Lietuvos matematikos mokytojų asociacija

Elena Majauskaitė

NELYGYBĖS
MOKYKLINIAME ALGEBROS KURSE

(darbo patirtis)

Vilnius, 1996

Lietuvos matematikos mokytojų asociacija

Elena Majauskaitė

NELYGYBĖS MOKYKLINIAME ALGEBROS KURSE

(darbo patirtis)

Autorė – Elena Majauskaitė, Kėdainių Juozo Paukštelio vidurinės mokyklos mokytoja ekspertė.

Recenzentai – A. Nagelė, VU docentas

– M. Vosylienė, PI docentė

Skaitmeninę vadovėlio versiją paruošė O. Stanevičienė, Kauno Juozo Grušo meno gimnazijos mokytoja- metodininkė, Z. Nėnienė, Kauno Veršvų vidurinės mokyklos mokytoja-metodininkė

PRATARMĖ

Leidinys skiriamas jauniems mokytojams ir abiturientams, besirengiantiems matematikos egzaminui.

Ilgametė metodinė patirtis leidžia tikėtis, kad šis darbas pagilins žinias apie skaitinių nelygybių bei nelygybių su kintamuoju savybes, kurias naudosite, spręsdami tipinius ir sudėtingesnius uždavinius. Manau, kad pasinaudosite ir metodinėmis rekomendacijomis, kaip racionaliau išspręsti nelygybes, kad mokytojai sėkmingiau pasirengtų pamokai, o mokiniai – kontroliniams bei savarankiškiems darbams ir, be abejo, egzaminui.

Dėkoju docentui A. Nagelei už vertingas pastabas ir pasiūlymus, o taip pat redaktoriams bei leidėjams už nuoširdų rūpestį, rengiant šį leidinį.

Autorė

Turinys

1. SKAITINĖS NELYGYBĖS IR JŲ SAVYBĖS

Galime palyginti bet kuriuos skaičius a ir b, palyginimo rezultatą parašyti lygybe arba nelygybe, vartodami ženklus $=, <, >$.

<u>Apibrėžimas</u>. Skaičius a didesnis už b ($a > b$), kai skirtumas a – b teigiamas skaičius; skaičius a mažesnis už b ($a < b$), kai skirtumas a – b neigiamas skaičius; skaičius a lygus b ($a = b$), kai skirtumas a – b lygus nuliui.

Ženklai $>, <$ yra griežtų nelygybių ženklai; ženklai $\leq, \geq$ – negriežtų nelygybių ženklai.

Nelygybės ($a > b$) ir ($c > d$); ($a < b$) ir ($c < d$); ($a \geq b$) ir ($c \geq d$); ($a \leq b$) ir ($c \leq d$) vadinamos vienos prasmės nelygybėmis. Nelygybės ($a < b$) ir ($c > d$); $a \leq b$ ir $c \geq d$ – priešingos prasmės nelygybėmis.

<u>Skaitinių nelygybių savybės</u>:

1. Bet kuriuos skaičius $a\ ir\ b$ sieja vienas ir tiktai vienas iš sąryšių: $a < b$, $a = b$, $a > b$.
2. Jei $a < b$, tai $b > a$.
3. Jei $a < b$ ir $b < c$, tai $a < c$.
4. Jei $a < b$ ir c – bet kuris skaičius, tai $a + c < b + c$.

   Išvada. Jei $a < b + c$, tai $a - c < b$.
5. Jei $a < b$ ir $c < d$, tai $a + c < b + d$.
6. Jei $a < b$ ir c – teigiamas skaičius, tai $ac < bc$.

   Jei $a < b$ ir c – neigiamas skaičius, tai $ac > bc$.

   Jei $a < b$ ir c lygus nuliui, tai $ac = bc$.
7. Jei a, b, c, d – teigiami skaičiai, $a < b$ ir ($c < d$), tai $ac < bd$.
8. Jei $a\ ir\ b$ – teigiami skaičiai ir $a > b$, tai $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Mokiniai prisimena skaitinių nelygybių savybes, žaisdami loto „Skaitinių nelygybių savybės“. Kiekvienas mokinys gauna užduočių kortelę.

Pirmas mokinys:

1. Apskaičiuokite: $-5 \cdot (-1{,}4) \cdot 8$.
2. Žinoma: $a > 0, b < 0$. Palyginkite reiškinį $3a - b$ su nuliu.
3. a – teigiamas ar neigiamas skaičius, jei $-a < 0$?
4. Palyginkite skaičius $\frac{7}{8}$ ir $\frac{15}{16}$.
5. Palyginkite $a\ ir\ b$, jei $a - b = -4$.
6. Kokio ženklo skaičius $a - 1$, jei $a < 1$?
7. Žinoma: $a > b$. Ar gali $b - a = (-1)^2$?
8. Kokio ženklo skaičiai $a\ ir\ b$, jei $a < b$ ir $b < -2$?
9. Prie abiejų nelygybės $-2 < 4$ pusių pridėkite skaičių -5.
10. Iš abiejų nelygybės $3 > 1$ pusių atimkite skaičių -4.
11. Padauginkite nelygybę $15 > -3$ iš -3.
12. Padalykite nelygybę $-25 > -30$ ir 5.
13. Sudėkite nelygybes $1 > -8$ ir $2 > 1$.
14. Raskite didžiausią sveiką skaičių m, tenkinantį nelygybę $m \leq -2$.
15. Raskite mažiausią sveiką skaičių m, tenkinantį nelygybę $m \geq -4$.
16. Sudauginkite nelygybes $5 \geq 3$ ir $2 \geq 2$.

Antras mokinys:

1. Apskaičiuokite: $-32 : 2$.
2. Žinoma: $a < 0,\ b > 0$. Palyginkite reiškinį $3a - b$ su nuliu.
3. a – teigiamas ar neigiamas skaičius, jei $a^2 \cdot a^3 < 0$?
4. Palyginkite skaičius $-0{,}04$ ir $-0{,}03$.
5. Palyginkite $a\ ir\ b$, jei $a - b = 3^2$.
6. Kokio ženklo skaičius $a - 1$, jei $a > 2$?
7. Žinoma: $a < b$. Ar gali $b - a = 3{,}7$?
8. Kokio ženklo skaičiai $a\ ir\ b$, jei $a > b$ ir $b > 1$?
9. Prie abiejų nelygybės $-2 < 4$ pusių pridėkite skaičių 5.
10. Iš abiejų nelygybės $3 > 1$ pusių atimkite skaičių 4.
11. Padauginkite nelygybę $15 > -3$ iš 3.
12. Padalykite nelygybę $-25 > -30$ iš -5.
13. Sudėkite nelygybes $2 < 5$ ir $-7 < -3$.
14. Raskite didžiausią sveiką skaičių m, tenkinantį nelygybę $m < -2$.
15. Raskite mažiausią sveiką skaičių n, tenkinantį nelygybę $n > 6$.
16. Sudauginkite nelygybes $2 \leq 2$ ir $3 \leq 5$.

Mokiniai užduotis sprendžia mintinai. Teisingumą patikrina pagal atsakymų kortelę, kurioje atsakymus (jei juos randa) uždengia kvadratukais. Mokytojas greitai patikrina, žinodamas, kurie langeliai turi būti uždengti.

Atsakymų kortelė

-16	$7 > 5$	$5 < 6$	-4	$a < 0, b > 0$	$-1 > -3$
teig. skaič.	$3a - b < 0$	$a - 1 < 0$	$6 \leq 10$	Gali	-2
$-5 < 2$	$3 > -7$	neig. skaič.	$a < 0, b < 0$	16	$-1 > -3$
$a < b$	$a > 0, b > 0$	$10 \geq 6$	$-0{,}04 < -0{,}03$	$\frac{7}{8} > \frac{15}{16}$	$-5 > -6$
7	Negali	-3	$-45 < 9$	$a > b$	$-0{,}04 > -0{,}03$
$45 > -9$	$\frac{7}{8} < \frac{15}{16}$	$3 < 9$	$3a - b > 0$	$-7 < -1$	$a - 1 > 0$

Dažnai naudojamos skaičių savybės:

Raidinė formuluotė	Žodinė formuluotė
1. Jei $a > 0$ ir $b > 0$, tai $a + b > 0$, $ab > 0$, $\frac{a}{b} > 0$.	Dviejų teigiamų skaičių suma, sandauga ir dalmuo yra teigiamas skaičius.
2. Jei $a < 0$ ir $b < 0$, tai $a + b < 0$, $ab > 0$, $\frac{a}{b} > 0$.	Mokiniai pildo patys.
3. Jei $a > 0$ ir $b < 0$, tai $ab < 0$, $\frac{a}{b} < 0$, $\frac{b}{a} < 0$.	
4. Jei $ab > 0$, tai $a > 0$ ir $b > 0$ arba $a < 0$ ir $b < 0$.	
5. Jei $ab < 0$, tai $a < 0$ ir $b > 0$ arba $a > 0$ ir $b < 0$.	
6. Jei $ab = 0$, tai arba $a = 0, b \neq 0$; $a \neq 0, b = 0$; $a = 0, b = 0$.	
7. Jei $a < 0$ ir n lyginis, tai $a^n > 0$.	
8. Jei $a < 0$ ir n nelyginis, tai $a^n < 0$.	

NELYGYBIŲ ĮRODYMAS

1. $|a| < b$, tai $-b < a < b$.

   Įrodymas:

   1) Jei $a \geq 0$, tai $|a| = a < b$. Iš sąlygos aišku, kad $b > 0$.

      Jei $b > 0$ ir $b > a$, tai $-b < a$. Vadinasi, $-b < a < b$.

   2) Jei $a < 0$, tai $|a| = -a$; $-a < b, a > -b$. Be to, $a < 0$, o $b > 0$, tai $a < b$.

      Todėl $-b < a < b$.

2. Jei $-b < a < b$, tai $|a| < b$.

   Įrodymas:

   1) Jei $a \geq 0$, tai $a = |a|$. Iš sąlygos $a < b$ gauname, kad $|a| < b$.
   2) Jei $a < 0$, tai $-a = |a|$. Iš sąlygos $-b < a$ aišku, kad $b > -a, b > |a|$ t.y. $|a| < b$.

3. $|a| > b$, tai $a < -b, a > b$.

   Įrodymas:

   1) Jei $a \geq 0$, tai $|\mathrm{a}| = a$. $a > b$.
   2) Jei $a < 0$, tai $|a| = -a$. $-a > b$, $a < -b$.

4. Dviejų neneigiamų skaičių aritmetinis vidurkis nemažesnis už jų geometrinį vidurkį: kai $a \geq 0, b \geq 0$, tai $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

   Įrodymas:

   1 būdas.

   $$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0.$$

   Vadinasi, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

2 būdas.

   Tarkime, kad $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

   $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0 | \cdot 2 > 0$;

   $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$;

   $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$.

   Gautoji nelygybė yra teisinga su duotomis a ir b reikšmėmis. Prielaida $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ teisinga.

3 būdas.

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0.$

Ši nelygybė teisinga, kai $a \geq 0$ ir $b \geq 0$.

$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0;$

$a + b \geq 2\sqrt{ab}; \,|: 2 > 0;$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$

4 būdas.

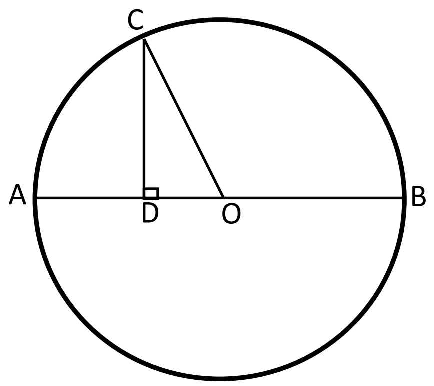
Geometrinė šios nelygybės interpretacija:

1) Brėžiame apskritimą, kurio skersmuo AB lygus $a+b$, $(a > 0, b > 0)$. AD$=a$, DB$=b$.
2) DC statmena AB.
3) Nagrinėjame statųjį trikampį CDO:

   OC>CD; $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

   Kai $a = b$, taškas D sutampa su apskritimo centru O:

   OC=DC, $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$.



<u>Įsiminkite nelygybes</u>:

1. $a > 0, a + \frac{1}{a} \geq 2.$
2. $a^2 + b^2 \geq 2ab.$
3. $|a + b| \leq |a| + |b|.$

Įrodykite nelygybes:

1. $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c).$
2. $a^2 + b^2 + a^2b^2 \geq 4ab - 1.$
3. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,\ ab > 0.$
4. $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2.$
5. $\frac{4a}{1+4a^2} \leq 1.$
6. $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab.$

NELYGYBIŲ TAIKYMAS EKSTREMUMAMS APSKAIČIUOTI

Raskite:

1. $(a+b)_{\min}$, kai $ab=25$ ir a >0.

