

Matematikos brandos egzamino mokinių pasiekimų lygių aprašas su pavyzdžiais

Žinios ir supratimas	
Skaičiai, skaičiavimai, reiškiniai. Lygtys, nelyybės ir jų sistemos	
<p>Patenkinamas pasiekimų lygis Paprastose standartinėse situacijose atpažįsta ir teisingai vartoja (reprodukuodamas) pagrindines matematikos sąvokas, žymenis, objektus, modelius.</p> <p>Paprastose standartinėse situacijose sieja (atpažindamas ir suprasdamas, skaitydamas, rasdamas, paprasčiausiais atvejais transformuodamas į kitą pavidalą) įvairiais būdais (matematikos žymenimis, schemomis, lentelėmis, grafikais, diagramomis, tekstu ir t. t.) pateiktą matematinę informaciją, tiesiogiai taiko formules, savybes, sąryšius, atlieka standartinės procedūras, naudojami formulių rinkiniu, skaičiuotuvu.</p>	<p><i>1 pavyzdys</i> Aritmetinės progresijos pirmasis narys $a_1 = 10$, o antrasis $a_2 = 4$. Apskaičiuokite pirmųjų šimto šios progresijos narių sumą S_{100}.</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p><i>2 pavyzdys</i> Duota $\lg 2 + \lg 3 = \lg a$. Raskite skaičiaus a reikšmę.</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p><i>3 pavyzdys</i> a) Išspręskite lygtį $3^x = \frac{1}{81}$. b) Išspręskite nelygybę $\log_2 x < \log_2 3$.</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p><i>4 pavyzdys</i> Apskaičiuokite $\cos \alpha$, jei $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ir $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$.</p>
<p>Pagrindinis pasiekimų lygis Nesudėtingose standartinėse situacijose atpažįsta ir teisingai vartoja (reprodukuodamas) matematinės sąvokas, žymenis, objektus, modelius. Apibrėžia pagrindines matematikos sąvokas.</p> <p>Nesudėtingose standartinėse situacijose sieja (atpažindamas ir suprasdamas, skaitydamas, rasdamas, paprasčiausiais atvejais transformuodamas į kitą pavidalą) įvairiais būdais (matematikos žymenimis, schemomis, lentelėmis, grafikais, diagramomis, tekstu ir t. t.) pateiktą matematinę informaciją, taiko formules, savybes,</p>	<p><i>1 pavyzdys</i> a) Kurie skaičiai yra trys iš eilės einantys aritmetinės progresijos nariai? A $\sqrt{5}; \sqrt{6}; \sqrt{7}$ B $\sqrt{3}; \sqrt{6}; \sqrt{12}$ C $\sqrt{2}; \sqrt{8}; \sqrt{18}$ D $\sqrt{2}; \sqrt{5}; \sqrt{8}$</p> <p>b) Apskaičiuokite aritmetinės progresijos 3; 8; 13; ...; 1018 narių sumą.</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p><i>2 pavyzdys</i> Apskaičiuokite reiškinio $1000^{\frac{1}{\lg 4}}$ reikšmę.</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p><i>3 pavyzdys</i> Išspręskite lygtį $9^x - 3^x = 6$.</p>

<p>sąryšius, atlieka standartines procedūras, naudojami formulių rinkiniu, skaičiuotuvu.</p>	<p>4 pavyzdys</p> <p>a) Remdamiesi brėžiniu, nustatykite, kam lygus $\cos\alpha$.</p> <p>A – 0,8 B – 0,6 C 0,6 D 0,8</p> <p>b) Išspręskite lygtį $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{2}$.</p>
<p>Aukštesnysis pasiekimų lygis Nestandartinėse situacijose atpažįsta ir teisingai vartoja (reprodukuodamas) matematinės sąvokas, žymenis, objektus, modelius. Tiksliai apibrėžia matematikos sąvokas.</p> <p>Nestandartinėse situacijose sieja (atpažindamas ir suprasdamas, skaitydamas, rasdamas, paprasčiausiais atvejais transformuodamas į kitą pavidalą) įvairiais būdais (matematikos žymenimis, schemomis, lentelėmis, grafikais, diagramomis, tekstu ir t. t.) pateiktą matematinę informaciją, taiko formules, savybes, sąryšius, atlieka procedūras, naudojami formulių rinkiniu, skaičiuotuvu.</p>	<p>1 pavyzdys</p> <p>Sekos n-tasis narys apskaičiuojamas pagal formulę $a_n = \frac{n-3}{2}$. Apskaičiuokite šios sekos pirmųjų šimto narių sumą.</p> <hr/> <p>2 pavyzdys</p> <p>Raskite $\lg 5$, jei $\lg 2 = a$.</p> <hr/> <p>3 pavyzdys</p> <p>Išspręskite lygtį $a^x = \pi^{x-3}$, jei a yra teigiamas, nelygus 1 skaičius.</p> <hr/> <p>4 pavyzdys</p> <p>Apskaičiuokite $\operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{tg}2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg}88^\circ \cdot \operatorname{tg}89^\circ$.</p>
Žinios ir supratimas	
Geometrija	

Patenkinamas pasiekimų lygis

Paprastose standartinėse situacijose atpažįsta ir teisingai vartoja (reprodukuodamas) pagrindines matematikos sąvokas, žymenis, objektus, modelius.

Paprastose standartinėse situacijose sieja (atpažindamas ir suprindamas, skaitydamas, rasdamas, paprasčiausiais atvejais transformuodamas į kitą pavidalą) įvairiais būdais (matematikos žymenimis, schemomis, lentelėmis, grafikais, diagramomis, tekstu ir t. t.) pateiktą matematinę informaciją, tiesiogiai taiko formules, savybes, sąryšius, atlieka standartinės procedūras, naudojami formulų rinkiniu, skaičiuotuviu.

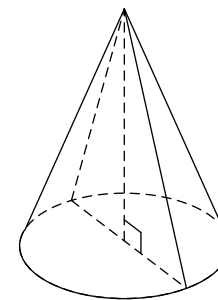
Pavyzdys

a) Kuris užrašas simboliais yra sinusų teorema, jei a, b, c – trikampio kraštinių ilgi, o α, β, γ – atitinkamų kampų prieš tas kraštines didumai?

$$A \quad S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad B \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \quad C \quad \sin \alpha = \frac{b}{c} \quad D \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

b) Kūgio sudaromoji dvigubai ilgesnė už jo pagrindo spindulį. Kuris teiginys apie šį kūgį yra teisingas?

- A Kūgio ašinis pjūvis yra statusis trikampis.
- B Kūgio sudaromoji su kūgio aukštine sudaro 60° kampą.
- C Kūgio sudaromoji pasvirusi į kūgio pagrindo plokštumą 30° kampu.
- D Kūgio pagrindo skersmuo dvigubai ilgesnis už kūgio sudaromąją.

**Pagrindinis pasiekimų lygis**

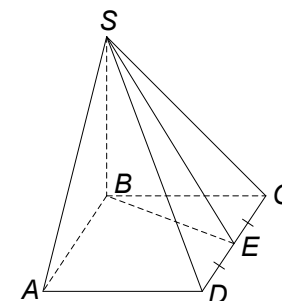
Nesudėtingose standartinėse situacijose atpažįsta ir teisingai vartoja (reprodukuodamas) matematinės sąvokas, žymenis, objektus, modelius. Apibrėžia pagrindines matematikos sąvokas.

Nesudėtingose standartinėse situacijose sieja (atpažindamas ir suprindamas, skaitydamas, rasdamas, paprasčiausiais atvejais transformuodamas į kitą pavidalą) įvairiais būdais (matematikos žymenimis, schemomis, lentelėmis, grafikais, diagramomis, tekstu ir t. t.) pateiktą matematinę informaciją, taiko formules, savybes, sąryšius, atlieka standartinės procedūras,

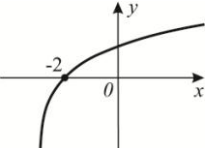
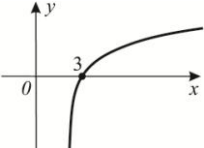
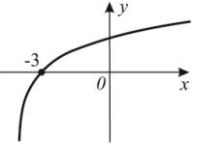
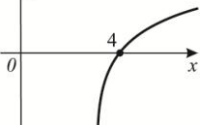
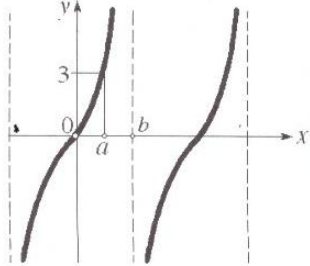
Pavyzdys

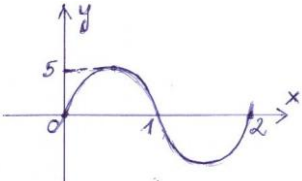
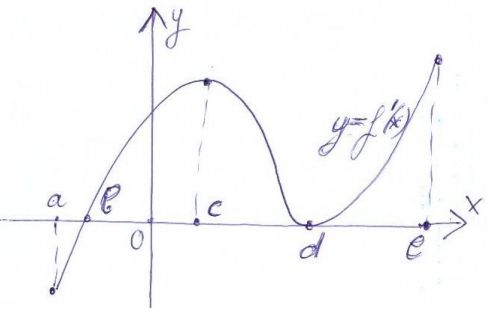
Piramidės $SABCD$ pagrindas yra stačiakampis $ABCD$, aukštinė – SB . Taškas E – briaunos CD vidurio taškas. Kuris teiginys apie šią piramidę yra neteisingas?

