $\frac{1}{2} < \frac{k}{2} < 1$, $1 < k < 2$. *Ats.:* $1 < k < 2$.	1	Už teisingai nustatytas *k* reikšmės.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
26		**4**	
	I būdas $\begin{cases} b-a=c-b; \\ \frac{c}{b}=\frac{a}{c}. \end{cases}$	1	Už bent vieną teisingai sudarytą lygybę.
	$\begin{cases} 2b=a+c; \\ \frac{2c}{a+c}=\frac{a}{c}. \end{cases}$ Iš antros lygybės: $2c^2=a^2+ac,$	1	Už teisingai gautą lygybę su dviem nežinomaisiais.
	$c^2-a^2=ac-c^2,$ $(c-a)(c+a)=c(a-c),$ Kadangi $a \neq c$, tai $c+a=-c,$ $a=-2c,$	1	Už teisingai gautą a išraišką per c (arba atvirkščiai).
	$q=\frac{a}{c}=\frac{-2c}{c}=-2.$ *Ats.:* $q=-2.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	II būdas $\begin{cases} b-a=c-b, \\ \frac{c}{b}=\frac{a}{c}; \end{cases}$	1	Už bent vieną teisingai sudarytą lygybę.
	$\begin{cases} a=2b-c, \\ \frac{c}{b}=\frac{2b-c}{c}. \end{cases}$ Iš antros lygybės: $\frac{c}{b}=\frac{2b}{c}-1,$	1	Už teisingai gautą lygybę su dviem nežinomaisiais.
	$q=\frac{2}{q}-1,$ $q^2+q-2=0,$	1	Už teisingai sudarytą lygtį geometrinės progresijos vardikliui q apskaičiuoti.
	$q=-2$ arba $q=1$ (netenkina sąlygos $a \neq b$). *Ats.:* $q=-2$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

	III būdas Jei b, c, a – iš eilės einantys geometrinės progresijos nariai, tai $c = bq,\ a = bq^2$, tuomet	1	Už teisingai pritaikytą geometrinės progresijos bendrojo nario formulę.
	$bq^2,\ b,\ bq$ – iš eilės einantys aritmetinės progresijos nariai, tai $b - bq^2 = bq - b,$	1	Už teisingai pritaikytą aritmetinės progresijos apibrėžtį.
	$bq^2 + bq - 2b = 0 \mid : b \neq 0,$ $q^2 + q - 2 = 0,$	1	Už teisingai gautą kvadratinę lygtį.
	$q_1 = -2,\ q_2 = 1$ (netenkina sąlygos $a \neq b$). *Ats.:* $q = -2$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	IV būdas $\begin{cases} b - a = c - b; \\ \dfrac{c}{b} = \dfrac{a}{c}. \end{cases}$	1	Už bent vieną teisingai sudarytą lygybę.
	$\begin{cases} c = 2b - a; \\ \dfrac{2b-a}{b} = \dfrac{a}{2b-a}. \end{cases}$	1	Už teisingai gautą lygybę su dviem nežinomaisiais.
	Iš antros lygybės $(2b - a)^2 = ab,$ $4b^2 - 5ab + a^2 = 0,$ $\dfrac{a^2}{b^2} - 5\dfrac{a}{b} + 4 = 0,$ $q^4 - 5q^2 + 4 = 0,$	1	Už teisingai sudarytą lygtį geometrinės progresijos q^2 apskaičiuoti.
	$q^2 = 4$ arba $q^2 = 1,$ $q = -1$ arba $q = 1$ – netenkina sąlygos $a \neq b,$ $q = 2$ arba $q = -2,$ $q = 2$ – netinka, nes jei aritmetinės progresijos $a < b < c,$ tai geometrinės progresijos $b < c > a,$ ir atitinkamai jei aritmetinės progresijos $a > b > c,$ tai geometrinės progresijos $b > c < a.$ Tai įmanoma tada ir tik tada, kai $q < 0$. *Ats.:* $q = -2$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Pastaba. *Taškai skiriami ir už bet kurį kitą teisingą sprendimą, atsakymą.*