   Sprendimas.

   1) $a>0$ ir $ab=25$, tai ir $b>0$.

   2) $a>0, b>0$, tai $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$; $a+b \geq 2\sqrt{ab}$.

   $$(a+b)_{min} = 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{25} = 10.$$

2. $(ab)_{\max}$, kai $5a+4b=60, a>0, b>0$.

   $$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2};$$

   $$\sqrt{5a \cdot 4b} \leq \frac{5a+4b}{2};$$

   $$\left(\sqrt{20ab}\right)_{max} = \frac{60}{2} = 30;$$

   $$(ab)_{max} = \frac{900}{20};$$

   $$(ab)_{max} = 45.$$

Raskite:

1. $(3a+2b)_{min}$, kai $ab=6, b>0$.
2. $(ab)_{max}$, kai $a+b=100$, $a>0$, $b>0$.

SKAIČIŲ PALYGINIMAS IR NELYGYBIŲ SAVYBĖS

Palyginkite skaičius $a=\frac{3}{\sqrt{17}}+\sqrt{3{,}88}$ ir $b=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3{,}5}$.

Sprendimas. Įvertinkite skaičių a.

$$\sqrt{17} > \sqrt{16} = 4;$$

$$\frac{1}{\sqrt{17}} < \frac{1}{4};$$

$$\frac{3}{\sqrt{17}} < \frac{3}{4};$$

$$\sqrt{3{,}88} < \sqrt{4} = 2;$$

$$a = \frac{3}{\sqrt{17}} + \sqrt{3{,}88} < 2{,}75;$$

Įvertinkite skaičių b.

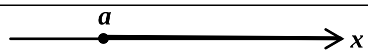
$$\sqrt{2} > \sqrt{1{,}96} = 1{,}4;$$

$$\sqrt[3]{3{,}5} > \sqrt[3]{3{,}375} = 1{,}5;$$

$b = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3,5} > 2,9;$

$a < 2,75 < 2,9 < b$. Vadinasi, $a < b$.

Kai kurie skaičių intervalai

Nelygybė	Žymėjimas, pavadinimas	Vaizdavimas koordinačių ašyje
$a < x < b$	$(a; b)$ – atvirasis intervalas	
$a \leq x \leq b$	$[a; b]$ – uždarasis intervalas	
$a < x \leq b$	$(a;\ b]$ – pusatviris intervalas	
$a \leq x < b$	$[a;\ b)$ – pusatviris intervalas	
$x \geq a$	$[a;\ \infty)$ – spindulys	
$x \leq b$	$(-\infty;\ b]$ – spindulys	
$x > a$	$(a;\ \infty)$ – atvirasis spindulys	
$x < b$	$(-\infty;\ b)$ – atvirasis spindulys	
$-\infty < x < \infty$	$(-\infty;\ \infty)$ – skaičių tiesė	

2. NELYGYBĖS SU VIENU KINTAMUOJU

Išnagrinėkime nelygybes su vienu kintamuoju $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$. Nelygybės apibrėžimo sritimi vadinama reiškinių $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžimo sričių bendroji dalis.

Kiekvieną kintamojo reikšmę iš nelygybės apibrėžimo srities, su kuria nelygybė su kintamuoju virsta teisinga skaitine nelygybe, vadiname nelygybės sprendiniu.

Išspręsti nelygybę su kintamuoju – reiškia rasti visus jos sprendinius arba įrodyti, kad jų nėra.

Dvi nelygybės su vienu kintamuoju, kurių sprendiniai sutampa, vadinamos ekvivalenčiomis.

Nelygybės ekvivalenčios ir tada, kai abi neturi sprendinių.

Spręsdami nelygybę, dažniausiai ją keičiame kita, paprastesne, bet jai ekvivalenčia.

Gautą nelygybę vėl keičiame paprastesne, ekvivalenčia jai ir t.t. Taip keičiame remdamiesi nelygybių ekvivalentumo teoremomis.

<u>1 teorema</u>. Jei vienos arba abiejų nelygybės pusių reiškinius tapačiai pertvarkysime, ir nepasikeis apibrėžimo sritis, tai gausime nelygybę, ekvivalenčią duotajai.

<u>2 teorema</u>. Jeigu iš vienos nelygybės pusės perkelsime į kitą pusę su priešingu ženklu, tai gausime nelygybę, ekvivalenčią duotajai.

<u>3 teorema</u>. Jei abi nelygybės puses padauginsime arba padalysime iš to paties reiškinio, kuris su visomis kintamojo reikšmėmis įgyja teigiamas reikšmes, tai gausime nelygybę, ekvivalenčią duotajai.

<u>4 teorema</u>. Jei abi nelygybės puses padauginsime arba padalysime iš to paties reiškinio, kuris su visomis kintamojo reikšmėmis įgyja neigiamąsias reikšmes, ir nelygybės ženklą pakeisime priešingu, tai gausime nelygybę, ekvivalenčią duotajai.

<u>Išvados</u>:

1. Nelygybės $f(x)(x-a)^{2n+1} > 0$ $(n \epsilon N)$ ir $f(x)(x-a) > 0$ yra ekvivalenčios.
2. Nelygybės $\frac{f(x)}{(x-a)^{2n+1}} > 0$ $(n \epsilon N)$ ir $\frac{f(x)}{x-a} > 0$ yra ekvivalenčios.

1. Įrodysime nelygybių ekvivalentumą:

1) $x + 5 > 3 - 2x$ ir $x + 5 + x^2 > 3 - 2x + x^2$.

Antroji nelygybė gauta, prie abiejų pirmosios nelygybės pusių pridėjus reiškinį x^2, kuris turi prasmę su visomis realiosiomis reikšmėmis. Nelygybės ekvivalenčios.

2) $2x + 4 < x^2$ ir $(2x + 4)(x^2 + 2) < x^2(x^2 + 2)$.

Antroji nelygybė gauta iš pirmosios nelygybės, abi puses padauginus iš reiškinio $x^2 + 2$. Kadangi $x^2 + 2 > 0$ su bet kuria x reikšme, tai nelygybės yra ekvivalenčios.

2. Išsiaiškinsime, kodėl šios nelygybės yra neekvivalenčios

1) $2x + 1 > 5$ ir $2x + 1 + \frac{1}{x-5} > 5 + \frac{1}{x-5} >$.

Kintamojo x reikšmė 5 yra pirmosios nelygybės sprendinys, o nėra antrosios nelygybės sprendiniu. Todėl nelygybės nėra ekvivalenčios. Kodėl pažeistas ekvivalentumas? Reiškinys $\frac{1}{x-5}$ ne su visomis kintamojo reikšmėmis iš pirmosios nelygybės apbrėžimo srities turi prasmę. Neapibrėžta, kai $x = 5$.

2) $\frac{3}{\mathrm{x}-2} \geq 1$ ir $3 \geq x - 2$.

$x = 1$ tenkina antrąją nelygybę $(3 \geq -1)$, bet netenkina pirmosios nelygybės ($-3 \geq 1$ – klaidingas teiginys). Nelygybės nėra ekvivalenčios.

Antrąją nelygybę gavome, pirmąją nelygybę padauginę iš reiškinio $x - 2$. Nelygybės ženklo nepakeitėme. Bet $x - 2$ įgyja ne tik teigiamas reikšmes pirmosios nelygybės apibrėžimo srityje. Todėl ir pažeistas ekvivalentumas.

3. TIESINĖS NELYGYBĖS

1. Išspręskite nelygybę $\frac{x-5}{6}+1 \le \frac{5x}{2}-\frac{x-3}{2}$.

   Abi nelygybės puses dauginame iš bendro skaitinio vardiklio $6 > 0$:

   $x-5+1\cdot 6 \le 5x\cdot 3-(x-3)\cdot 3$.

   Sudauginame: $x-5+6 \le 15x-3x+9$.

   Perkeliame dėmenis: $x-15x+3x \le 9+5-6$.

   Sutraukiame panašiuosius dėmenis: $-11x \le 8$.

   Padalijame abi nelygybės puses iš $-11 < 0$; $x \ge -\frac{8}{11}$.

   Ats.: $\left[-\frac{8}{11};\ \infty\right)$.

2. Išspręskite nelygybes:

   a) $2(x+1)+5 > 3-(1-2x)$;

   $2x+2+5 > 3-1+2x$;

   $2x-2x > 3-1-2-5$;

   $0\cdot x > -5$.

   Nelygybė teisinga su bet kuria x reikšme.

   Ats.: $(-\infty;\ \infty)$.

   b) $3(2-x)-2 > 5-3x$;

   $6-3x-2 > 5-3x$;

   $-3x+3x > 5-6+2$;

   $0\cdot x > 1$.

   Nelygybė neturi sprendinių.

   Ats.: sprendinių nėra

   c) $0\cdot x < 5p^2+1$

   x – bet koks skaičius, nes $5p^2+1 > 0$ su bet kuria p reikšme.

   Ats.: $(-\infty;\ \infty)$.

   d) $0\cdot x < -2b^2-10$

   x – bet koks skaičius, nes $-2b^2-10 < 0$ su bet kuria b reikšme.

   Ats.: $(-\infty;\ \infty)$.

   e) $0\cdot x < b^2-2b+10$;

   $0\cdot x < (b-1)^2$.

   Nelygybė teisinga, kai $b-1 \ne 0$; $b \ne 1$.

   Ats.: x – bet koks skaičius, kai $b \ne 1$; nelygybė sprendinių neturi, kai $b = 1$.

f) $0 \cdot x \geq 1 - 2m + m^2$;

$0 \cdot x \geq (1-m)^2$.

Nelygybė teisinga, kai $1 - m = 0$;

$m = 1$.

Ats.: x – bet koks skaičius, kai $m = 1$; nelygybė sprendinių neturi, kai $m \neq 1$.

g) $0 \cdot x \geq b + 1$.

Nelygybė teisinga, kai $b + 1 < 0$;

$b < -1$.

Ats.: .: x – bet koks skaičius, kai $b < -1$; nelygybė sprendinių neturi, kai $b \geq -1$.

3. Raskite nelygybės $x(x+3) > (x+1)(x+3)$ didžiausią sveiką sprendinį.

$x(x+3) - (x+1)(x+3) > 0$;

$(x+3)(x - x - 1) > 0$;

$(x+3)(-1) > 0| : (-1 < 0)$;

$x + 3 < 0$;

$x < -3$.

Didžiausias sveikas sprendinys yra skaičius -4.

Ats.: -4.

4. Išspręskite nelygybę $\frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < 2 + \frac{x}{6}; \Big| \cdot\ 6 > 0$;

$3(x+1) - 2(x+2) < 2 \cdot 6 + x$;

$3x + 3 - 2x - 4 < 12 + x$;

$3x - 2x - x < 12 - 3 + 4$;

$0 \cdot x < 13$;

x – bet koks skaičius.

Ats.: $(-\infty;\ \infty)$.

<u>Išspręskite nelygybes</u>:

1. $5(x+2) - x > 3(x-1) + x$.
2. $3(x-2) + x < 4x + 1$.
3. $\frac{5x+3}{2} - 1 \geq 3x - \frac{x-7}{2}$.
4. $(x-1)^2 + 7 > (x+4)^2$.
5. $(x+3)(x-2) \geq (x+2)(x-3)$.
6. $25\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right) + 3x - 1 > (5x-2)^2 + \frac{43x-2}{2}$.
7. $(x-1)^2 - (1+x)(1-x) < 2(1-x)^2$.

4. TIESINIŲ NELYGYBIŲ SISTEMOS

Dvi nelygybės su vienu kintamuoju sudaro nelygybių sistemą, kai ieškoma kintamojo reikšmių, tenkinančių abi nelygybes.

Dviejų pirmojo laipsnio nelygybių su vienu kintamuoju sistema sprendžiama, atskirai randant kiekvienai sistemos nelygybei sprendinius. Išsprendę nelygybių sistemą, gauname vieną šių atvejų:

1) $\begin{cases} x > a, \\ x > b \end{cases}$

$x > a$, kai $a > b$.

2) $\begin{cases} x < a, \\ x < b \end{cases}$

$x < b$, kai $b < a$.

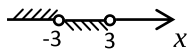
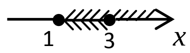
3) $\begin{cases} x < a, \\ x > b \end{cases}$

$b < x < a$, kai $a > b$.

4) $\begin{cases} x > a, \\ x < b \end{cases}$

Sprendinių nėra, kai $a > b$.