- A $SB \perp AB$
- B $SB \perp BE$
- C $SB \perp DC$
- D $SA \perp AD$
- E $SE \perp DC$



naudojasi formulių rinkiniu, skaičiuotuvu.	
<p>Aukštesnysis pasiekimų lygis Nestandartinėse situacijose atpažįsta ir teisingai vartoja (reprodukuodamas) matematinės sąvokas, žymenis, objektus, modelius. Tiksliai apibrėžia matematikos sąvokas.</p> <p>Nestandartinėse situacijose sieja (atpažindamas ir suprasdamas, skaitydamas, rasdamas, paprasčiausiais atvejais transformuodamas į kitą pavidalą) įvairiais būdais (matematikos žymenimis, schemomis, lentelėmis, grafikais, diagramomis, tekstu ir t. t.) pateiktą matematinę informaciją, taiko formules, savybes, sąryšius, atlieka procedūras, naudojami formulių rinkiniu, skaičiuotuvu.</p>	<p><i>Pavyzdys</i> Taškas A nepriklauso plokštumai CBD. Atkarpos $AB \perp BD$, $AB \perp BC$, $AE \perp CD$, o $E \in CD$. Kuris iš pateiktų teiginių yra neteisingas?</p> <p>A $AB \perp CD$</p> <p>B $BE \perp DC$</p> <p>C $AB \perp$ plokštumai CBD</p> <p>D $AE \perp$ plokštumai CBD</p>
Žinios ir supratimas	
Funkcijos ir analizės pradmenys	
<p>Patenkinamas pasiekimų lygis Paprastose standartinėse situacijose atpažįsta ir teisingai vartoja (reprodukuodamas) pagrindines matematikos sąvokas, žymenis, objektus, modelius.</p> <p>Paprastose standartinėse situacijose sieja (atpažindamas ir suprasdamas, skaitydamas, rasdamas, paprasčiausiais atvejais transformuodamas į kitą pavidalą) įvairiais būdais (matematikos žymenimis, schemomis, lentelėmis, grafikais, diagramomis, tekstu ir t. t.) pateiktą matematinę informaciją, tiesiogiai taiko formules, savybes, sąryšius, atlieka standartinės procedūras, naudojami formulių rinkiniu, skaičiuotuvu.</p>	<p><i>1 pavyzdys</i></p> <p>a) Nurodykite teisingą teiginį:</p> <p>A $(-\infty;3) \cap [3;5) = (-\infty;5)$</p> <p>B $(-\infty;3) \cup [3;5) = (-\infty;3]$</p> <p>C $[3;5) \cap [5;+\infty) = [3;+\infty)$</p> <p>D $[3;5) \cup [5;+\infty) = [3;+\infty)$</p> <p>b) Kuri iš funkcijų yra didėjanti intervale $x \in (-\infty;+\infty)$?</p> <p>A $f(x) = 5 - 3x$ B $f(x) = 0,1^x$ C $f(x) = \sin x$ D $f(x) = x^3$</p>

	<p><i>2 pavyzdys</i> Kuris iš žemiau pateiktų grafikų yra funkcijos $g(x) = \log_2(x+3)$ grafiko eskizas?</p> <p>A </p> <p>B </p> <p>C </p> <p>D </p>
<p>Pagrindinis pasiekimų lygis Nesudėtingose standartinėse situacijose atpažįsta ir teisingai vartoja (reprodukuodamas) matematinės sąvokas, žymenis, objektus, modelius. Apibrėžia pagrindines matematikos sąvokas.</p> <p>Nesudėtingose standartinėse situacijose sieja (atpažindamas ir suprasdamas, skaitydamas, rasdamas, paprasčiausiais atvejais transformuodamas į kitą pavidalą) įvairiais būdais (matematikos žymenimis, schemomis, lentelėmis, grafikais, diagramomis, tekstu ir t. t.) pateiktą matematinę informaciją, taiko formules, savybes, sąryšius, atlieka standartinės procedūras, naudojami formulių rinkiniu, skaičiuotuvu.</p>	<p><i>3 pavyzdys</i> $f(x) = 2x^3 - 4$. Apskaičiuokite $f'(-2)$.</p> <hr/> <p><i>1 pavyzdys</i> Funkcijos $f(x) = \lg(x+2) + \sqrt{1-x}$ apibrėžimo sritis yra: A $(-2; +\infty)$ B $(-\infty; 1)$ C $[-2; 1]$ D $(1; +\infty)$ E $(-2; 1]$</p> <p><i>2 pavyzdys</i> Paveikslėlyje pavaizduotas funkcijos $y = 3\operatorname{tg} 2x$ grafiko dalies eskizas.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Apskaičiuokite a reikšmę. 2. Taške b funkcija $y = 3\operatorname{tg}(2x)$ neapibrėžta. Raskite b reikšmę.  <p><i>3 pavyzdys</i> a) Funkcijos $f(x) = (x^{10} + 1)^{10}$ išvestinė yra: A $10(x^{10} + 1)^9$ B $100(x^{10} + 1)^9$ C $100x^9(x^{10} + 1)^9$ D $x^9(x^{10} + 1)^9$ E $100x(x^{10} + 1)^9$.</p>

	<p>b) Raskite funkcijos $f(x) = x \ln x$ grafiko liestinės, nubrėžtos taške $A(1; 0)$, krypties koeficientą.</p>
<p>Aukštesnysis pasiekimų lygis Nestandartinėse situacijose atpažįsta ir teisingai vartoja (reprodukuodamas) matematinės sąvokas, žymenis, objektus, modelius. Tiksliai apibrėžia matematikos sąvokas.</p>	<p>1 pavyzdys Paveiksle pavaizduota funkcijos $f(x) = a \sin(bx)$ grafiko dalis. Nustatykite koeficientų a ir b reikšmes.</p> 
<p>Nestandartinėse situacijose sieja (atpažindamas ir suprasedamas, skaitydamas, rasdamas, paprasčiausiais atvejais transformuodamas į kitą pavidalą) įvairiais būdais (matematikos žymenimis, schemomis, lentelėmis, grafikais, diagramomis, tekstu ir t. t.) pateiktą matematinę informaciją, taiko formules, savybes, sąryšius, atlieka procedūras, naudojami formuliu rinkiniu, skaičiuotuvu.</p>	<p>2 pavyzdys Nustatykite funkcijos $f(x) = \sqrt{3 + 2 \sin x}$ reikšmių sritį.</p> <p>3 pavyzdys a) Duota $\int_0^3 f(x) dx = 5$. Apskaičiuokite $\int_{-3}^3 f(x) dx$, jei funkcija $f(x)$ yra nelyginė.</p> <p>b) Paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = f(x)$ išvestinės grafikas intervale $x \in [a; e]$. $f'(x) = 0$, kai $x = b$ ir $x = d$. $x = c$ yra $y = f'(x)$ maksimumo taškas, o $x = d$ yra $y = f'(x)$ minimumo taškas. Nurodykite teisingą teiginį:</p> <p>A Funkcija $y = f(x)$ turi tik vieną kritinį tašką. B Funkcija $y = f(x)$ turi du ekstremumo taškus. C Funkcijos $y = f(x)$ turi vieną maksimumo tašką. D Funkcija $y = f(x)$ turi tik vieną ekstremumo tašką.</p> 

Žinios ir supratimas

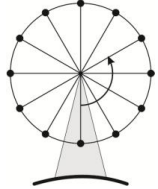
Kombinatorika, tikimybės ir statistika

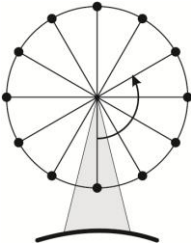
<p>Patenkinamas pasiekimų lygis Paprastose standartinėse situacijose atpažįsta ir teisingai vartoja (reprodukuodamas) pagrindines matematikos sąvokas, žymenis, objektus, modelius.</p> <p>Paprastose standartinėse situacijose sieja (atpažindamas ir suprasdamas, skaitydamas, rasdamas, paprasčiausiais atvejais transformuodamas į kitą pavidalą) įvairiais būdais (matematikos žymenimis, schemomis, lentelėmis, grafikais, diagramomis, tekstu ir t. t.) pateiktą matematinę informaciją, tiesiogiai taiko formules, savybes, sąryšius, atlieka standartinės procedūras, naudojami formulių rinkiniu, skaičiuotuvu.</p>	<p><i>1 pavyzdys</i> Dešimties mokinių kontrolinio darbo įvertinimai yra tokie: 10; 5; 6; 8; 4; 7; 7; 6; 9; 7. Raskite įvertinimų modą ir medianą.</p> <hr/> <p><i>2 pavyzdys</i> a) Kiek triženklių skaičių, užrašomų skirtingais skaitmenimis, galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 7? A 4 B 8 C 12 D 24</p> <p>b) Iš skaitmenų 0, 3, 5 sudaromi visi galimi triženkliai skaičiai. Skaičiaus skaitmenys gali kartotis (pvz., 555, 300, 303, ...). 1. Kiek tokių triženklių skaičių galima sudaryti? 2. Apskaičiuokite tikimybę, kad iš sudarytų skaičių atsitiktinai paimtas skaičius dalijasi iš 3.</p>
<p>Pagrindinis pasiekimų lygis Nesudėtingose standartinėse situacijose atpažįsta ir teisingai vartoja (reprodukuodamas) matematinės sąvokas, žymenis, objektus, modelius. Apibrėžia pagrindines matematikos sąvokas.</p> <p>Nesudėtingose standartinėse situacijose sieja (atpažindamas ir suprasdamas, skaitydamas, rasdamas, paprasčiausiais atvejais transformuodamas į kitą pavidalą) įvairiais būdais (matematikos žymenimis, schemomis, lentelėmis, grafikais, diagramomis, tekstu ir t. t.) pateiktą matematinę informaciją, taiko formules, savybes,</p>	<p><i>1 pavyzdys</i> Yra 5 bandomieji sklypai. Kiekviename iš jų pasodinta po 100 pupų. Po nustatyto laiko sklypuose sudygo atitinkamai 72, 82, 86, 80 ir x pupų. Žinoma, kad sudygusių pupų skaičių moda, mediana ir vidurkis sutampa. Raskite nežinomą pupų skaičių x. A 86 B 84 C 82 D 80 E 72</p> <hr/> <p><i>2 pavyzdys</i> a) Tikimybė, kad reikalinga knyga yra pirmos bibliotekos fonde, lygi 0,7, o kad ši knyga yra antros bibliotekos fonde, lygi 0,55. Apskaičiuokite tikimybę, kad knyga yra bent vienos bibliotekos fonde. b) Žinoma, kad $P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}P(\bar{A})$; čia $P(A)$ - įvykio A tikimybė, $P(\bar{A})$ - įvykiui A priešingo įvykio tikimybė. Apskaičiuokite $P(A)$.</p>