1. Mokiniai nelygybių sistemos sprendinių radimą kartoja, žaisdami domino „Nelygybių sistemos sprendiniai“:

$(0; 4)$	$\begin{cases} x \leq 5, \\ x < 7. \end{cases}$	$x \leq 5$	$\begin{cases} x < 3, \\ x < -2. \end{cases}$
$x < -2$		$[-3;\ 4)$	$\begin{cases} x > 3, \\ x > -2. \end{cases}$
$x > 3$	$\begin{cases} x < 5, \\ x > 7. \end{cases}$	Sprendinių nėra	
$x \leq 3$	$\begin{cases} x < 7, \\ x > 5. \end{cases}$	$5 < x < 7$	
$[3;\ \infty)$	$\begin{cases} x < 5, \\ x < 3. \end{cases}$	$(-\infty;\ 3)$	$\begin{cases} x > -2, \\ x > 2. \end{cases}$
$(2;\ \infty)$	$\begin{cases} x < 4, \\ x > 0. \end{cases}$		

2. Išspręskite nelygybių sistemas:

1) $\begin{cases} 7x + 8 < 6 + 5x, \\ 7x - 5 > 7 - 5x; \end{cases}$

$\begin{cases} 7x - 5x < 6 - 8, \\ 7x + 5x > 7 + 5; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x < -2, |: 2 > 0 \\ 12x > 12, |: 12 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x < -1, \\ \ x > 1. \end{cases}$

sprendinių nėra.

2) $\begin{cases} 5(x + 1) + 6(x + 2) > 9(x + 3) \\ 7x - 3(2x + 3) > 2(x - 18); \end{cases}$,

$\begin{cases} 5x + 5 + 6x + 12 > 9x + 27, \\ 7x - 6x - 9 > 2x - 36; \end{cases}$

$\begin{cases} 5x + 6x - 9x > 27 - 5 - 12, \\ 7x - 6x - 2x > -36 + 9; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x > 10, |: 2 > 0 \\ -x > -27; |: (-1 < 0) \end{cases}$

$\begin{cases} x > 5, \\ x < 27. \end{cases}$

$5 < x < 27.$

Ats.: sprendinių nėra. Ats.: $(5; 27)$.

3) $\begin{cases} 3 - \frac{3-7x}{10} + \frac{x+1}{2} > 4 - \frac{7-3x}{5}, & \Big| \cdot 10 > 0 \\ 7(3x - 6) + 4(17 - x) > 11 - 5(x - 3); \end{cases}$

$\begin{cases} 30 - 3 - 7x + 5x + 5 > 40 - 14 + 6x, \\ 21x - 42 + 68 - 4x > 11 - 5x + 15; \end{cases}$

$\begin{cases} 7x + 5x - 6x > 40 - 14 - 30 + 3 - 5, \\ 21x - 4x + 5x > 11 + 15 + 42 - 68; \end{cases}$

$\begin{cases} 6x > -6, |: 6 > 0 \\ 22x > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x > -1, \\ \ x > 0. \end{cases}$

$x > 0.$

Ats.: $(0;\ \infty)$

3. Išspręskime nelygybes:

1. $(x - 1)(x - 2) > 0.$

1) $\begin{cases} x - 1 < 0, \\ x - 2 < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x < 1, \\ x < 2; \end{cases}$

$x < 1.$

2) $\begin{cases} x - 1 > 0, \\ x - 2 > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x > 1, \\ x > 2; \end{cases}$

$x > 2.$

Ats.: $(-\infty; 1)$, $(2;\ \infty)$.

2. $(x + 7)(x - 5) < 0.$

1) $\begin{cases} x + 7 < 0, \\ x - 5 > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x < -7, \\ \ x > 5; \end{cases}$

$x < 1.$

sprendinių nėra

2) $\begin{cases} x + 7 > 0, \\ x - 5 < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x > 7, \\ x < 5; \end{cases}$

$-7 < x < 5.$

Ats.: $(-7; 5)$.

3. $\frac{1-x}{5x+2} \leq 0.$

1) $\begin{cases} 1-x \leq 0, \\ 5x+2 > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 1, \\ x > -0{,}4; \end{cases}$

$x \geq 1.$

2) $\begin{cases} 1-x \geq 0, \\ 5x+2 < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 1, \\ x < -0{,}4; \end{cases}$

$x < -0{,}4.$

Ats.: $(-\infty; -0{,}4) \cup [1;\ \infty).$

4. $\frac{2x-3}{x+1} \geq 0.$

1) $\begin{cases} 2x-3 \leq 0, \\ x+1 < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 1{,}5, \\ x < -1; \end{cases}$

$x < -1.$

3) $\begin{cases} 2x-3 \geq 0, \\ x+1 > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 1{,}5, \\ x > -1; \end{cases}$

$x > 1{,}5.$

Ats.: $(-\infty; -1) \cup [1{,}5;\ \infty).$

Išspręskite:

1. Su kuriomis *a* reikšmėmis nelygybių sistema turi nors vieną sprendinį:

   1) $\begin{cases} x \geq 2, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leq 4, \\ x \geq a \end{cases}$?

2. Su kuriomis *b* reikšmėmis nelygybių sistema neturi sprendinių:

   1) $\begin{cases} x > 2, \\ x < b; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leq 4, \\ x \geq b \end{cases}$?

3. Su kuriomis *c* reikšmėmis nelygybių sistemos $\begin{cases} x > 2, \\ x \geq c. \end{cases}$ Sprendinys yra intervalas:

   a) $(2;\ \infty)$; b) $[3;\ \infty)$?

4. Su kuriomis *p* reikšmėmis nelygybių sistemos 1) $\begin{cases} x \geq 2, \\ x < p, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 4, \\ x \geq p \end{cases}$

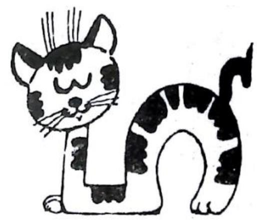
   turi tik tris sveikus sprendinius?

5. Su kuriomis *a* reikšmėmis skaičius –7 yra nelygybių sistemos $\begin{cases} x \leq a, \\ x < -5 \end{cases}$ didžiausias sveikas sprendinys?

6. Su kuriomis *m* reikšmėmis skaičius 5 yra nelygybių sistemos $\begin{cases} x > m, \\ x \geq 3 \end{cases}$ mažiausias sveikas sprendinys?

7. Išspręskite dvigubas nelygybes (loto – piešinys):

$8 < 3x - 1 < 14$	$-3 < 2x - 7 < 2$
$5 < 1 - 4x < 21$	$2 < 5 - x < 10$
$1 < \dfrac{x-2}{3} < 12$	$2 < \frac{2+x}{3} < 3$
$-9 < \dfrac{3-x}{4} < 0$	$-1 < \dfrac{6-2x}{6} < 0$
$2 < x < 4{,}5$	$3 < x < 5$
$5 < x < 3$	$-5 < x < -1$
$4 < x < 7$	$5 < x < 38$
$3 < x < 6$	$3 < x < 39$



5. KVADRATINĖS NELYGYBĖS

Kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ ženklas:

1) Jei diskriminantas $D = b^2 - 4ac$ yra neigiamas skaičius, tai kvadratinis trinaris yra pastovaus ženklo:

   $ax^2 + bx + c < 0$ su bet kuria realiąja x reikšme, kai $a < 0$;

   $ax^2 + bx + c > 0$ su bet kuria realiąja x reikšme, kai $a > 0$.

2) Jei diskriminantas $D = b^2 - 4ac$ lygus 0, tai kvadratinis trinaris yra pastovaus ženklo:

   $ax^2 + bx + c \leq 0$ su bet kuria realiąja x reikšme, kai $a < 0$;

   $ax^2 + bx + c \geq 0$ su bet kuria realiąja x reikšme, kai $a > 0$.

3) Jei diskriminantas $D = b^2 - 4ac$ yra teigiamas skaičius, tai trinaris išskaidomas tiesiniais dauginamaisiais $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, kai $x_1 < x_2$:

   $a < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, kai $x \in (x_1;\ x_2)$;

   $ax^2 + bx + c \geq 0$, kai $x \in [x_1;\ x_2]$;

   $ax^2 + bx + c < 0$, kai $x \in (-\infty;\ x_1) \cup (x_2;\ \infty)$;

   $ax^2 + bx + c \leq 0$, kai $x \in (-\infty;\ x_1] \cup [x_2;\ \infty)$.

   $a > 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, kai $x \in (-\infty;\ x_1) \cup (x_2;\ \infty)$;

   $ax^2 + bx + c \geq 0$, kai $x \in (-\infty;\ x_1] \cup [x_2;\ \infty)$;

   $ax^2 + bx + c < 0$, kai $x \in (x_1;\ x_2)$;

   $ax^2 + bx + c \leq 0$, kai $x \in [x_1;\ x_2]$.

Išspręskite nelygybes:

1. $(x - 1)^2 + 1 > 0$

   Nelygybė teisinga su bet kuria realiąja x reikšme, nes kairioji nelygybės pusė visada teigiama.

   Ats.: $(-\infty;\ \infty)$.

2. $(x + 5)^2 + 3 < 0$

   Nelygybė sprendinių neturi, nes kairioji nelygybės pusė visada teigiama.

   Ats.: sprendinių nėra

3. $-(x + 1)^2 - 2 < 0$

   Nelygybė teisinga su bet kuria realiąja x reikšme, nes kairioji nelygybės pusė visada neigiama.

   Duotąją nelygybę galėjome pertvarkyti į nelygybę $(x + 1)^2 + 2 > 0$.

   Ats.: $(-\infty;\ \infty)$.

4. $-(x-2)^2-4>0$

Nelygybė sprendinių neturi, nes kairioji nelygybės pusė įgyja tik neigiamas reikšmes.

Ats.: sprendinių nėra

5. $x^2-4x+6>0$

$\frac{1}{4}D=2^2-6=-2<0;\;\; a=1>0.$

Nelygybė teisinga su bet kokia realiąja *x* reikšme.

Ats.: $(-\infty;\ \infty)$.

6. $2x^2-4x+9\leq 0$

$\frac{1}{4}\mathrm{D}=2^2-2\cdot 9=-14<0;\;\; a=2>0.$

Duotoji nelygybė sprendinių neturi.

Ats.: sprendinių nėra

7. $-x^2+x-2<0$

$D=1-4\cdot(-1)\cdot(-2)=-7<0;\;\; a=-1<0.$

Nelygybė teisinga su bet kuria *x* reikšme.

Ats.: $(-\infty;\ \infty)$.

8. $-3x^2+5x-9>0$

$D=5^2-4\cdot(-3)\cdot(-9)=-83<0;\;\; a=-3<0.$

Nelygybė sprendinių neturi.

Ats.: sprendinių nėra

9. $4x^2-4x+1\geq 0$

$(2x-1)^2\geq 0.$

Nelygybė teisinga visoms *x* reikšmėms

Ats.: $(-\infty;\ \infty)$.

10. $-9x^2-6x-1<0$

$-(3x+1)^2<0.$

$3x+1\neq 0;$

$x\neq -\frac{1}{3};$

Ats.: $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};\ \infty\right)$.

11. $x^2-2x-3>0$

$\frac{1}{4}\mathrm{D}=1+3=4>0;\;\; x_1=-1;\;\; x_2=3.$

$(x+1)(x-3)>0.$

$x<-1;\;\; x>3.$

Ats.: $(-\infty;-1)\cup(3;\ \infty)$.

12. $2x^2 + 3x - 2 < 0$

$D = 25 > 0;\ \ x_1 = -2;\ \ x_2 = \frac{1}{2}.$

$2(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right) < 0.$

$-2 < x < \frac{1}{2}.$

Ats.: $\left(-2;\ \frac{1}{2}\right)$.

13. $x^2\left(x + 3\sqrt{5}\right) + 5\left(3x + \sqrt{5}\right) > 0$

$x^3 + 3x^2\sqrt{5} + 15x + 5\sqrt{5} > 0;$

$\left(x + \sqrt{5}\right)^3 > 0;$

$x + \sqrt{5} > 0;\ \ x > -\sqrt{5}.$

Ats.: $\left(-\sqrt{5};\ \infty\right)$.

14. $(2x^2 + 11x + 6)(2x^2 + 11x + 13) > 8$

$\begin{cases} 2x^2 + 11x + 6 = t, \\ t(t+7) > 8. \end{cases}$

$t^2 + 7t - 8 > 0;$

$1 + 7 - 8 = 0,$ tai $t_1 = 1;\ \ t_2 = -8.$

$(t-1)(t+8) > 0,$

$t < -8;\ \ t > 1.$

$2x^2 + 11x + 6 < -8;$

$2x^2 + 11x + 14 < 0;$

$D = 9 > 0;\ \ x_1 = -3{,}5;\ \ x_2 = -2;$

$-3{,}5 < x < -2.$

$2x^2 + 11x + 6 > 1;$

$2x^2 + 11x + 5 > 0;$

$D = 81 > 0;\ \ x_1 = -5;\ \ x_2 = -0{,}5;$

$x < -5;\ \ x > -0{,}5.$

Ats.: $(-\infty; -5) \cup (-3{,}5;\ -2) \cup (-0{,}5;\ \infty)$.