<p>sąryšius, atlieka standartines procedūras, naudojami formulių rinkiniu, skaičiuotuvu.</p>	<p><i>3 pavyzdys</i> Baikite pildyti atsitiktinio dydžio X skirstinio lentelę:</p> <table border="1" data-bbox="842 342 1608 472"> <tr> <td>X</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> <td>$\frac{1}{3}$</td> <td>$\frac{5}{18}$</td> <td></td> <td>$\frac{1}{36}$</td> </tr> </table>	X	2	3	4	5	6	P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$		$\frac{1}{36}$
X	2	3	4	5	6								
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$		$\frac{1}{36}$								
<p>Aukštesnysis pasiekimų lygis Nestandardinėse situacijose atpažįsta ir teisingai vartoja (reprodukuodamas) matematinės sąvokas, žymenis, objektus, modelius. Tiksliai apibrėžia matematikos sąvokas.</p> <p>Nestandardinėse situacijose sieja (atpažindamas ir suprasedamas, skaitydamas, rasdamas, paprasčiausiais atvejais transformuodamas į kitą pavidalą) įvairiais būdais (matematikos žymenimis, schemomis, lentelėmis, grafikais, diagramomis, tekstu ir t. t.) pateiktą matematinę informaciją, taiko formules, savybes, sąryšius, atlieka procedūras, naudojami formulių rinkiniu, skaičiuotuvu.</p>	<p><i>1 pavyzdys</i> Vienos klasės mokinių kontrolinio darbo įvertinimų mediana lygi 7,5. Kelių procentų mokinių įvertinimas yra mažesnis arba lygus 7, jei žinoma, kad kontrolinį darbą rašė lyginis skaičius mokinių. (Kontrolinio įvertinimai yra natūralieji skaičiai).</p> <p><i>2 pavyzdys</i> Įvykio A tikimybė yra p, o įvykio B tikimybė yra q. Kokiam skaičių intervalui priklauso įvykio $A \cap B$ tikimybė, jei įvykiai A ir B yra nepriklausomi?</p>												

Matematikos taikymai

Skaičiai, skaičiavimai, reiškiniai. Lygtys, nelyybės ir jų sistemos

<p>Patenkinamas pasiekimų lygis Paprastais atvejais modeliuoja tekste, įvairiose lentelėse, schemose, grafikuose pateiktą informaciją, taiko ir derina kelias (1–2, o ypač įprastais atvejais – 3–4) standartines procedūras, žinomus matematikos metodus ir modelius paprastiems praktinio bei matematinio turinio uždaviniams spręsti.</p>	<p><i>1 pavyzdys</i> Iš sugedusio vandens čiaupo per pirmą valandą nuo gedimo pradžios prilašėjo 200 mililitrų vandens. Buto savininkas pastebėjo, kad per kiekvieną kitą valandą prilaša 100 mililitrų vandens daugiau nei per ankstesniąją. Kiek mililitrų vandens prilašės per pirmąsias 5 valandas?</p> <hr/> <p><i>2 pavyzdys</i> Paveiksle pavaizduotas apžvalgos ratas su kapsulėmis keleiviams. Kapsulės ant apžvalgos rato aukštį H nuo žemės galima apskaičiuoti pagal formulę $H(\alpha) = 60,5 - 60 \cos \alpha$; čia α yra kapsulės posūkio kampas (žr. pav.) ir $0 \leq \alpha \leq 360^\circ$. Apskaičiuokite kokiam aukštyje bus kapsulė, jei jos posūkio kampas lygus 120°.</p> 
<p>Pagrindinis pasiekimų lygis Nesudėtingais atvejais modeliuoja tekste, įvairiose lentelėse, schemose, grafikuose pateiktą informaciją, taiko ir derina kelias (3–4) standartines procedūras, žinomus matematikos metodus ir modelius nesudėtingiems praktinio, kitų mokomųjų dalykų bei matematinio turinio uždaviniams spręsti.</p>	<p><i>1 pavyzdys</i></p> <p>a) Antanas ketveriems metams pasiskolino iš banko 12 000 Eur tokiomis sąlygomis: kiekvieno mėnesio gale jis sumoka 3 % palūkanų nuo negrąžintos (likusios) paskolos dalies ir po to dar grąžina bankui pastovią 250 Lt paskolos mėnesio įmoką. Apskaičiuokite kiek iš viso pinigų (palūkanos ir paskola) bankui sumokės Antanas per 4 metus.</p> <p>b) Seka $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ yra aritmetinė progresija, kurios $a_5 + a_n = a_2 + a_{10}$. Raskite n.</p> <p>c) Apskaičiuokite sumą $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$.</p> <p>(Nurodymas. Taikykite tapatybę $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.)</p>

	<p><i>2 pavyzdys</i></p> <p>a) Paveiksle pavaizduotas apžvalgos ratas su kapsulėmis keleiviams. Rato spindulys lygus 60 m. Kapsulės ant apžvalgos rato aukštį H nuo žemės galima apskaičiuoti pagal formulę $H(\alpha) = 60,5 - 60 \cos \alpha$; čia α yra kapsulės posūkio kampas (žr. pav.) ir $0 \leq \alpha \leq 360^\circ$. Raskite į kokį didžiausią aukštį gali pakilti kapsulė.</p> <p>b) Jei $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha} = 2$, tai $\operatorname{tg} \alpha$ lygus:</p> <p style="text-align: center;">A $\frac{1}{3}$ B $\frac{1}{2}$ C 2 D 3</p> 
<p>Aukštesnysis pasiekimų lygis</p> <p>Visais atvejais aiškiai ir tiksliai modeliuoja tekste, įvairiose lentelėse, schemose, grafikuose pateiktą informaciją, taiko ir derina kelias procedūras, žinomus matematikos metodus ir modelius įvairiems praktinio, kitų mokomųjų dalykų bei matematinio turinio uždaviniams spręsti.</p>	<p><i>1 pavyzdys</i></p> <p>Duoti keturi teigiami skaičiai. Pirmas, antras ir trečias skaičiai sudaro aritmetinę progresiją, o šių skaičių suma lygi 12. Antras, trečias ir ketvirtas skaičiai sudaro geometrinę progresiją, jų suma lygi 19. Raskite šiuos keturis skaičius.</p> <hr/> <p><i>2 pavyzdys</i></p> <p>Apskaičiuokite $\sin(2\alpha)$ reikšmę, kai $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{3}$.</p>

Matematikos taikymai

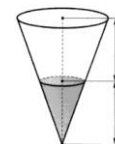
Geometrija

Patenkinamas pasiekimų lygis
Paprastais atvejais modeliuoja tekste, įvairiose lentelėse, schemose, grafikuose pateiktą informaciją, taiko ir derina kelias (1–2, o ypač įprastais atvejais – 3–4) standartines procedūras, žinomus matematikos metodus ir modelius paprastiems praktinio bei matematinio turinio uždaviniams spręsti.

1 pavyzdys

Kūgio formos 1000 mililitrų talpos indas iki pusės pripiltas vandens (žr. pav.). Kiek mililitrų vandens yra šiame inde?

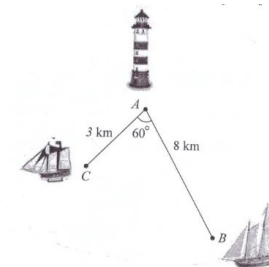
- A 100
- B 125
- C 250
- D 333
- E 500



2 pavyzdys

Du laivai, esantys taškuose C ir B , nutolę nuo švyturio A atstumais, lygiais 3 km ir 8 km. Jei $\angle CAB = 60^\circ$, tai atstumas tarp laivų lygus:

- A 4 km
- B 7 km
- C 11 km
- D $\sqrt{73}$ km
- E 49 km



Pagrindinis pasiekimų lygis
Nesudėtingais atvejais modeliuoja tekste, įvairiose lentelėse, schemose, grafikuose pateiktą informaciją, taiko ir derina kelias (3–4) standartines procedūras, žinomus matematikos metodus ir modelius nesudėtingiems praktinio, kitų mokomųjų dalykų bei matematinio turinio

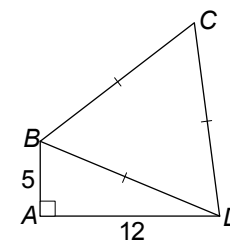
1 pavyzdys

Rutulio formos žaislui nudažyti reikia 150g dažų. Kiek gramų tokių pačių dažų reikia tris kartus didesnio spindulio rutulio formos žaislui nudažyti?