15. $(x^2 - 4x - 5)(x^2 + 1) \geq 0$

Kadangi $(x^2 + 1) > 0$ su bet kuria x reikšme, tai:

$x^2 - 4x - 5 \geq 0,$

$1 - (-4) + (-5) = 0,$ tai $x_1 = -1;\ \ x_2 = 5,$

$x \leq -1;\ \ x \geq 5.$

Ats.: $(-\infty;\ -1] \cup [5;\ \infty)$.

16. $(x-5)(3x^2-x+2)(x^2-25) \leq 0$

$(x-5)^2(x+5)(3x^2-x+2) \leq 0,$

Kadangi $(x-5)^2 > 0$ ir $3x^2-x+2 > 0$ $(D < 0$ ir $a = 3 > 0)$ su bet kuria x reikšme, tai:

$x+5 \leq 0;$ $\quad$ $x-5=0;$

$x \leq -5.$ $\quad$ $x = 5.$

Ats.: $x \leq -5; x = 5.$

17. $(x^3-27)(x^3+1)(2x+3-x^2) \geq 0$

$(x-3)(x^2+3x+9)(x+1)(x^2-x+1)\big(-(x+1)(x-3)\big) \geq 0,$

$(x-3)^2(x+1)^2(x^2+3x+9)(x^2-x+1) \leq 0,$

Kadangi $(x-3)^2 \geq 0$, $(x+1)^2 \geq 0$, $x^2+3x+9 > 0$ $(D < 0$ ir $a = 1 > 0)$ ir $x^2-x+1 > 0$ $(D < 0$ ir $a = 1 > 0)$ su bet kuria x reikšme, tai:

$x-3=0;$ $\quad$ $x+1=0;$

$x = 3.$ $\quad$ $x = -1.$

Ats.: $-1; 3$

<u>Išspręskite nelygybes</u>:

1. $x^2+10x+25 > 0.$
2. $-x^2+6x-9 \geq 0.$
3. $x^2-2x-3 > 0.$
4. $-2x^2+9x-4 > 0.$
5. $-3x^2-6x+45 < 0.$
6. $(27-x^3)(x^2-9) \leq 0.$
7. $\frac{4x^2+12x+9}{3\sqrt[3]{5}} < 0.$
8. $(x^2-x-2)(2x+3+4x^2) \leq 0.$
9. $x^2+6x+9 \geq 0.$
10. $9x^2-12x+4 < 0.$

6. INTERVALŲ METODAS

1. Išspręskite nelygybę $(x+1)x(x-1)<0$.

Trijų dauginamųjų sandauga neigiama, kai:

$\begin{cases} x+1<0, \\ x>0, \\ x-1>0\,, \end{cases}$ $\begin{cases} x+1<0, \\ x<0, \\ x-1<0\,, \end{cases}$ $\begin{cases} x+1>0, \\ x<0, \\ x-1>0\,, \end{cases}$ $\begin{cases} x+1>0, \\ x>0, \\ x-1<0\,, \end{cases}$

$\begin{cases} x<-1, \\ x>0, \\ x>1\,, \end{cases}$ $\begin{cases} x<-1, \\ x<0, \\ x<1\,, \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1, \\ x<0, \\ x>1\,, \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1, \\ x>0, \\ x<1\,, \end{cases}$

Sprendinių nėra. $x<-1$. Sprendinių nėra. $0<x<1$.

Ats.: $(-\infty;\ -1)\cup(0;1)$.

Toks sprendimo būdas gremėzdiškas. Patogesnis – vadinamasis intervalų metodas. Paaiškinsime jo prasmę.

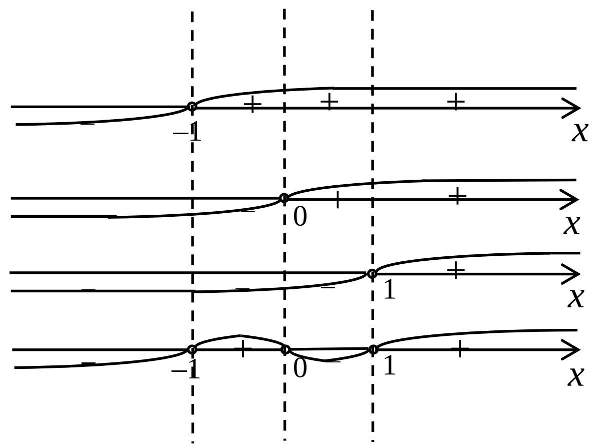
Tiesinio dvinario $x-a$ ženklas yra pastovus: intervale $(-\infty; a)$ neigiamas, o intervale $(a;\ \infty)$ teigiamas. Norint sužinoti kelių tiesinių dvinarių sandaugos ženklą tam tikrame intervale, reikia išsiaiškinti koks yra sandaugos ženklas bet kuriame to intervalo taške.

$x+1$ ženklas:

x ženklas:

$x-1$ ženklas:

$(x+1)x(x-1)$ ženklas:



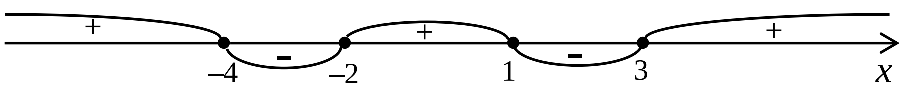
1) Išspręskite nelygybes: $(x+4)(x+2)(x-1)(x-3)\geq 0$.

Randame tas kintamojo reikšmes, su kuriomis kiekvienas kairės pusės daugiklis lygus nuliui:

$x+4=0,$ $x+2=0,$ $x-1=0,$ $x-3=0,$

$x=-4.$ $x=-2.$ $x=1.$ $x=3.$

Pavaizduokime jas koordinačių tiesėje. Jeigu nelygybė griežta, vaizduojame tuščiais skrituliukais; jei nelygybė negriežta, kaip šiuo atveju, užbrūkšniuotais skrituliukais. Taškai visą tiesę suskirsto į sritis (šiuo atveju į penkis intervalus).



Ištirsime nelygybes kairiosios pusės ženklą kiekvienoje šių sričių.

Jei $x \in (3;\ \infty)$ (pirmoji sritis iš dešinės), tai x didesnis už visas reikšmes, todėl visi daugikliai teigiami. Tai reiškia, kad teigiama ir visa nelygybės pusė. Pereinant į tolimesnį intervalą kairėje, t.y. intervalą $(1; 3)$, keičiasi tik vieno daugiklio ženklas, o visų kitų daugiklių ženklai lieka tie patys. Taigi sandaugos ženklas keičiasi į priešingą (buvo teigiamas, tampa neigiamas). Taip bus ir pereinant į tolimesnį intervalą kairėje. Taigi sandaugos ženklai išskirtose srityse (intervaluose) keičia vienas kitą.

Nustatę ženklus intervaluose, išrenkame intervalus, kuriuose nelygybė teisinga. Šiuo atveju reikia išrinkti sritis, kurios pažymėtos ženklu „+“.

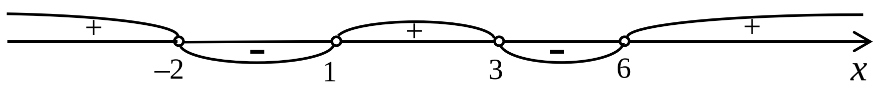
Gausime: $x \leq -4;\ -2 \leq x \leq 1;\ \ x \geq 3.$

Ats.: $(-\infty;\ -4] \cup [-2;\ 1] \cup [3;\ \infty)$.

2) $(x-3)(x-6)(x+2)(x-1) > 0.$

$x-3=0,$ $\quad x-6=0,$ $\quad x+2=0,$ $\quad x-1=0,$

$x=3.$ $\quad x=6.$ $\quad x=-2.$ $\quad x=1.$



$x < -2;\ 1 \leq x \leq 3;\ \ x > 6.$

Ats.: $(-\infty; 2) \cup (1; 3) \cup (6;\ \infty)$.

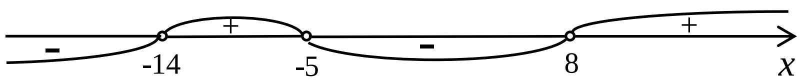
3) $(x+14)(8-x)(5+x) > 0.$

Kadangi sandaugoje yra daugiklis $8-x$, tai nelygybę padauginame iš (-1) ir gauname:

$(x+14)(x-8)(x+5) < 0$

$x+14=0,$ $\quad x-8=0,$ $\quad x+5=0,$

$x=-14.$ $\quad x=8.$ $\quad x=-5.$



$x < -14;\ -5 < x < 8.$

Ats.: $(-\infty; -14) \cup (-5; 8)$.

Jeigu nelygybėje $f(x) \cdot g(x) > 0$ daugiklis $f(x)$ toks, kad $f(x) > 0$ visiems realiems x, tai šį daugiklį galima atmesti, t.y. pradinė nelygybė ekvivalenti nelygybei $g(x) > 0$. Jei daugiklis $f(x) = 0$, tai tos kintamojo x reikšmės, su kuriomis $f(x) = 0$, bus pradinės nelygybės sprendiniai, jei nelygybė yra negriežta; ir nebus sprendiniais, jei nelygybė yra griežta.

3. Išspręskime nelygybes:

1) $(27 - x^3)(x^2 - 9) \leq 0.$

$(3 - x)(9 + 3x + x^2)(x - 3)(x + 3) \leq 0;\ |\cdot(-1 < 0).$

$(x - 3)^2(9 + 3x + x^2)(x + 3) \geq 0.$

Kadangi $(x - 3)^2 \geq 0$ ir $x^2 + 3x + 9 > 0$ $(D < 0\ \ ir\ \ a = 1 > 0)$ su bet kuria realiąja x reikšme, tai:

$x + 3 > 0$, $\qquad x - 3 = 0$

$x \geq -3.$ $\qquad x = 3.$

Ats.: $[-3;\ \infty)$.

2) $x^4 + 8x^3 + 12x^2 \leq 0.$

$x^2(x^2 + 8x + 12) \leq 0;$

$x^2 + 8x + 12 = (x + 6)(x + 2);$

$x^2(x + 6)(x + 2) \leq 0.$

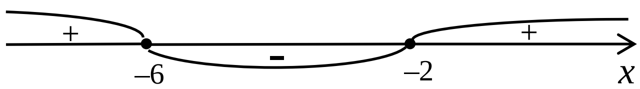
Kadangi $x^2 \geq 0$ su bet kuria x reikšme, tai:

$(x + 6)(x + 2) \leq 0$ ir $x^2 > 0,$

$x + 6 = 0, x + 2 = 0, x = 0.$

$x = -6, \quad x = -2.$

$-6 \leq x \leq -2.$



Ats.: $[-6;\ -2] \cup \{0\}$.

3) $(x + 8)^3(x + 4)(8 - x)^5(-x^2 + 12x - 36) < 0.$

$(x + 8)(x + 4)(x - 8)(x - 6)^2 < 0.$

Kadangi $(x - 6)^2 \geq 0$ su bet kuria x reikšme, tai:

$$\begin{cases}(x + 8)(x + 4)(x - 8) < 0,\\ x - 6 \neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x < -8,\ -4 < x < 8,\\ x \neq 6.\end{cases}$$

$x < -8,\ -4 < x < 6,\ 6 < x < 8.$

Ats.: $(-\infty;\ -8) \cup (-4; 6) \cup (6; 8)$.

Išspręskite nelygybes:

1. $(x-2)(x-3)(x-12) < 0.$
2. $(x^2+x-2)(x^2-2x-3) < 0.$
3. $(7-x)(2-x)^2(x+1) \leq 0.$
4. $(x^3+27)(x^3+1)(-x^2+2x+3) > 0.$
5. $(x^2-5)(10x-x^2-25)(10x+x^2+25) > 0.$
6. $(x^3-4x)(x^2+2x-8)(x^2+7x+25) \leq 0.$
7. $(x^2-9)(x^2+2)(x+5)(x^2-8x+7)(x-2) < 0.$
8. $(3x-2)(x-3)^3(x+1)^3(x+2)^4 < 0.$
9. $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1) \leq 0.$
10. $(16-x^2)(x^2+4)(x^2+x+1)(x^2-x-3) \leq 0.$
11. $(x^2-4)(x^2-4x+4)(x^2-6x+8)(x^2+4x+4) < 0.$
12. $(2x^2-x-5)(x^2-9)(x^2-3x) \leq 0.$

7. TRUPMENINĖS NELYGYBĖS

Nelygybės $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ arba $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ ekvivalenti nelygybei $f(x)g(x) > 0$ arba $f(x)g(x) < 0$.

Išspręskime nelygybes:

1. $\frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)^2} \leq 0.$

Kadangi $(x+1)^2 \geq 0$ su bet kuria x reikšme, tai:

$\begin{cases}(x+3)(x-2) \leq 0, \\ x+1 \neq 0;\end{cases}$

$\begin{cases}-3 \leq x \leq 2, \\ x \neq -1.\end{cases}$

$-3 \leq x < -1;\ \ -1 < x \leq 2.$ Ats.: $[-3;\ -1) \cup (-1;\ 2].$

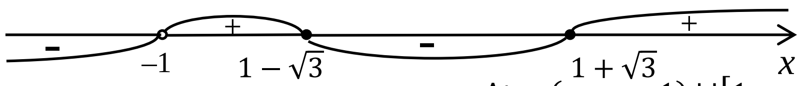
2. $x \leq 3 - \frac{1}{x+1}$

$x - 3 + \frac{1}{x+1} \leq 0;$

$\frac{x^2+x-3x-3+1}{x+1} \leq 0;\ \ x^2 - 2x - 2 = 0,$

$\frac{x^2-2x-2}{x+1} \leq 0.\qquad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}.$

$x < -1;\ \ 1-\sqrt{3} \leq x \leq 1+\sqrt{3}.$



Ats.: $(-\infty;\ -1) \cup [1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}].$

3. $(x^2-2x)(2x-2) - \frac{9(2x-2)}{x^2-2x} \leq 0.$

$\frac{(x^2-2x)^2(2x-2)-9(2x-2)}{x^2-2x} \leq 0;$

$\frac{2(x-1)\left((x^2-2x)^2-9\right)}{x^2-2x} \leq 0;$

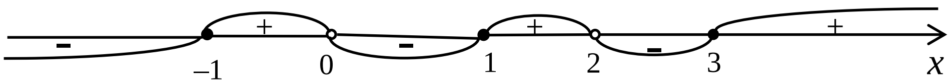
$\frac{2(x-1)(x^2-2x-3)(x^2-2x+3)}{x(x-2)} \leq 0;\qquad x^2 - 2x - 3 = 0.$

$\frac{2(x-1)(x+1)(x-3)(x^2-2x+3)}{x(x-2)} \leq 0;\quad 1 - (-2) + (-3) = 0,$ tai $x_1 = -1;\ \ x_2 = 3.$

Kadangi $2(x^2-2x+3) > 0$ $(D < 0$ ir $a = 1 > 0)$ su bet kuria x reikšme, tai:

$\frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{x(x-2)} \leq 0.$

$x \leq -1;\ \ 0 < x \leq 1;\ \ 2 < x \leq 3.$

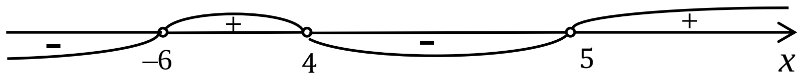


Ats.: $(-\infty;\ -1] \cup (0;\ 1] \cup (2;\ 3].$

4. $\frac{(x+6)^3(x-4)}{(5-x)^5} > 0.$

$\frac{(x+6)(x-4)}{(x-5)} < 0.$

$x < -6;\;\; 4 < x < 5.$

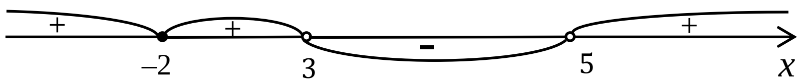


Ats.: $(-\infty;\; -6) \cup (4; 5).$

5. $\frac{(x+2)^2(x-5)}{(x-3)(x+2)^2} > 0.$

$\begin{cases} \frac{x-5}{x+2} > 0, \\ x+2 \neq 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x < 3,\; x > 5, \\ x \neq -2. \end{cases}$



$x < -2, \quad -2 < x < 3, \;\; x > 5.$

Ats.: $(-\infty;\; -2) \cup (-2; 3) \cup (5;\; \infty).$

6. $\frac{2}{3-2x} - \frac{1}{4x^2-9} < \frac{10}{2x+3}.$

Visus nelygybės narius perkeliame į vieną pusę (pavyzdžiui, į kairę), kad kita nelygybės pusė būtų lygi nuliui.

$\frac{2}{3-2x} + \frac{1}{9-4x^2} - \frac{10}{2x+3} < 0.$

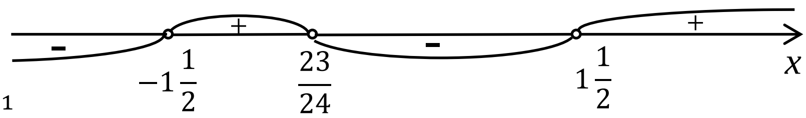
Kairiąją nelygybės pusę užrašome trupmena:

$\frac{2(3+2x)+1-10(3-2x)}{9-4x^2} < 0;$

$\frac{24x-23}{9-4x^2} < 0.$

Vardiklyje esantį reiškinį išskaidome dauginamaisiais:

$\frac{24x-23}{(2x-3)(2x+3)} > 0.$



$-1\frac{1}{2} < x < \frac{23}{24};\;\; x > 1\frac{1}{2}.$

Ats.: $\left(-1\frac{1}{2};\, \frac{23}{24}\right) \cup \left(1\frac{1}{2};\; \infty\right).$

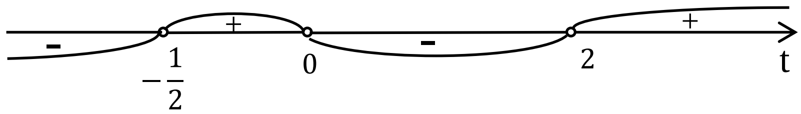
7. $\frac{x^2-1}{x^2+2x} - \frac{x^2+2x}{x^2-1} > \frac{3}{2}.$

$\frac{x^2-1}{x^2+2x} = \mathrm{t},$ gauname nelygybę

$\mathrm{t} - \frac{1}{\mathrm{t}} > \frac{3}{2}; \qquad 2t^2 - 3t - 2 = 0;$

$\frac{2t^2-3t-2}{t} > 0; \qquad t_1 = -\frac{1}{2};\;\; t_2 = 2.$

$\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-2)}{t} > 0.$

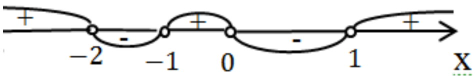


$-\dfrac{1}{2} < t < 0;$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2+2x} < 0, \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+2x} > -\dfrac{1}{2} \end{cases};$$

1) $\frac{x^2-1}{x^2+2x} < 0$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x^2+2x} < 0$$



$-2 < x < -1; \quad 0 < x < 1.$

2) $\frac{x^2-1}{x^2+2x} > -\frac{1}{2}$

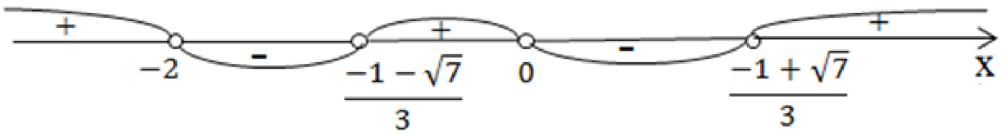
$$\frac{x^2-1}{x(\mathrm{x}+2)} + \frac{1}{2} > 0;$$

$$\frac{2x^2-2+x^2+2x}{2x(\mathrm{x}+2)} > 0;$$

$$\frac{2x^2+2x-2}{2x(\mathrm{x}+2)} > 0;$$

$$2x^2+2x-2=0.$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}.$$



$$x < -2; \quad \frac{-1-\sqrt{7}}{3} < x < 0; \quad x > \frac{-1+\sqrt{7}}{3}.$$

$$\begin{cases} -2 < x < -1; \quad 0 < x < 1, \\ x < -2; \quad \dfrac{-1-\sqrt{7}}{3} < x < 0; \quad x > \dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}. \end{cases}$$

$$\frac{-1-\sqrt{7}}{3} < x < -1; \quad \frac{-1+\sqrt{7}}{3} < x < 1.$$

$t > 2.$

$\frac{x^2-1}{x^2+2x} > 2;$

$\frac{x^2-1}{x^2+2x} - 2 > 0;$

$$\frac{x^2-1-2x^2-4x}{x^2+2x} > 0;$$

$$\frac{-x^2-4x-1}{x^2+2x} > 0;$$

$$\frac{x^2+4x+1}{x^2+2x} < 0;$$

Kadangi $x^2+4x+1 > 0$ $(D < 0 \ ir \ a = 1 > 0)$

su bet kuria x reikšme, tai $x(x+2) < 0$,

$-2 < x < 0.$

Ats.:$(-2;0) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3};1\right)$

8. $(x^2 - x - 3)^2 - (x^2 - x - 3)(x - 1) \geq 2(x - 1)^2.$

$(x^2 - x - 3)^2 - (x^2 - x - 3)(x - 1) - 2(x - 1)^2 \geq 0.$

$x - 1 = 0, \;\; x = 1.$

$(1^2 - 1 - 3)^2 - 0 - 0 \geq 0.$

$9 \geq 0$ (teisingas teiginys)

$x = 1$ – nelygybės sprendinys.

Nelygybę daliname iš $(x - 1)^2 \neq 0$.

$$\left(\frac{x^2 - x - 3}{x - 1}\right)^2 - \frac{x^2 - x - 3}{x - 1} - 2 \geq 0;$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 3}{x - 1} = \mathrm{t}, \\ \mathrm{t}^2 - \mathrm{t} - 2 \geq 0; \end{cases}$$

$(t - 2)(t + 1) \geq 0;$

$t \leq -1; \quad t \geq 2.$

$$\frac{x^2 - x - 3}{x - 1} \leq -1;$$

$$\frac{x^2 - x - 3}{x - 1} + 1 \leq 0;$$

$$\frac{x^2 - x - 3 + x - 1}{x - 1} \leq 0;$$

$$\frac{x^2 - 4}{x - 1} \leq 0;$$

$$\frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 1} \leq 0.$$

$x \leq -2; \quad 1 < x \leq 2.$

$$\frac{x^2 - x - 3}{x - 1} \geq 2;$$

$$\frac{x^2 - x - 3}{x - 1} - 2 \geq 0;$$

$$\frac{x^2 - x - 3 - 2x + 2}{x - 1} \geq 0;$$

$$\frac{x^2 - 4x - 1}{x - 1} \geq 0;$$

$x^2 - 4x - 1 = 0;$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}.$

$2 - \sqrt{5} \leq x < 1; \quad x \geq 2 + \sqrt{5}.$

Ats.: $(-\infty;\; -2) \cup \left[2 - \sqrt{5}; 2\right] \cup \left[2 + \sqrt{5};\; \infty\right)$

Išspręskite nelygybes:

1. $\frac{x-1}{x}-\frac{x+1}{x-1}<2.$

2. $(x^2+3x)(2x+3)-16\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x}\geq 0.$

3. $\frac{x^4-3x^3-2x^2+6x+4}{x^2}\geq 0.$

4. $\frac{(3x^2+x-2)(x^2-x)}{(3x-2)(x^2-x+1)}\leq 0.$

5. $\frac{(4x^2-4x+1)(2-x-x^2)}{(x^2-4)(x+3)}\geq 0.$

6. $\frac{x^2(x+2)^4(x+1)^6}{(x+6)(x-4)(x+3)(2-x)}\geq 0.$

7. $\frac{(-2x-5)^2}{5x^2(3-x)}<0.$

8. $\frac{(x+1)^2(x-4)}{(2x^2+1)(x-1)^2(x+3)}>0.$

9. $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2-x+1}\leq\frac{1-2x}{x^3+1}.$

10. $\frac{3}{6x^2-x-12}<\frac{25x-47}{10x-15}-\frac{3}{3x+4}.$

11. $\frac{x^2-5x+4}{x-4}\geq 0.$

12. $\frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+9}+\frac{|x-2|}{|x-3|}-12<0.$

13. $x^2+\frac{4x^2}{(x-2)^2}\leq 5.$

14. $\frac{1}{x^2+x}\leq\frac{1}{2x^2+2x+3}.$

15. $\frac{x^3-2x^2+5x+2}{x^2+3x+2}\geq 1.$

16. $\frac{4}{|x+1|-2}\geq|x-1|.$

8. NELYGYBĖS SU MODULIAIS

Remiamės apibrėžimu:

$$|a| = a, \qquad \text{kai } a \geq 0.$$
$$|a| = -a, \qquad \text{kai } a < 0.$$

Prisimename skaitinių nelygybių savybes:

1) Jei $|\mathrm{a}| < m,\ m > 0,\ tai -m < a < m.$
2) Jei $|\mathrm{a}| > m,\ m > 0,\ tai\ a < -m\ \ ir\ \ a > m.$
3) Bet kurio skaičiaus modulis yra neigiamas skaičius.