2 pavyzdys

a) Keturkampio $ABCD$ kampas A yra status. $AB = 5$, $AD = 12$, $BC = CD = BD$.

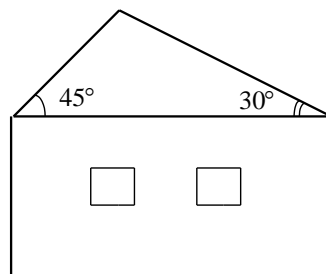
Apskaičiuokite keturkampio $ABCD$ plotą.



b) Statant pirties stogą, 6 m ilgio gegnė turėjo būti padalyta į dvi dalis taip, kad tos dalys su atrama

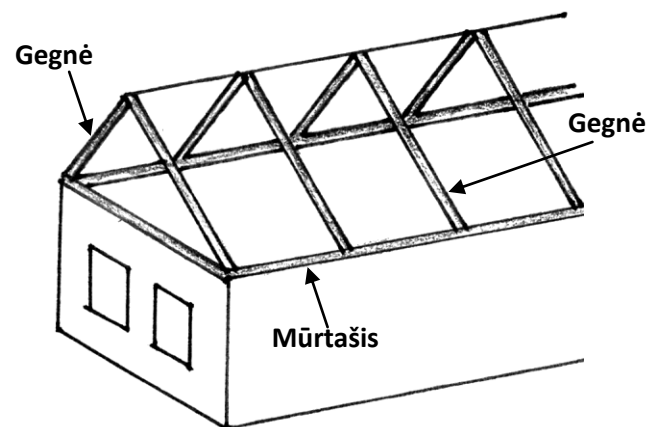
uždaviniams spręsti.

sudarytų 45° ir 30° kampus (žr. 1 pav.). Raskite trumpesniosios dalies ilgį. Atsakymą suapvalinkite iki dešimtųjų metro dalių. Laikykite, kad $\sqrt{2} = 1,41$.



1 pav.

Gegnė – šlaitinio stogo laikantysis konstrukcinis elementas, kurio vienas galas remiasi į atramą (mūrtašį) (žr. 2 pav.).

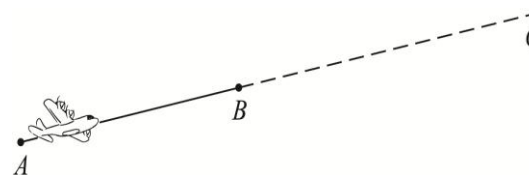


2 pav.

3 pavyzdys

a) Su kuria x reikšme vektoriai $\vec{c} = (x-5)\vec{i} + \vec{j}$ ir $\vec{d} = (2x-1)\vec{i} - \vec{j}$ yra kolinearūs? (\vec{i} ir \vec{j} – vienetiniai vektoriai koordinatinių ašyse.)

b) Lėktuvas per vieną valandą nuskrenda iš taško $B(5; 9; 4)$. Išskridęs iš taško A , jis po trijų taške C . Raskite taško C koordinatas, jei \vec{AB} ir \vec{AC} yra vienakrypčiai, o lėktuvas skris pastoviu greičiu.

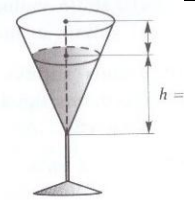


$A(3; 2; 1)$ į valandų bus vektoriai tuo pačiu

Aukštesnysis pasiekimų lygis
 Visais atvejais aiškiai ir tiksliai modeliuoja tekste, įvairiose lentelėse, schemose, grafikuose pateiktą informaciją, taiko ir derina kelias procedūras, žinomus matematikos metodus ir modelius įvairiems praktinio, kitų mokomųjų dalykų bei matematinio turinio uždaviniams spręsti.

1 pavyzdys

Taurės viršutinė dalis yra kūgis. Gėrimas užima pusę taurės talpos (žr. pav.). Apskaičiuokite kurią dalį kūgio aukščio sudaro aukštis h , kuriame yra gėrimo paviršius. Atsakymą pateikite 1% tikslumu.



2 pavyzdys

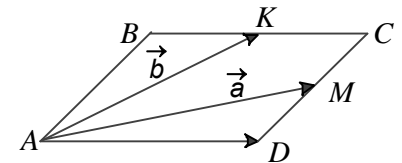
Į trikampį, kurio kraštinių ilgiai yra 6; 10 ir 12, įbrėžtas apskritimas. Nubrėžta apskritimo liestinė, kertanti dvi ilgesnias trikampio kraštines. Raskite atkirstojo trikampio perimetrą.

3 pavyzdys

a) Vektoriai $\vec{a} + 2\vec{b}$ ir $\vec{a} - 2\vec{b}$ statmeni, $|\vec{a}| = 5$ Raskite $|\vec{b}|$.

b) Taškai K ir M yra lygiagretainio $ABCD$ kraštinių BC ir CD vidurio taškai.

Vektorių \vec{AD} išreikškite vektoriais $\vec{AM} = \vec{a}$ ir $\vec{AK} = \vec{b}$.



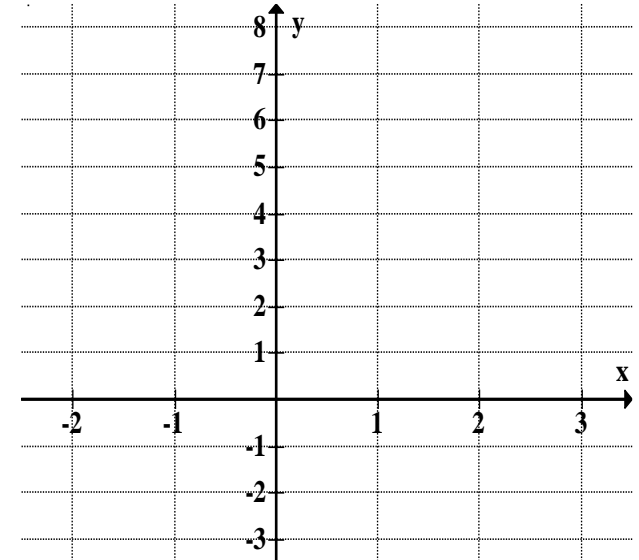
Matematikos taikymai

Funkcijos ir analizės pradmenys

Patenkinamas pasiekimų lygis
 Paprastais atvejais modeliuoja tekste, įvairiose lentelėse, schemose, grafikuose pateiktą informaciją, taiko ir derina kelias (1–2, o ypač įprastais atvejais – 3–4) standartines procedūras, žinomus matematikos metodus ir modelius paprastiems praktinio bei matematinio turinio uždaviniams spręsti.

1 pavyzdys

- Duotoje koordinatinių sistemoje nubraižykite funkcijų $f(x) = 2^x$ ir $g(x) = 1,5x + 1$ grafikus.
- Remdamiesi užduotyje 1. nubraižytais grafikai užrašykite lygties $2^x = 1,5x + 1$ sprendinius.



2 pavyzdys

Dviejų dviratininkų judėjimas apibūdinamas dėsniais, išreiškiamais formulėmis $s_1(t) = t^2 + 10t$ ir $s_2(t) = 2t^2 + 7t + 2$. (s_1 ir s_2 – kelias kilometrais, t – laikas valandomis). Po kiek laiko dviratininkų greičiai bus lygūs.

Pagrindinis pasiekimų lygis
 Nesudėtingais atvejais modeliuoja tekste, įvairiose lentelėse, schemose, grafikuose pateiktą informaciją, taiko ir derina kelias

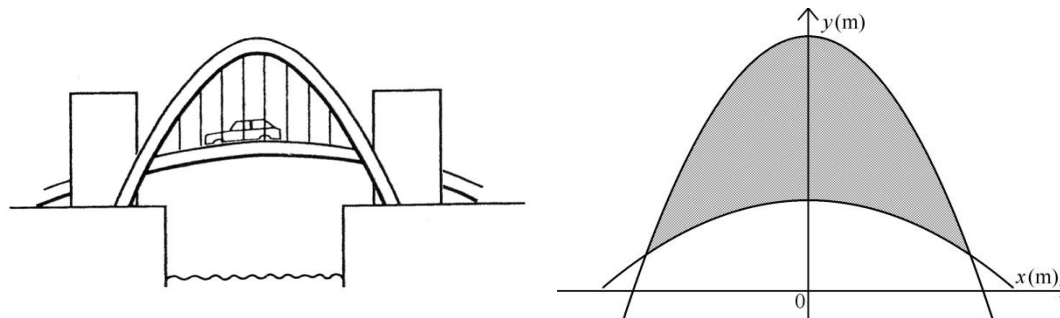
1 pavyzdys

Grafiškai nustatykite lygties $x^2 = 2^x$ sprendinių skaičių.

(3–4) standartinės procedūras, žinomus matematikos metodus ir modelius nesudėtingiems praktinio, kitų mokomųjų dalykų bei matematinio turinio uždaviniams spręsti.

2 pavyzdys

Tilto apsauginį skydą apriboja dvi parabolės $y = 40 - \frac{1}{30}x^2$ ir $y = 25 - \frac{1}{60}x^2$ (žr. pav.).



Apskaičiuokite skydo plotą. (Laikykite, kad vienetinę atkarpą koordinatinių sistemoje atitinka 1 m.)