<u>Išspręskite nelygybes:</u>

1. $|x - 1| < 3.$

   $-3 < x - 1 < 3;$

   $-3 + 1 < x < 3 + 1;$

   $-2 < x < 4.$ Ats.: $(-2; 4)$.

2. $-|3x + 2| > 3. \quad | \cdot (-1 > 0)$

   $|3x + 2| < -3$

   Nelygybė sprendinių neturi, nes $|3x + 2| > 0$ su bet kuria x reikšme.

   Ats.: sprendinių nėra

3. $|1 - 2x| \geq 4.$

$1 - 2x \leq -4$	ir	$1 - 2x \geq 4;$
$-2x \leq -5\ \ |: (-2 < 0)$		$-2x \geq 4 - 1;$
$x \geq 2{,}5.$		$-2x \geq 3;\ \ | : (-2 < 0)$
		$x \leq -1{,}5.$

   Ats.: $(-\infty;\ -1{,}5] \cup [2{,}5;\ \infty.)$

4. $|2x + 5| > -3.$

   Nelygybė teisinga su bet kuria x reikšme, nes neneigiamas skaičius visada didesnis už neigiamą skaičių.

   Ats.: $(-\infty;\ \infty)$.

5. $|2x - 3| > 3x - 1.$

   1) Nelygybė teisinga, kai $3x - 1 < 0.$

   $$x < \frac{1}{3}.$$

   2) $\begin{cases} 3x - 1 \geq 0, \\ 2x - 3 < -(3x - 1), \quad 2x - 3 > 3x - 1; \end{cases}$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{3}, \\ x < \frac{4}{5}, \end{cases} \qquad x < -2.$$

$$\frac{1}{3} \leq x < \frac{4}{5}.$$

Ats.: $\left(-\infty;\ \frac{4}{5}\right)$.

6. $|x| < -x^2 + x + 6$.

1) $\begin{cases} x < 0, \\ -x < -x^2 + x + 6; \end{cases}$

$x^2 - 2x - 6 < 0$.

$x_{1,2} \geq 1 \pm \sqrt{7}$.

$1 - \sqrt{7} < x < 1 + \sqrt{7}$

$\begin{cases} x < 0, \\ 1 - \sqrt{7} < x < 1 + \sqrt{7}. \end{cases}$

$1 - \sqrt{7} < x < 0$.

2) $\begin{cases} x \geq 0, \\ x < -x^2 + x + 6; \end{cases}$

$x^2 < 6$;

$|x| < \sqrt{6}$;

$-\sqrt{6} < x < \sqrt{6}$.

$\begin{cases} x \geq 0, \\ -\sqrt{6} < x < \sqrt{6}. \end{cases}$

$0 \leq x < \sqrt{6}$.

Ats.: $(1 - \sqrt{7};\ \sqrt{6})$.

7. $|x^2 - 6x + 8| \leq 4 - x$.

$\begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ x^2 - 6x + 8 \leq 4 - x \\ x^2 - 6x + 8 \geq -(4 - x); \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 4, \\ x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - 7x + 12 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 4, \\ (x - 1)(x - 4) \leq 0 \\ (x - 3)(x - 4) \geq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 4, \\ 1 \leq x \leq 4, \\ x \leq 3, \quad x \geq 4. \end{cases}$ $1 \leq x \leq 3, \qquad x = 4.$

Ats.: $[1; 3] \cup \{4\}$.

8. $|x - 2x^2| > 2x^2 - x$.

$|-(2x^2 - x)| > 2x^2 - x$;

$|2x^2 - x| > 2x^2 - x$.

Nelygybė teisinga, kai $2x^2 - x < 0$; $x(2x - 1) < 0$; $0 < x < 0{,}5$.

Ats.: $(0; 0{,}5.)$

9. $|x^2 + x - 20| \leq x^2 + x - 20$.

Nelygybė teisinga, kai $x^2 + x - 20 \geq 0$; $(x - 4)(x + 5) \geq 0$; $x \leq -5$; $x \geq 4$.

Ats.: $(-\infty;\ 5] \cup [4;\ \infty)$.

10. $||x-1|-5| \le 2.$

$-2 \le |x-1|-5 \le 2;$

$3 \le |x-1| \le 7;$

$\begin{cases} |x-1| \le 7, \\ |x-1| \ge 3; \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} -7 \le x-1 \le 7, \\ x-1 \le -3; \ \ x-1 \ge 3; \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} -6 \le x \le 8, \\ x \le -2, \qquad x \ge 4. \end{cases}$

$-6 \le x \le -2; \ \ 4 \le x \le 8.$

Ats.: $[-6;\ -2] \cup [4; 8].$

11. $|2x-1| < |x+3|.$

Taikome savybę: jei $f(x) \ge 0$ ir $g(x) \ge 0$, tai nelygybės $f(x) > g(x)$ ir $f^2(x) > g^2(x)$ yra ekvivalenčios.

$(|2x-1|)^2 < (|x+3|)^2;$

$(2x-1)^2 - (x+3)^2 < 0;$

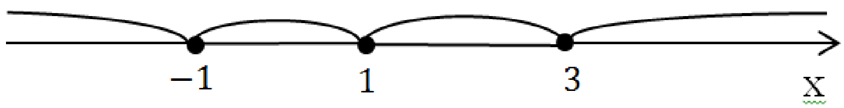
$(2x-1-x-3)(2x-1+x+3) < 0;$

$(x-4)(3x+2) < 0;$

$-\frac{2}{3} < x < 4.$ Ats.: $\left(-\frac{2}{3}; 4\right).$

12. $|x+1| - |x-1| + |x-3| < 4.$

Taškai $x=-1$, $x=1$ ir $x=3$ koordinačių tiesę suskaido į keturis intervalus:



Duotąją nelygybę išspręsime kiekviename intervale.

1) $\begin{cases} x < -1, \\ -(x+1)+(x-1)-(x-3) < 4; \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x < -1, \\ x > -3. \end{cases}$

2) $\begin{cases} -1 \le x < 1, \\ x+1+x-1-(x-3) < 4; \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} -1 \le x < -1, \\ x < 1. \end{cases}$

$-1 \le x < 1.$

3) $\begin{cases} 1 \le x < 3, \\ x+1-(x-1)-(x-3) < 4; \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 1 \le x < 3, \\ x > 1. \end{cases}$

$1 < x < 3.$

4) $\begin{cases} x \ge 3, \\ x+1-(x-1)+x-3 < 4; \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x \ge 3, \\ x < 5. \end{cases}$

$3 \le x < 5.$

Ats.: $(-3; 1) \cup (1; 5).$

13. $x^2 - 2|x| < 3.$

$|x|^2 - 2|x| - 3 < 0;$

$\begin{cases} |x| = t \geq 0, \\ t^2 - 2t - 3 < 0; \end{cases}$

$(t+1)(t-3) < 0;$

$-1 < t < 3.$

$|x| < 3.$

$-3 < x < 3.$ Ats.: $(-3; 3)$.

14. $(|x| - 3)(|x| + 71) < 0.$

Kadangi $|x| + 71 > 0$ su bet kuria *x* reikšme, tai: $|x| - 3 < 0$; $|x| < 3$; $-3 < x < 3$.

Ats.: $(-3; 3)$.

15. $|x^2 - 1|(x - 9) \geq 0.$

Kadangi $|x^2 - 1| \geq 0$ su bet kuria *x* reikšme, tai:

$x - 9 \geq 0;$ $x^2 - 1 = 0;$

$x \geq 9.$ $x^2 = 1; x = \pm 1.$

Ats.: $\{\pm 1\} \cup [9; \infty)$.

16. $(|x| - 8)(|x| - 2) \geq 0.$

$\begin{cases} |x| = t \geq 0, \\ (t-8)(t-2) \geq 0; \end{cases}$

$0 < t < 2.$ $t \geq 8.$

$|x| \leq 2.$ $|x| \geq 8;$

$-2 \leq x \leq 2.$ $x \leq -8;$ $x \geq 8.$ Ats.: $(-\infty; -8] \cup [-2; 2] \cup [8; \infty)$

17. $\dfrac{x^2 - 7|x| + 10}{x^2 - 6x + 9} < 0.$

Kadangi $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \geq 0$ su bet kuria *x* reikšme, tai:

$\begin{cases} x^2 - 7|x| + 10 < 0, \\ x - 3 \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} |x| = t \geq 0, \\ t^2 - 7t + 10 < 0; \end{cases}$

$2 \leq t \leq 5.$

$\begin{cases} |x| < 5, \\ |x| > 2; \end{cases}$ $\begin{cases} -5 < x < 5, \\ x < -2, \quad x > 2. \end{cases}$

$-5 < x < -2;$ $2 < x < 5.$

$\begin{cases} -5 < x < -2, \quad 2 < x < 5, \\ x \neq 3. \end{cases}$

$-5 < x < -2,$ $2 < x < 3,$ $3 < x < 5.$

Ats.: $(-5; -2) \cup (2; 3) \cup (3; 5)$.

18. $\left|\frac{1}{x+2}\right| < \left|\frac{2}{x-1}\right|$.

$\left|\frac{1}{x+2}\right|^2 < \left|\frac{2}{x-1}\right|^2$.

$\left(\frac{1}{x+2}\right)^2 - \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 < 0;$

$\left(\frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-1}\right)\left(\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-1}\right) < 0;$

$\frac{x-1-2x-4}{(x+2)(x-1)} \cdot \frac{x-1+2x+4}{(x+2)(x-1)} < 0 \cdot$

$\frac{3(x+5)(x+1)}{\left((x+2)(x-1)\right)^2} > 0.$

Kadangi $\left((x+2)(x-1)\right)^2 \geq 0$ su bet kuria x reikšme, tai:

$\begin{cases}(x+5)(x+1) > 0,\\ x+2 \neq 0,\\ x-1 \neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x < -5, \quad x > -1,\\ x \neq 2,\\ x \neq 1.\end{cases}$

$x < -5, \quad -1 < x < 1, \quad x > 1.$

Ats.: $(-\infty; 5) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

19. $|x^2 - 2x| < x$.

1 būdas.

Iš sąlygos aišku, kad $x > 0$; $x = |x|$.

$|x^2 - 2x| < |x|;$

$(|x^2 - 2x|)^2 < (|x|)^2;$

$(x^2 - 2x)^2 - x^2 < 0;$

$(x^2 - 2x - x)(x^2 - 2x + x) < 0;$

$(x^2 - 3x)(x^2 - x) < 0;$

$x^2(x-3)(x-1) < 0; \ | : x^2 > 0$

$(x-3)(x-1) < 0;$

$1 < x < 3.$

$\begin{cases}x > 0,\\ 1 < x < 3.\end{cases}$

$1 < x < 3.$ Ats.: $(1; 3)$.

2 būdas

Iš sąlygos aišku, kad $x > 0$.

$|x(x-2)| < x$;

$|x||x-2| - |x| < 0$;

$|x|(|x-2| - 1) < 0$;

$|x| > 0$, tai: $|x-2| - 1 < 0$;

$|x-2|<1$;

$-1 < x-2 < 1$;

$1 < x < 3$.

Ats.: $(1; 3)$.

3 būdas.

$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 2x < x, \\ x^2 - 2x > -x; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 3x < 0, \\ x^2 - x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x(x-3) < 0, \\ x(x-1) > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x - 3 < 0, \\ x - 1 > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0, \\ x < 3, \\ x > 1; \end{cases}$ $1 < x < 3$.

Ats.: $(1; 3)$.

4 būdas

1) $\begin{cases} x^2 - 2x < 0, \\ -x^2 + 2x < x; \end{cases}$

$\begin{cases} x(x-2) < 0, \\ x(x-1) > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < x < 2, \\ x < 0, x > 1. \end{cases}$

$1 < x < 2$.

2) $\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0, \\ x^2 - 2x < x; \end{cases}$

$\begin{cases} x(x-2) \geq 0, \\ x(x-3) < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 0, x \geq 2, \\ 0 < x < 3. \end{cases}$

$2 \leq x < 3$.

$1 < x < 3$

Ats.: $(1; 3)$.

Išspręskite nelygybes:

1. $|x+2|-2|x-1|<4.$

2. $|x^2+3x| \geq 2-x^2.$

3. $|x^3-1|>1-x.$

4. $3|x-1| \leq x+3.$

5. $x^2-|5x+8|>8.$

6. $\left|\frac{x^2-2x+1}{x-3}\right|>1.$

7. $\frac{x^2-5x+6}{|x|+7}<0.$

8. $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \leq 1.$

9. $|x|<-x^2+x+6.$

10. $\frac{x-2}{|x-2|} \geq 0.$

11. $|13x-2x| \geq |4x-9|.$

12. $(x-3)^2 \leq 16.$

13. $(5x-1)^2 \leq 36.$

14. $6x^2-|x|-2<0.$

15. $2-x^2>|x|+2|x-1|.$

16. $|x^2-3x+2|>x+3.$

17. $|x^2-4x+3| \leq x+2$

18. $|38+5x^2+x|<-4.$

19. $\left|x^2-|x|\right|<\frac{1}{4}.$

20. $|x^2-3x+2|>x^2-3x+2.$

21. $\left|\frac{x}{x+1}\right|>\frac{x}{x+1}.$

22. $\left|\frac{4}{x-3}\right|>\left|\frac{3}{2x+1}\right|.$

23. $\frac{x^2-|x|-12}{\mathrm{x}-3} \geq 2\mathrm{x}.$

24. $\left|\frac{x^2+x-2}{x^2-x+1}\right|<2.$

25. $|x-2|(x-1)>0.$

26. $|2x-1|+|x-3| \leq 4.$

9. IRACIONALIOSIOS NELYGYBĖS

Iracionaliosiomis nelygybėmis su vienu kintamuoju vadinamos nelygybės, kurių kintamasis yra po šaknies ženklu.

Iracionaliosios nelygybės, kaip ir visos nelygybės, dažniausiai turi be galo daug sprendinių, ir jų neįmanoma patikrinti, įrašant sprendinius į duotąją nelygybę. Todėl, sprendžiant nelygybes, būtina nepažeisti ekvivalentumo. Suformuluokime nelygybių ekvivalentumo teoremą.

Jei $f(x) \geq 0$ ir $g(x) \geq 0$, tai nelygybės $f(x) \geq g(x)$ abi puses pakėlę kvadratu, gauname nelygybę $f^2(x) \geq g^2(x)$, ekvivalenčią duotajai.

Išnagrinėkime nelygybę $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

1. Kai $g(x) \leq 0$, duotoji nelygybė neturi sprendinių, nes $\sqrt{f(x)} > 0$.
2. Kai $\mathrm{g(x)} > 0$, tai duotoji nelygybė ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} \mathrm{g(x)} > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

Kad nepasikeistų apibrėžimo sritis, parašėme $f(x) \geq 0$.

Dabar išnagrinėkime nelygybę $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

1. Kai $\mathrm{g(x)} < 0$, tai nelygybė teisinga su visomis *x* reikšmėmis, su kuriomis apibrėžta šaknis. Vadinasi, turime:

$$\begin{cases} \mathrm{g(x)} < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

2. Kai $\mathrm{g(x)} \geq 0$, tai duotoji nelygybė ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} \mathrm{g(x)} \geq 0, \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$$

Nelygybė $f(x) \geq 0$ gaunama iš nelygybės $f(x) > g^2(x)$, taigi ją praleidžiame.

Analogiškai – nelygybė $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} \mathrm{g(x)} \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

o nelygybė $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ ekvivalenti sistemoms

$$\begin{cases} \mathrm{g(x)} < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{g(x)} \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases}$$

Verta prisiminti:

1. Jeigu nelygybių sistemoje viena iš nelygybių teisinga su visomis kintamojo reikšmėmis (tokia nelygybė kartais vadinama tapačiai teisinga), ją atmetę, gauname sistemą, ekvivalenčią duotajai.
2. Nelygybės apibrėžimo sritis – tai galimos kintamojo reikšmės, su kuriomis nelygybė turi prasmę.
3. $\sqrt{f(x)} \geq 0$, kai $f(x) > 0$.
4. $\sqrt{f^2(x)} = |f(x)|$.

<u>Išspręskime nelygybes:</u>

1. $\sqrt{x-3} \geq -5$.

Nelygybė teisinga, kai $x - 3 \geq 0;\ x \geq 3$.

Ats.:$[3;\ \infty)$.

2. $\sqrt{x+5} < -3$.

Nelygybė sprendinių neturi.

Ats.: sprendinių nėra

3. $\sqrt{x-3} - \sqrt{2-x} > 4$.

Nelygybės apibrėžimo sritis:

$\begin{cases} x - 3 \geq 0, \\ 2 - x \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq 2. \end{cases}$

Sprendinių nėra.

Nelygybė sprendinių neturi.

Ats.: sprendinių nėra

4. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \geq 0$.

Nelygybė teisinga, kai $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

$(x-1)(x-2) \geq 0;$

$x \leq 1;\ \ x \geq 2.$

Ats.: $(-\infty;\ 1] \cup [2;\ \infty)$.

5. $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} > 0$.

Nelygybė teisinga, kai $4x^2 + 4x + 1 > 0$.

$2(x+1)^2 > 0;$

$2x + 1 \neq 0;$

$x \neq -0{,}5.$

Ats.: $(-\infty;\ -0{,}5) \cup (-0{,}5;\ \infty)$.

6. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0.$

Kadangi $\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$ su bet kuria x reikšme iš apibrėžimo srities, tai

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x^2-x-2 \geq 0; \end{cases}$$

$x^2-x-2=0,\ x_1=-1;\ \ x_2=2.$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq -1,\ x \geq 0. \end{cases}$$

$x \geq 2.$

Ats.: $\{-1\} \cup [2;\ \infty).$

7. $\dfrac{x^2-3x-6}{\sqrt{x^2-4x+3}} < 0.$

Kadangi $\sqrt{x^2-4x+3} \geq 0$ su bet kuria x reikšme iš apibrėžimo srities, tai:

$$\begin{cases} x^2-3x-6<0, \\ x^2-4x+3>0; \end{cases} \qquad x^2-3x-6=0, \qquad x^2-4x+3=0,$$

$$\begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{33}}{2} < x < \dfrac{3+\sqrt{33}}{2}, \\ x<1,\ \ x>3. \end{cases} \qquad x_{1,2}=\frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}. \qquad \begin{matrix} 1+(-4)+3=0, \text{tai} \\ x_1=1;\ \ x_2=3. \end{matrix}$$

$$\frac{3-\sqrt{33}}{2} < x < 1;\ \ 3 < x < \frac{3+\sqrt{33}}{2}.$$

Ats.:$\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2};1\right) \cup \left(3;\ \frac{3-\sqrt{33}}{2}\right).$

8. $\sqrt{x^2-4x+3} \leq 1.$

$\sqrt{(x+2)^2} \leq 1;$

$|x+2| \leq 1;$

$-1 \leq x+2 \leq 1;$

$-3 \leq x \leq -1.$

Ats.: $[-3;\ -1].$

9. $\sqrt{x+5} < 1-x.$

$$\begin{cases} 1-x>0, \\ x+5 \geq 0, \\ x+5<(1-x)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<1, \\ x \geq -5, \\ x<-1,\ \ x>4. \end{cases}$$

$x+5<(1-x)^2;$ $\qquad -5 \leq x < -1.$

$x^2-3x-4>0;$

$(x+1)(x-4)>0;$

$x<-1;\ \ x>4.$

Ats.: $[-5;\ -1).$

10. $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x.$

$$\begin{cases} 8-2x<0, \\ -x^2+6x-5 \geq 0; \end{cases}$$

$x^2-6x+5 \leq 0;$

$(x-1)(x-5) \leq 0;$

$1 \leq x < 5.$

$$\begin{cases} x>4, \\ 1 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

$4 < x < 5.$

2) $$\begin{cases} 8-2x \geq 0, \\ -x^2+6x-5 \geq (8-2x)^2; \end{cases}$$

$-x^2+6x-5 > 64-32x+4x^2;$

$5x^2-38x+69<0;$

$5(x-3)\left(x-\dfrac{23}{5}\right)<0;$

$3 < x < 4{,}6.$

$$\begin{cases} x \leq 4, \\ 3 < x \leq 4{,}6. \end{cases}$$

$3 < x \leq 4.$

Ats.: $(3;\ 5].$

11. $\sqrt{1-3x}-\sqrt{5+x} > 1.$

$\sqrt{1-3x} > 1+\sqrt{5+x};$

$$\begin{cases} 5+x \geq 0, \\ 1-3x > \left(1+\sqrt{5+x}\right)^2. \end{cases}$$

$1-3x > 1+2\sqrt{5+x}+5+x;$

$2\sqrt{5}+x < -4x-5.$

$$\begin{cases} -4x-5>0, \\ 5+x \geq 0, \\ 4(5+x) < (-4x-5)^2. \end{cases}$$

$20+4x < 16x^2+40x+25;$

$16x^2+36x+5>0.$

$16x^2+36x+5=0.$

$x_{1,2} = \dfrac{-18 \pm 2\sqrt{61}}{16} = \dfrac{-9 \pm \sqrt{61}}{8}.$

$x < \dfrac{-9-\sqrt{61}}{8};\ \ x > \dfrac{-9+\sqrt{61}}{8}.$

$$\begin{cases} x < -1\dfrac{1}{4}, \\ x \geq -5, \\ x < \dfrac{-9-\sqrt{61}}{8};\ \ x > \dfrac{-9+\sqrt{61}}{8}. \end{cases}$$

$-5 \leq x < -\dfrac{9+\sqrt{61}}{8}.$

Palyginkime skaičius $-1\dfrac{1}{4}$ ir $\dfrac{-9-\sqrt{61}}{8}.$

$-1\frac{1}{4}$ ir $\dfrac{-9-\sqrt{61}}{8}$;   10 ir $9+\sqrt{61}$;   1 ir $\sqrt{61}$.

Kadangi $1<\sqrt{61}$, tai $-1\frac{1}{4}>-\dfrac{9+\sqrt{61}}{8}$.

Ats.: $\left[-5;\ \dfrac{9+\sqrt{61}}{8}\right)$.

12. $\sqrt{5x^2+10x+1}\geq 7-x^2-2x$.

$\sqrt{(5x^2+2x)+1}\geq 7-(x^2+2x)$;

$$\begin{cases} x^2+2x=t, \\ \sqrt{5t+1}\geq 7-t. \end{cases}$$

$\sqrt{5t+1}\geq 7-t$.

1) $\begin{cases} 7-t<0, \\ 5t+1\geq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} t>7, \\ t\geq -0{,}2. \end{cases}$

$t>7$.

2) $\begin{cases} 7-t\geq 0, \\ 5t+1\geq (7-t)^2. \end{cases}$

$5t+1\geq 49-14t+t^2$;

$t^2-19t+48\leq 0$;

$(t-3)(t-16)\leq 0$;

$3\leq t\leq 16$.

$\begin{cases} t\leq 7, \\ 3\leq t\leq 16. \end{cases}$

$3\leq t\leq 7$.

$t\geq 3$.

$x^2+2x\geq 3$;

$x^2+2x-3\geq 0$;

$(x+3)(x-1)\geq 0$;

$x\leq -3;\ x\geq 1$.

Ats.: $(-\infty;\ -3]\cup[1;\ \infty)$.

13. $x\sqrt{10-x^2}>x^2-6$.

Išspręskime lygtį $x\sqrt{10-x^2}=x^2-6$.

$$\begin{cases} x(x^2-6)\geq 0, \\ \left(x\sqrt{10-x^2}\right)^2=(x^2-6)^2. \end{cases}$$

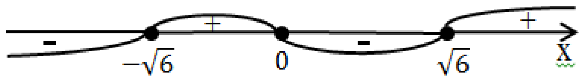
$x^2(10-x^2)=x^4-12x^2+36$;

$x^4-11x^2+18=0$;

$x(x^2-6)\geq 0$;

$x\left(x-\sqrt{6}\right)\left(x+\sqrt{6}\right)\geq 0$;

$$\begin{cases} x^2 = t \geq 0, \\ t^2 - 11t + 18 = 0. \end{cases}$$



$t_1 = 2;\ t_2 = 9.$

$-\sqrt{6} \leq x \leq 0;\ x \geq \sqrt{6}.$

$x^2 = 2;$ $\qquad$ $x^2 = 9.$

$|x| = \sqrt{2};$ $\qquad$ $|x| = 3;$

$x_1 = -\sqrt{2};\ x_2 = \sqrt{2}.$ $\qquad$ $x_1 = -3;\ x_2 = 3.$

$$\begin{cases} -\sqrt{6} \leq x \leq 0, \qquad x \geq \sqrt{6}, \\ x = -\sqrt{2},\ \ x = -3,\ \ x = \sqrt{2},\ \ x = 3. \end{cases}$$

$x = -\sqrt{2},\ \ x = 3.$

Duotosios nelygybės apibrėžimo sritis yra:

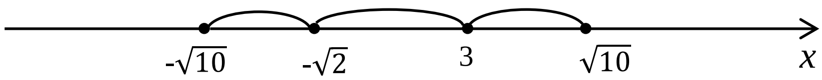
$10 - x^2 \geq 0;$

$x^2 \leq 10;$

$|x| \leq \sqrt{10};$

$-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}.$

Lygties šaknys $-\sqrt{2}$ ir 3 skaičių intervalą $\left[-\sqrt{10};\ \sqrt{10}\right]$ suskaido į tris intervalus. Reiškinys $x\sqrt{10 - x^2} - x^2 - 6$ kiekviename intervale yra pastovaus ženklo, o taškuose $-\sqrt{2}$ ir 3 lygus nuliui.