Aukštesnysis pasiekimų lygis

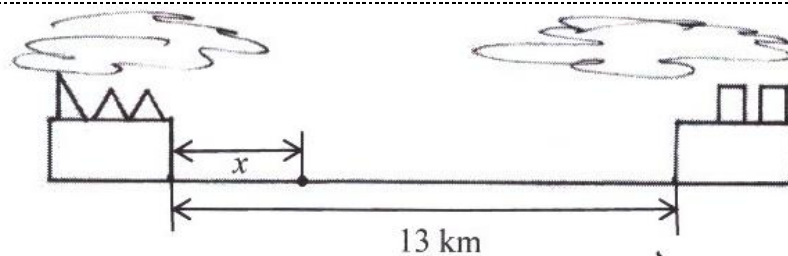
Visais atvejais aiškiai ir tiksliai modeliuoja tekste, įvairiose lentelėse, schemose, grafikuose pateiktą informaciją, taiko ir derina kelias procedūras, žinomus matematikos metodus ir modelius įvairiems praktinio, kitų mokomųjų dalykų bei matematinio turinio uždaviniams spręsti.

1 pavyzdys

Nustatykite, kiek sprendinių turi lygtis $\lg x = \sin x$. Atsakymą argumentuokite.

2 pavyzdys

Tarp dviejų gamyklų yra 13 km atstumas. Nustatyta, kad šių gamyklų skleidžiamų kenksmingų medžiagų koncentracija aplink jas yra atvirkščiai proporcinga skaičiui, vienetu didesniai negu atstumas iki gamyklos. Pirmosios gamyklos skleidžiamų kenksmingų medžiagų koncentracijos proporcingumo koeficientas lygus c (c – pastovus teigiamas skaičius $c > 0$), o antrosios gamyklos – 4 kartus didesnis negu pirmosios. Nustatykite, koku atstumu x (km) (žr. pav.) nuo pirmosios gamyklos abiejų gamyklų skleidžiamų kenksmingų medžiagų koncentracija yra mažiausia.



Matematikos taikymai

Kombinatorika, tikimybės ir statistika

Patenkinamas pasiekimų lygis

Paprastais atvejais modeliuoja tekste, įvairiose lentelėse, schemose, grafikuose pateiktą informaciją, taiko ir derina kelias (1–2, o ypač įprastais atvejais – 3–4) standartines procedūras, žinomus matematikos metodus ir modelius paprastiems praktinio bei matematinio turinio uždaviniams spręsti.

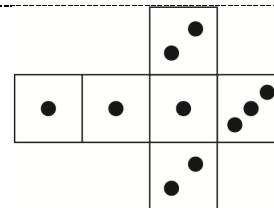
1 pavyzdys

Dviračių nuomos punkto savininko užsakymu gaminamos lentelės su dviračių numeriais. Numerį sudaro viena raidė iš keturių A, B, C, D ir po jos einantys du skaitmenys (pvz.: A00, D19, ..). Kiek daugiausia skirtingų dviračių numerių galima sudaryti?

A 20 B 90 C 100 D 360 E 400

2 pavyzdys

Simetriškas nestandartinis šešiasienis kauliukas, kurio išsklotinė pavaizduota paveiksle, metamas du kartus. Akučių skaičius ant sienelės, kuria atsivertė kauliukas, sumuojamas.



1. Parodykite, kad tikimybė, jog akučių skaičiaus suma bus lyginė, yra lygi $\frac{5}{9}$.
2. Kuri tikimybė didesnė: ar, kad akučių skaičiaus suma bus lyginė, ar – nelyginė?

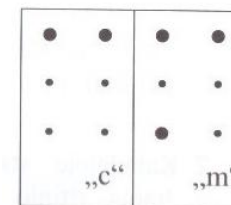
Pagrindinis pasiekimų lygis

Nesudėtingais atvejais modeliuoja tekste, įvairiose lentelėse, schemose, grafikuose pateiktą informaciją, taiko ir derina kelias (3–4) standartines procedūras, žinomus matematikos metodus ir modelius nesudėtingiems praktinio, kitų mokomųjų dalykų bei matematinio turinio uždaviniams spręsti.

1 pavyzdys

a) Mergina neišgirdo dviejų paskutinių per radiją skelbto telefono numerio skaitmenų ir mėgino prisiskambinti, surinkusi juos atsitiktinai. Pirmuoju bandymu prisiskambinti dviejų paskutinių atsitiktinai surinktų skaitmenų kombinacija buvo neteisinga. Kokia tikimybė, kad merginai bandant dar kartą prisiskambinti, kitokia nei pirmoji atsitiktinai surinktų dviejų paskutinių skaitmenų kombinacija bus gera?

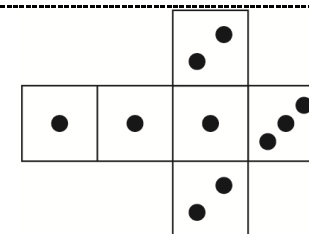
b) Brailio sistemoje įvairūs simboliai (pavyzdžiui, raidės, skyrybos ženklai ir pan.) sudaromi išpaudžiant bent vieną iš 6 taškelių. Paveikslėlyje pateikti du taip išreikštų simbolių pavyzdžiai. Kiek iš viso simbolių galima išreikšti brailio sistema?



A 12 B 32 C 36 D 63 E 64

2 pavyzdys

Kavinės savininkas, norėdamas pritraukti kuo daugiau lankytojų, dažnai sugalvoja pramogų. Viena buvo toks žaidimas: lankytojas, sumokėjęs 3,50 Lt, gali du kartus mesti simetrišką nestandartinį šešiasienį kauliuką, kurio išklotinė pavaizduota paveiksle. Akučių skaičius ant sienelės, kuria atsivertė kauliukas, sumuojamas ir ta suma litais išmokama lankytojui.



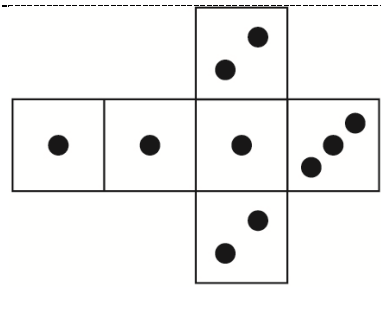
Atsitiktinis dydis X yra atsivertusių akučių suma, metus kauliuką du kartus.

1. Parodykite, kad $P(X = 4) = \frac{5}{18}$.

2. Baikite pildyti atsitiktinio dydžio X skirstinio lentelę:

X	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$		$\frac{1}{36}$

3. Ar savininkas turi pelno iš šio žaidimo? Atsakymą argumentuokite remdamiesi matematine viltimi.

<p>Aukštesnysis pasiekimų lygis Visais atvejais aiškiai ir tiksliai modeliuoja tekste, įvairiose lentelėse, schemose, grafikuose pateiktą informaciją, taiko ir derina kelias procedūras, žinomus matematikos metodus ir modelius įvairiems praktinio, kitų mokomųjų dalykų bei matematinio turinio uždaviniams spręsti.</p>	<p><i>1 pavyzdys</i> Teniso varžybose dalyvauja 9 sportininkai. Reitingų lentelėje dalyviai surašomi nuo stipriausio iki silpniausio. Jonas yra trečias. Tikimybė Jonui nugalėti stipresnį varžovą lygi 0,3, nugalėti silpnesnį – 0,8. Kokia tikimybė Jonui laimėti pirmąsias rungtynes su atsitiktinai parinktu varžovu?</p>	<p>Reitingų lentelė</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 2. 3. Jonas 4. 5. 6. 7. 8. 9.
	<p><i>2 pavyzdys</i> Kavinės savininkas, norėdamas pritraukti kuo daugiau lankytojų, dažnai sugalvoja pramogų. Viena buvo toks žaidimas: lankytojas, sumokėjęs 3,50 Lt, gali du kartus mesti simetrišką nestandartinį šešiasienį kauliuką, kurio išklotinė pavaizduota paveiksle. Akučių skaičius ant sienelės, kuria atsivertė kauliukas, sumuojamas ir ta suma litais išmokama lankytojui. Ar savininkas turi pelno iš šio žaidimo? Atsakymą argumentuokite.</p>	

Problemų sprendimas

Skaičiai, skaičiavimai, reiškiniai. Lygtys, nelyybės ir jų sistemos

Patenkinamas pasiekimų lygis

Paprastais atvejais performuluoja uždavinį matematikos terminais, žymenimis, paveikslais ar brėžiniais ir pan., atskleidamas elementarios, supaprastintos problemos suvokimą, tinkamai nubraižo, papildo paveikslą ar brėžinį.

Standartinėse paprastose situacijose išvelgia ar pasirenka tinkamą matematikos modelį ir jį pritaiko, suskaido uždavinį į atskiras dalis, bando argumentuoti kiekvienos dalies sprendimą.

Standartinėse paprastose situacijose išvelgia sąryšį tarp nagrinėjamų dydžių, aprašydamas dėsningumą, pagal kurį sudaroma objektų (jų elementų) seka.

Paprastais atvejais atlieka tyrimą, taikydamas galimybių perrinkimo strategiją, dalinio atvejo nagrinėjimo strategiją. Išnagrinėja bent vieną paprastos problemos nagrinėtiną atvejį, formuluoja išvadas ir atsakymus į paprastus klausimus.

Įrodo paprastus teiginius, taikydamas tiesioginio įrodymo metodą, sprendimo nuo galo strategiją. Remiasi į Vidurinio ugdymo bendrąją programą įtrauktų teoremų formuluotėmis, argumentuodamas paprastus teiginius ir sprenddamas paprastus probleminius uždavinius.

1 pavyzdys

Nesinaudodami skaičiuokliu, parodykite, kad $2^{300} < 3^{200}$.

2 pavyzdys

Skaičių tiesėje pažymėti skaičiai a ir b .



Kuris iš žemiau užrašytų teiginių yra teisingas?

- A** $1 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ **B** $\frac{1}{a} < 1 < \frac{1}{b}$ **C** $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 1$ **D**
 $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 1$

3 pavyzdys

Robertas už suvartotą elektros energiją moka pagal **dviejų laiko zonų tarifą** (žr. lentelę apačioje). Žinoma, kad naktimis, šeštadieniais ir sekmadieniais Robertas suvartoja 45 % visos suvartojamos elektros energijos.

Kiek kartų daugiau sumokėtų Robertas už suvartotą elektros energiją, jei mokėtų ne pagal dviejų laiko zonų tarifą, o pagal **vienos laiko zonos tarifą**? Atsakymą pateikite šimtųjų tikslumu.

Dviejų laiko zonų tarifai	
Dieninės 1 kWh elektros energijos kaina	0,52 Lt/kWh
Naktinės, šeštadienio ir sekmadienio 1 kWh elektros energijos kaina	0,38 Lt/kWh
Vienos laiko zonos tarifas	

	1 kWh elektros energijos kaina	0,48 Lt/kWh
<p>Pagrindinis pasiekimų lygis Nesudėtingais atvejais performuluoja uždavinį matematikos terminais, žymenimis, paveikslais ar brėžiniais ir pan., atskleidamas pačios problemos suvokimą, tinkamai nubraižo, papildo paveikslą ar brėžinį.</p> <p>Nesudėtingose situacijose išvelgia ar pasirenka tinkamą matematikos modelį ir jį pritaiko, suskaido uždavinį į atskiras dalis, argumentuoja kiekvienos dalies sprendimą.</p> <p>Nesudėtingose situacijose išvelgia sąryšį tarp nagrinėjamų dydžių, aprašydamas dėsningumą, pagal kurį sudaroma objektų (jų elementų) seka.</p> <p>Nesudėtingais atvejais atlieka tyrimą, taikydamas nuoseklaus galimybių perrinkimo strategiją, bendresnio ar dalinio atvejo nagrinėjimo strategiją, pavyzdžių ir kontrapavyzdžių pateikimo strategiją. Išnagrinėja visus nesudėtingos problemos nagrinėtinius atvejus, standartiniais atvejais formuluoja išvadas, pateikia atsakymus į nesudėtingus klausimus, į kuriuos nėra vienintelio teisingo atsakymo.</p> <p>Įrodo teiginius, taikydamas tiesioginio įrodymo metodą, analizės, sprendimo nuo galo strategiją. Remiasi į Vidurinio ugdymo bendrąją programą įtrauktų teoremų formuluotėmis ir jų įrodymo idėjomis, argumentuodamas nesudėtingus teiginius ir sprenddamas probleminius uždavinius.</p>	<p><i>1 pavyzdys</i> Kam lygu xyz, kai $x^2yz^3 = 7^3$ ir $xy^2 = 7^9$? A 7^4 B 7^6 C 7^8 D 7^9 E 7^{10}</p> <p><i>2 pavyzdys</i> Duoti trys natūralieji skaičiai a, b, c. Kiekvienas šių skaičių yra mažesnis už 11. Raskite didžiausią reiškinio $\frac{a+b}{c}$ skaitinę reikšmę.</p> <p><i>3 pavyzdys</i> Raskite visas natūraliųjų skaičių poras $(x; y)$ su kuriomis lygtis $x^2 - y^2 = 55$ yra teisinga skaitinė lygybė.</p>	
	<p>Aukštesnysis pasiekimų lygis Pagrįstai ir tikslingai performuluoja neįprasto konteksto</p>	<p><i>1 pavyzdys</i> Įrodykite, kad $31^{11} < 17^{14}$.</p>

<p>uždavinį, atskleidamas pačios problemos suvokimą, tinkamai nubraižo, papildoma paveikslą ar brėžinį.</p> <p>Neįprastose situacijose išvelgia ar pasirenka tinkamą matematikos modelį ir jį pritaiko, suskaido uždavinį į atskiras dalis, nuosekliai argumentuoja kiekvienos dalies sprendimą.</p> <p>Neįprasto konteksto situacijose išvelgia sąryšį tarp nagrinėjamų dydžių, aprašydamas dėsningumą, pagal kurį sudaroma objektų (jų elementų) seka.</p> <p>Atlieka tyrimą, pagrįstai ir tikslingai taikydamas galimybių nuoseklaus perrinkimo strategiją, bendresnio ar dalinio atvejo nagrinėjimo strategiją, pavyzdžių ir kontrapavyzdžių pateikimo strategiją. Išnagrinėja visus problemos nagrinėtinius atvejus, nestandartiniais atvejais formuluoja išvadas, pateikia atsakymus į klausimus, į kuriuos nėra vienintelio teisingo atsakymo.</p> <p>Įrodo teiginius, taikydamas tiesioginio įrodymo metodą (einant nuo žinomo įrodomo link), analizės metodą (einant nuo norimo žinomo link), sprendimo nuo galo strategiją; įrodydamas paprastus teiginius, taiko prieštaros metodą. Remiasi į Vidurinio ugdymo bendrąją programą įtrauktų teoremų formuluotėmis ir jų įrodymo idėjomis, įrodydamas teiginius ir sprenddamas probleminius uždavinius.</p>	<p><i>2 pavyzdys</i> Įrodykite, kad bet kurio natūraliojo skaičiaus kubo ir jo paties skirtumas dalijasi iš 6 be liekanos.</p> <p><i>3 pavyzdys</i> a) Vienoje gatvės pusėje esančių namų (jų daugiau nei vienas) numeriai yra vienas po kito einantys lyginiai skaičiai, kurių suma lygi 114. Raskite šių namų skaičių ir jų numerius. b) Dviejų irkluotojų greičiai stovinčiame vandenyje yra lygūs. Jie treniruojami taip: Jonas iš bazės nuplaukia 5 km upe prieš srovę ir grįžta atgal į ją, o Domas iš kitos bazės nuplaukia 5 km ežeru (stovinčiame vandenyje) ir grįžta į ją. Kuris irkluotojas sugaišta mažiau laiko treniruotėje? (<i>Nekreipkite dėmesio į laiką sugaištą apsigręžiant.</i>) c) Brilianto kaina tiesiogiai proporcinga jo masės kvadratui. Briliantas, kurio masė p karatų (1 karatas = 0,2 g), buvo padalytas į dvi dalis. Dėl to jo kaina sumažėjo n kartų. Apskaičiuokite abiejų brilianto dalių masę.</p>
---	---

Problemu sprendimas

Geometrija

Patenkinamas pasiekimų lygis

Paprastais atvejais performuluoja uždavinį matematikos terminais, žymenimis, paveikslais ar brėžiniais ir pan., atskleidamas elementarios, supaprastintos problemos suvokimą, tinkamai nubraižo, papildo paveikslą ar brėžinį.

Standartinėse paprastose situacijose išvelgia ar pasirenka tinkamą matematikos modelį ir jį pritaiko, suskaido uždavinį į atskiras dalis, bando argumentuoti kiekvienos dalies sprendimą.

Standartinėse paprastose situacijose išvelgia sąryšį tarp nagrinėjamų dydžių, aprašydamas dėsningumą, pagal kurį sudaroma objektų (jų elementų) seka.

Paprastais atvejais atlieka tyrimą, taikydamas galimybių perrinkimo strategiją, dalinio atvejo nagrinėjimo strategiją. Išnagrinėja bent vieną paprastos problemos nagrinėtiną atvejį, formuluoja išvadas ir atsakymus į paprastus klausimus.

Įrodo paprastus teiginius, taikydamas tiesioginio įrodymo metodą, sprendimo nuo galo strategiją. Remiasi į Vidurinio ugdymo bendrąją programą įtrauktų teoremų formuluotėmis, argumentuodamas paprastus teiginius ir spęsdamas paprastus probleminius uždavinius.

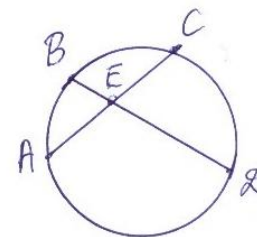
Pagrindinis pasiekimų lygis

Nesudėtingais atvejais performuluoja uždavinį matematikos terminais, žymenimis, paveikslais ar brėžiniais ir pan., atskleidamas pačios problemos suvokimą, tinkamai nubraižo, papildo paveikslą ar brėžinį.

1 pavyzdys

A, B, C ir D yra apskritimo taškai, AC ir BD kertasi taške E (žr. pav.).

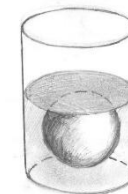
1. Paaiškinkite, kodėl kampas ABE yra lygus kampui DCE.
2. Įrodykite, kad trikampiai ABE ir DCE yra panašūs.



2 pavyzdys

a) Ritinio formos indo pagrindo spindulys 10 cm. 15 cm šio indo aukščio pripilta vandens. Į vandenį buvo įmestas rutulys, kurio spindulys 6 cm. Iki kokio aukščio pakilo vanduo inde?

b) Į ritinio formos indą, kurio pagrindo spindulys 8 cm, įdėtas metalinis rutuliukas, kurio spindulys 6 cm. Kiek mažiausiai cm^3 vandens reikia įpilti į indą, kad vanduo apsemtų inde esantį rutuliuką (žr. pav.)?



1 pavyzdys

a) Per tašką P, esantį skritulio viduje ir nepriklausantį skersmeniui AB, nubrėžtos stygos AM ir BN. Įrodykite, kad:

1. trikampiai ANP ir BMP panašūs.
2. $AN \cdot BP = BM \cdot AP$.

Nesudėtingose situacijose išvelgia ar pasirenka tinkamą matematikos modelį ir jį pritaiko, suskaido uždavinį į atskiras dalis, argumentuoja kiekvienos dalies sprendimą.

Nesudėtingose situacijose išvelgia sąryšį tarp nagrinėjamų dydžių, aprašydamas dėsningumą, pagal kurį sudaroma objektų (jų elementų) seka.

Nesudėtingais atvejais atlieka tyrimą, taikydamas nuoseklaus galimybių perrinkimo strategiją, bendresnio ar dalinio atvejo nagrinėjimo strategiją, pavyzdžių ir kontrapavyzdžių pateikimo strategiją. Išnagrinėja visus nesudėtingos problemos nagrinėtinius atvejus, standartiniais atvejais formuluoja išvadas, pateikia atsakymus į nesudėtingus klausimus, į kuriuos nėra vienintelio teisingo atsakymo.

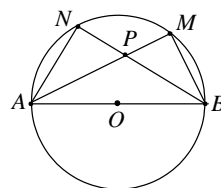
Įrodo teiginius, taikydamas tiesioginio įrodymo metodą, analizės, sprendimo nuo galo strategiją. Remiasi į Vidurinio ugdymo bendrąją programą įtrauktų teoremų formuluotėmis ir jų įrodymo idėjomis, argumentuodamas nesudėtingus teiginius ir sprendamas probleminius uždavinius.

Aukštesnysis pasiekimų lygis

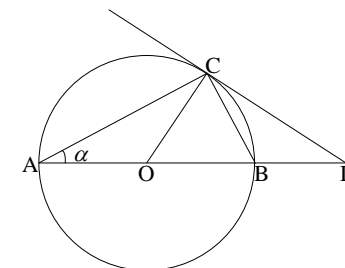
Pagrįstai ir tikslingai reformuluoja neįprasto konteksto uždavinį, atskleisdamas pačios problemos suvokimą, tinkamai nubraižo, papildo paveikslą ar brėžinį.

Neįprastose situacijose išvelgia ar pasirenka tinkamą matematikos modelį ir jį pritaiko, suskaido uždavinį į atskiras dalis, nuosekliai argumentuoja kiekvienos dalies sprendimą.

Neįprasto konteksto situacijose išvelgia sąryšį tarp nagrinėjamų dydžių, aprašydamas dėsningumą, pagal kurį sudaroma objektų (jų elementų) seka.

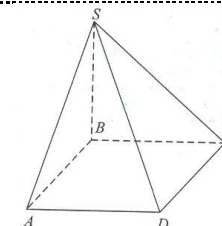


b) Paveiksle pavaizduotas apskritimas, kurio centras yra taškas O. Per šio apskritimo tašką C nubrėžta apskritimo liestinė, kuri su apskritimo skersmeniu AB susikerta taške D, o $\angle CAB = \alpha$. Įrodykite, kad $\angle BCD = \angle CAB = \alpha$.



2 pavyzdys

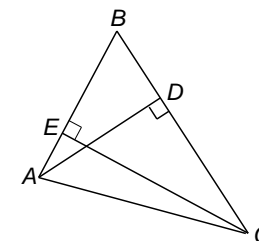
Piramidės $SABCD$ pagrindas yra kvadratas $ABCD$, o jos aukštinė sutampa su briauna SB . Įrodykite, kad dvisienio kampo tarp piramidės pagrindo plokštumos ir šoninės sienos SCD tiesinis kampas yra kampas SCB .



1 pavyzdys

a) Žinoma, kad trikampio ABC dviejų kraštinių ilgių kvadratų suma yra mažesnė už trečiosios kraštinės ilgio kvadratą. Įrodykite, kad trikampis ABC yra bukasis.

b) Duotas smailusis trikampis ABC . Atkarpos AD ir CE yra trikampio aukštinės. Įrodykite, kad A, C, D ir E yra vieno apskritimo taškai.



<p>Atlieka tyrimą, pagrįstai ir tikslingai taikydamas galimybių nuoseklaus perrinkimo strategiją, bendresnio ar dalinio atvejo nagrinėjimo strategiją, pavyzdžių ir kontrapavyzdžių pateikimo strategiją. Išnagrinėja visus problemos nagrinėtinius atvejus, nestandartiniais atvejais formuluoja išvadas, pateikia atsakymus į klausimus, į kuriuos nėra vienintelio teisingo atsakymo.</p> <p>Įrodo teiginius, taikydamas tiesioginio įrodymo metodą (einant nuo žinomo įrodomo link), analizės metodą (einant nuo norimo žinomo link), sprendimo nuo galo strategiją; įrodydamas paprastus teiginius, taiko prieštaros metodą. Remiasi į Vidurinio ugdymo bendrąją programą įtrauktų teoremų formuluotėmis ir jų įrodymo idėjomis, įrodydamas teiginius ir spęsdamas probleminius uždavinius.</p>	<p><i>2 pavyzdys</i></p> <p>Taškai S ir R yra atitinkamai tetraedro ABCD briaunų AB ir CD vidurio taškai. Įrodykite, kad $RS \perp CD$.</p>
--	--

Problemų sprendimas	
Funkcijos ir analizės pradmenys	
<p>Patenkinamas pasiekimų lygis</p> <p>Paprastais atvejais performuluoja uždavinį matematikos terminais, žymenimis, paveikslais ar brėžiniais ir pan., atskleidamas elementarios, supaprastintos problemos suvokimą, tinkamai nubraižo, papildo paveikslą ar brėžinį.</p> <p>Standartinėse paprastose situacijose išvelgia ar pasirenka tinkamą matematikos modelį ir jį pritaiko, suskaido uždavinį į atskiras dalis, bando argumentuoti kiekvienos dalies sprendimą.</p> <p>Standartinėse paprastose situacijose išvelgia sąryšį tarp nagrinėjamų dydžių, aprašydamas dėsningumą, pagal kurį sudaroma objektų (jų elementų) seka.</p> <p>Paprastais atvejais atlieka tyrimą, taikydamas galimybių perrinkimo strategiją, dalinio atvejo nagrinėjimo strategiją. Išnagrinėja bent vieną paprastos problemos nagrinėtiną atvejį, formuluoja išvadas ir atsakymus</p>	<p><i>Pavyzdys</i></p> <p>Įrodykite, kad funkcijos $f(x) = x^2 + 4x$ reikšmės didėja, kai $x \in (-2; +\infty)$.</p>

<p>į paprastus klausimus.</p> <p>Įrodo paprastus teiginius, taikydamas tiesioginio įrodymo metodą, sprendimo nuo galo strategiją. Remiasi į Vidurinio ugdymo bendrąją programą įtrauktų teoremų formuluotėmis, argumentuodamas paprastus teiginius ir spęsdamas paprastus probleminius uždavinius.</p>	
<p>Pagrindinis pasiekimų lygis Nesudėtingais atvejais reformuluoja uždavinį matematikos terminais, žymenimis, paveikslais ar brėžiniais ir pan., atskleisdamas pačios problemos suvokimą, tinkamai nubraižo, papildo paveikslą ar brėžinį.</p> <p>Nesudėtingose situacijose išvelgia ar pasirenka tinkamą matematikos modelį ir jį pritaiko, suskaido uždavinį į atskiras dalis, argumentuoja kiekvienos dalies sprendimą.</p> <p>Nesudėtingose situacijose išvelgia sąryšį tarp nagrinėjamų dydžių, aprašydamas dėsningumą, pagal kurį sudaroma objektų (jų elementų) seka.</p> <p>Nesudėtingais atvejais atlieka tyrimą, taikydamas nuoseklaus galimybių perrinkimo strategiją, bendresnio ar dalinio atvejo nagrinėjimo strategiją, pavyzdžių ir kontrapavyzdžių pateikimo strategiją. Išnagrinėja visus nesudėtingos problemos nagrinėtinus atvejus, standartiniais atvejais formuluoja išvadas, pateikia atsakymus į nesudėtingus klausimus, į kuriuos nėra vienintelio teisingo atsakymo.</p> <p>Įrodo teiginius, taikydamas tiesioginio įrodymo metodą, analizės, sprendimo nuo galo strategiją. Remiasi į Vidurinio ugdymo bendrąją programą įtrauktų teoremų formuluotėmis ir jų įrodymo idėjomis, argumentuodamas nesudėtingus teiginius ir spęsdamas probleminius uždavinius.</p>	<p><i>Pavyzdys</i></p> <p>a) Įrodykite, kad funkcijos $f(x) = \ln x$ reikšmės didėja su visomis x reikšmėmis iš šios funkcijos apibrėžimo srities.</p> <p>b) Įrodykite, kad funkcija $f(x) = \sin x + x$ yra nemažėjanti su visomis realiomis x reikšmėmis.</p>
<p>Aukštesnysis pasiekimų lygis Pagrįstai ir tikslingai reformuluoja neįprasto konteksto uždavinį,</p>	<p><i>Pavyzdys</i></p> <p>a) Dvi tiesės, liečiančios parabolę $y = x^2$, susikerta taške $(-1; -3)$.</p>

atskleisdamas pačios problemos suvokimą, tinkamai nubraižo, papildo paveikslą ar brėžinį.

Neįprastose situacijose išvelgia ar pasirenka tinkamą matematikos modelį ir jį pritaiko, suskaido uždavinį į atskiras dalis, nuosekliai argumentuoja kiekvienos dalies sprendimą.

Neįprasto konteksto situacijose išvelgia sąryšį tarp nagrinėjamų dydžių, aprašydamas dėsningumą, pagal kurį sudaroma objektų (jų elementų) seka.

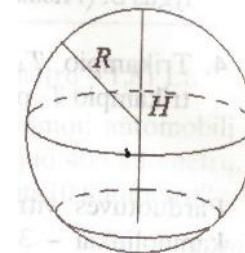
Atlieka tyrimą, pagrįstai ir tikslingai taikydamas galimybių nuoseklaus perrinkimo strategiją, bendresnio ar dalinio atvejo nagrinėjimo strategiją, pavyzdžių ir kontrapavyzdžių pateikimo strategiją.

Išnagrinėja visus problemos nagrinėtinius atvejus, nestandartiniais atvejais formuluoja išvadas, pateikia atsakymus į klausimus, į kuriuos nėra vienintelio teisingo atsakymo.

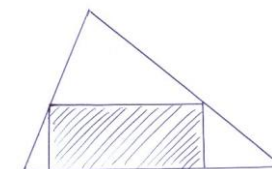
Įrodo teiginius, taikydamas tiesioginio įrodymo metodą (einant nuo žinomo įrodomo link), analizės metodą (einant nuo norimo žinomo link), sprendimo nuo galo strategiją; įrodydamas paprastus teiginius, taiko prieštaros metodą. Remiasi į Vidurinio ugdymo bendrąją programą įtrauktų teoremų formuluotėmis ir jų įrodymo idėjomis, įrodydamas teiginius ir spęsdamas probleminius uždavinius.

Užrašykite šių tiesių lygtis.

b) Parabolę, kurios šakos nukreiptos žemyn, kerta ašį Ox taškuose $x = 0$ ir $x = 1$. Plotas, apribotas parabolės ir ašies Ox , lygus 2. Raskite šios parabolės lygtį.



c) Į trikampį įbrėžtas stačiakampis taip, kad dvi jo viršūnės yra vienoje trikampio kraštinėje, o kitos dvi – kitose trikampio kraštinėse. Įrodykite, kad taip įbrėžto į bet kokį trikampį stačiakampio plotas niekada neviršys pusės trikampio ploto.



d) Planuojant statyti pastatą, labai svarbu išsiaiškinti jo ekonomiškumą šildymo sezono metu. Norint nustatyti, kurį iš keleto pastatų šiuo požiūriu ekonomiškiausia eksploatuoti, galima vadovautis tokia taisykle:

„Ekonomiškiausia eksploatuoti pastatą, kurio paviršiaus ploto (neskaičiuojant pagrindo ploto) ir tūrio santykis mažiausias.“

Kompanija planuoja statyti rutulio nuopjovos formos (žr.pav.) salę ($R = 30$ m) tokio aukščio, kad ją eksploatuoti žiemą būtų ekonomiškiausia. Kuria salę ekonomiškiau eksploatuoti – kompanijos pastatytą rutulio nuopjovos formos salę ar tokio pat tūrio kubo formos salę. Atsakymą pagrįskite.

Problemų sprendimas

Kombinatorika, tikimybės ir statistika

Patenkinamas pasiekimų lygis

Paprastais atvejais performuluoja uždavinį matematikos terminais, žymenimis, paveikslais ar brėžiniais ir pan., atskleidamas elementarios, supaprastintos problemos suvokimą, tinkamai nubraižo, papildo paveikslą ar

1 pavyzdys

Dėžėje yra vienodo dydžio juodi, balti ir raudoni rutuliukai.

Tikimybė ištraukti juodą rutuliuką lygi $\frac{1}{5}$, baltą - $\frac{3}{10}$.

<p>brėžinį.</p> <p>Standartinėse paprastose situacijose išvelgia ar pasirenka tinkamą matematikos modelį ir jį pritaiko, suskaido uždavinį į atskiras dalis, bando argumentuoti kiekvienos dalies sprendimą.</p> <p>Standartinėse paprastose situacijose išvelgia sąryšį tarp nagrinėjamų dydžių, aprašydamas dėsningumą, pagal kurį sudaroma objektų (jų elementų) seka.</p> <p>Paprastais atvejais atlieka tyrimą, taikydamas galimybių perrinkimo strategiją, dalinio atvejo nagrinėjimo strategiją. Išnagrinėja bent vieną paprastos problemos nagrinėtiną atvejį, formuluoja išvadas ir atsakymus į paprastus klausimus.</p> <p>Įrodo paprastus teiginius, taikydamas tiesioginio įrodymo metodą, sprendimo nuo galo strategiją. Remiasi į Vidurinio ugdymo bendrąją programą įtrauktų teoremų formuluotėmis, argumentuodamas paprastus teiginius ir sprendamas paprastus probleminius uždavinius.</p>	<p>Įrodykite, kad raudonų rutuliukų dėžėje yra daugiausia.</p> <hr/> <p><i>2 pavyzdys</i> Imtį sudaro trys natūralieji skaičiai a, 4, c. Žinoma, kad $a < 4 < c$, o šios imties vidurkis lygus 5. Kokia galima didžiausia skaičiaus c reikšmė?</p>
<p>Pagrindinis pasiekimų lygis Nesudėtingais atvejais performuluoja uždavinį matematikos terminais, žymenimis, paveikslais ar brėžiniais ir pan., atskleisdamas pačios problemos suvokimą, tinkamai nubraižo, papildo paveikslą ar brėžinį.</p> <p>Nesudėtingose situacijose išvelgia ar pasirenka tinkamą matematikos modelį ir jį pritaiko, suskaido uždavinį į atskiras dalis, argumentuoja kiekvienos dalies sprendimą.</p> <p>Nesudėtingose situacijose išvelgia sąryšį tarp nagrinėjamų dydžių, aprašydamas dėsningumą, pagal kurį sudaroma objektų (jų elementų) seka.</p> <p>Nesudėtingais atvejais atlieka tyrimą, taikydamas nuoseklaus galimybių perrinkimo strategiją, bendresnio ar dalinio atvejo nagrinėjimo strategiją, pavyzdžių ir kontrapavyzdžių pateikimo strategiją. Išnagrinėja visus</p>	<p><i>1 pavyzdys</i> Tikimybė, kad sportininkas pagerins asmeninį šuolio rezultatą yra lygi p. Įrodykite, kad tikimybė pagerinti rezultatą lygi $2p - p^2$, jei sportininkas turi galimybę atlikti šuolį du kartus. (Pagerinęs rezultatą – sportininkas antrojo šuolio neatlieka).</p> <hr/> <p><i>2 pavyzdys</i> Raskite, kiek nelyginių skaičių galima sudaryti iš skaičiaus 369415 skaitmenų, jeigu skaitmenys skaičiuje nesikartoja.</p>

<p>nesudėtingos problemos nagrinėtinus atvejus, standartiniais atvejais formuluoja išvadas, pateikia atsakymus į nesudėtingus klausimus, į kuriuos nėra vienintelio teisingo atsakymo.</p> <p>Įrodo teiginius, taikydamas tiesioginio įrodymo metodą, analizės, sprendimo nuo galo strategiją. Remiasi į Vidurinio ugdymo bendrąją programą įtrauktų teoremų formuluotėmis ir jų įrodymo idėjomis, argumentuodamas nesudėtingus teiginius ir sprenddamas probleminius uždavinius.</p>	
<p>Aukštesnysis pasiekimų lygis Pagrįstai ir tikslingai performuluoja neįprasto konteksto uždavinį, atskleisdamas pačios problemos suvokimą, tinkamai nubraižo, papildo paveikslą ar brėžinį.</p> <p>Neįprastose situacijose išvelgia ar pasirenka tinkamą matematikos modelį ir jį pritaiko, suskaido uždavinį į atskiras dalis, nuosekliai argumentuoja kiekvienos dalies sprendimą.</p> <p>Neįprasto konteksto situacijose išvelgia sąryšį tarp nagrinėjamų dydžių, aprašydamas dėsningumą, pagal kurį sudaroma objektų (jų elementų) seka.</p> <p>Atlieka tyrimą, pagrįstai ir tikslingai taikydamas galimybių nuoseklaus perrinkimo strategiją, bendresnio ar dalinio atvejo nagrinėjimo strategiją, pavyzdžių ir kontrapavyzdžių pateikimo strategiją. Išnagrinėja visus problemos nagrinėtinus atvejus, nestandartiniais atvejais formuluoja išvadas, pateikia atsakymus į klausimus, į kuriuos nėra vienintelio teisingo atsakymo.</p> <p>Įrodo teiginius, taikydamas tiesioginio įrodymo metodą (einant nuo žinomo įrodomo link), analizės metodą (einant nuo norimo žinomo link), sprendimo nuo galo strategiją; įrodydamas paprastus teiginius, taiko prieštaros metodą. Remiasi į Vidurinio ugdymo bendrąją programą įtrauktų teoremų formuluotėmis ir jų įrodymo idėjomis, įrodydamas teiginius ir sprenddamas probleminius uždavinius.</p>	<p><i>1 pavyzdys</i> Tikimybė laimėti žaidimą lygi p. Įrodykite, kad tikimybė laimėti šį žaidimą lygi $1 - (1 - p)^n$, jei jį galima žaisti n kartų (Laimėjus žaidimą – toliau jis nežaidžiamas).</p> <p><i>2 pavyzdys</i> Mokslo metų gale mokiniai paprastai organizuoja išvykas. Vieni klasės mokiniai norėtų išvykos į Druskininkus, kiti – į Birštoną. Ginčą išspręsti padėjo klasės auklėtojas – matematikos mokytojas, pasiūlęs tokį pasirinkimo būdą. Jis atnešė dėžę, kurioje yra 11 vienodų rutulių, sunumeruotų skaičiais 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ir paprašė šešių mokinių atsitiktinai ištraukti po rutulį iš dėžės ir padėti ant stalo. Jei ištrauktų rutulių numerių suma yra nelyginis skaičius, tai vykstama į Druskininkus, o jei lyginis – į Birštoną. Kokia tikimybė, kad klasė važiuos į Druskininkus?</p>