Imame po vieną x reikšmę iš intervalo ir įstatome į nelygybę:

1) $-\sqrt{10} \leq x < -\sqrt{2}.$

$x = -\sqrt{10}.$

$-\sqrt{10} \cdot \sqrt{10 - \left(-\sqrt{10}\right)^2} > \left(\sqrt{10}\right)^2 - 6;$

$-\sqrt{10} \cdot 0 > 10 - 6;$

$0 > 4.$

Neteisingas atsakymas.

2) $-\sqrt{2} < x < 3.$

$x = 0.$

$0 \cdot \sqrt{10 - 0^2} > 0^2 - 6;$

$0 > -6.$

Teisingas atsakymas.

3) $3 < x \leq \sqrt{10}.$

$x = \sqrt{10}.$

$\sqrt{10} \cdot \sqrt{10 - \left(\sqrt{10}\right)^2} > \left(\sqrt{10}\right)^2 - 6;$

$0 > 4.$ Neteisingas atsakymas.

Ats.: $\left(-\sqrt{2}; 3\right).$

Išspręskite nelygybes:

1. $\sqrt{x^2-1} > -1$.

2. $\sqrt{4x-x^2-4} > -2$.

3. $\sqrt{x+2-x^2} \leq 0$.

4. $\sqrt{-x^2-3x-10} < -1$.

5. $\sqrt{-4x^2-12x-9} \geq 0$.

6. $\sqrt{x-1-x^2} > 0$.

7. $(3-x)\sqrt{x^2+x-2} \leq 0$.

8. $\dfrac{\sqrt{2x^2+15x-17}}{10-x} \geq 0$.

9. $\dfrac{4x-5}{\sqrt{x^2-4x+4}} \geq x$.

10. $\sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-6x+9} < 8$.

11. $\sqrt{x-1} > \sqrt{5-x}$.

12. $\sqrt{x+2-x^2} + 2x - 1 > 0$.

13. $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \geq 2$.

14. $\sqrt{2x^2-3x-5} < x-1$.

15. $(x-3)\sqrt{2x^2+4} \leq x^2-9$.

16. $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-5} \leq \sqrt{x-3}$.

17. $x\sqrt{3x^2+5x-6} < x^2+2x$.

18. $(x+2)^2(x-1)^2\sqrt{x-7} \geq 0$.

10. RODIKLINĖS NELYGYBĖS

Rodiklinėmis nelygybėmis vadinamos nelygybės, kurių kintamasis yra laipsnio rodiklyje. Jų sprendimas pagrįstas tuo, kad funkcija $y = a^x$ yra didėjanti, kai a>1, ir mažėjanti, kai 0<a<1.

Kai a>1, nelygybė $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ekvivalenti nelygybei $f(x) > g(x)$; kai 0<a<1, – nelygybei $f(x) < g(x)$.

Rodiklinių nelygybių sprendimo būdai: pagrindų vienodinimas, bendro dauginamojo iškėlimas už skliaustų, pertvarkymas į kvadratinę nelygybę.

1. **Pagrindų vienodinimas**.

Išspręskime nelygybes:

1. $9^{\frac{1}{x}} \leq \sqrt{3^x}$;

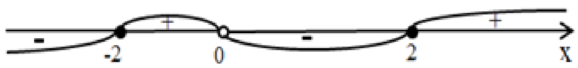
$3^{\frac{2}{x}} \leq 3^{\frac{x}{2}}$;

$3 > 1$,

$\frac{2}{x} \leq \frac{x}{2}$;

$\frac{x^2 - 4}{2x} \geq 0$;

$\frac{(x-2)(x+2)}{x} \geq 0.$



$-2 \leq x < 0;\ \ x \geq 2.$

Ats.: $[-2;\ 0) \cup [2;\ \infty)$.

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|-4} < 9$;

$\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|-4} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$;

$0 < \frac{1}{3} < 1$,

$|x| - 4 > -2$;

$|x| > 2$;

$x < -2;\ \ x > 2.$

Ats.: $(-\infty;\ -2) \cup (2;\ \infty)$.

3. $27 > \left(0,(3)\right)^{6-x}$;

$3^3 > 3^{x-6}$;

$0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 3^{-1}.$

$3 > 1$,

$3 > x - 6$;

$x < 9$.

Ats.: $(-\infty; 9)$.

2. Bendro dauginamojo iškėlimas už skliaustų.

Išspręskime nelygybes:

1. $6^x + 6^{x+1} < 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$;

   $6^x(1 + 6) < 2^x(1 + 2 + 2^2)$;

   $6^x \cdot 7 < 2^x \cdot 7 \mid : \ (7 \cdot 2^x > 0)$,

   $3^x < 1$;

   $3^x < 3^0$;

   $3 > 1$,

   $x < 0$.

   Ats.: $(-\infty; 0)$.

2. $x^2 \cdot 5^x - 5^{2+x} \leq 0$;

   $5^x(x^2 - 5^2) \leq 0$.

   Kadangi $5^x > 0$ su bet kuria x reikšme, tai:

   $x^2 - 5^2 \leq 0$;

   $x^2 \leq 5^2$;

   $|x| \leq 5$;

   $-5 \leq x \leq 5$.

   Ats.: $[-5; 5]$.

3. $\frac{1}{8} \cdot 6^{3x} - 2^{2x} \cdot 3^{3x} \leq 0$;

   $2^{2x} \cdot 3^{3x}\left(\frac{1}{8} \cdot 2^x - 1\right) \leq 0$.

   Kadangi $2^{2x} \cdot 3^{3x} > 0$ su bet kuria *x* reikšme, tai:

   $\frac{1}{8} \cdot 2^{2x} - 1 \leq 0 \ \mid \ \cdot 8 > 0$

   $2^x \leq 2^3$;

   $2 > 1$,

   $x \leq 3$.

   Ats.: $(-\infty;\ 3]$.

3. Pertvarkymas į kvadratinę nelygybę.

Išspręskime nelygybes:

1. $2^x - 2 < 15 \cdot 2^{\frac{x-3}{2}};$

$$2^x - 15 \cdot 2^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} - 2 < 0;$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{x}{2}} = t > 0, \\ t^2 - \dfrac{15}{2\sqrt{2}} t - 2 < 0; \end{cases}$$

$$2\sqrt{2}t^2 - 15t - 4\sqrt{2} < 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{15 \pm 17}{4\sqrt{2}};$$

$$t_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}; \quad t_2 = 4\sqrt{2}.$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} < t < 4\sqrt{2}.$$

$$\begin{cases} t > 0, \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} < t < 4\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$0 < t < 4\sqrt{2}.$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{x}{2}} < 4\sqrt{2}, \\ 2^{\frac{x}{2}} > 0; \end{cases}$$

$$2^{\frac{x}{2}} < 2^{\frac{5}{2}}; \quad 2 > 1; \quad \frac{x}{2} < \frac{5}{2}; \quad x < 5.$$

Ats.: $(-\infty;\ 5)$.

2. $10^{7x-1} + 6 \cdot 10^{1-7x} - 5 \leq 0; | \ \cdot 10^{7x-1} > 0.$

$$(10^{7x-1})^2 - 5 \cdot 10^{7x-1} + 6 \leq 0.$$

$$\begin{cases} 10^{7x-1} = t > 0, \\ t^2 - 5t + 6 \leq 0; \end{cases}$$

$$(t-2)(t-3) \leq 0;$$

$$2 \leq t \leq 3;$$

$$2 \leq 10^{7x-1} \leq 3;$$

$$10^{lg2} \leq 10^{7x-1} \leq 10^{lg3};$$

$$10 > 1; \quad lg2 \leq 7x - 1 \leq lg3;$$

$$\frac{1}{7}(lg2 + 1) \leq x \leq \frac{1}{7}(lg3 + 1).$$

Ats.: $\left[\frac{1}{7}(lg2+1); \frac{1}{7}(lg3+1)\right]$.

3. $2^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}\geq 3^{2x^2-6x+3}$;

$8\cdot 2^{2(x^2-3x)}+6\cdot 6^{x^2-3x}-27\cdot 3^{2(x^2-3x)}\geq 0 \ \mid \ : 3^{2(x^2-3x)}>0$;

$8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2(x^2-3x)}+6\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x}-27\geq 0$;

$\begin{cases}\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x}=t>0,\\ 8t^2+6t-27\geq 0.\end{cases}$

$8\left(t+\frac{9}{4}\right)\left(t-\frac{3}{2}\right)\geq 0$;

$t\leq -\frac{9}{4};\quad t\geq\frac{3}{2}.$

$\begin{cases}t>0,\\ t\leq -\frac{9}{4};\quad t\geq\frac{3}{2}.\end{cases}$

$t\geq\frac{3}{2}.$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x}\geq\frac{3}{2}$;

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x}\geq\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$;

$0<\frac{2}{3}<1$;

$x^2-3x\leq -1;\quad x^2-3x+1\leq 0.$

$\frac{3-\sqrt{5}}{2}\leq x\leq\frac{3-\sqrt{5}}{2}.\qquad x^2-3x+1=0;\qquad x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$

Ats $\left[.:\frac{3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}.\right]$

4. $4^{-x+0,5}-7\cdot 2^{-x}-4<0$;

$4^{-x}\cdot 2-7\cdot 2^{-x}-4<0$;

$\begin{cases}2^{-x}=t>0,\\ 2t^2-7t-4<0.\end{cases}$

$2\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-4)<0$;

$-\frac{1}{2}<t<4.$

$\begin{cases}t>0,\\ -\frac{1}{2}<t<4.\end{cases}$

$0<t<4.$

$$\begin{cases} 2^{-x} < 4, \\ 2^{-x} > 0. \end{cases}$$

$2^{-x} < 4;$

$2^{-x} < 2^2;$

$2 > 1,$

$-x < 2; |: (-1 < 0) \quad x > -2.$

Ats.: $(-2;\ \infty)$.

<u>Išspręskite nelygybes:</u>

1. $2^{x^2-1} > 1.$
2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^6-2x^3+1}} > 2^{x-1}.$
3. $\left(0{,}1(6)\right)^{2x-5} \cdot 0{,}25 \leq 324.$
4. $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}.$
5. $3^{x-3} + 0,(3)^{2-x} - 0,(1)^{\frac{4-x}{2}} - 99 < 0.$
6. $2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 9^{x-2} \geq 81.$
7. $7^{-x} - 3 \cdot 7^{1+x} > 4.$
8. $\left(\frac{1}{8}\right)^{x-2} \geq 2^{5-x} + 9.$
9. $5 \cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 10^{\frac{1}{x}} \geq 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}.$
10. $\frac{3}{2^{3-x}} \leq 4^{x-4} - 7.$
11. $5^x - 5^{3-x} \leq 20.$
12. $4^x + 6^x - 9^x \leq 0.$
13. $5^{2x+1} - 5 \cdot 3^x > 150^x - 18^x.$
14. $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x > 0.$

11. LOGARITMINĖS NELYGYBĖS

Logaritminėmis nelygybėmis vadinamos nelygybės, kurių kintamasis yra po logaritmo ženklu. Jų sprendimas pagrįstas tuo, kad funkcija $y = \log_a x$ yra didėjanti, kai $a > 1$ ir mažėjanti, kai $0 < a < 1$. Kai $a > 1$, nelygybė $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ekvivalenti sistemai $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$, o kai $0 < a < 1$ – ekvivalenti sistemai $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$.

Prisiminkime:

1. $a^{\log_a x} = x$, kai $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.
2. $\log_a 1 = 0$, kai $a > 0$, $a \neq 1$.
3. $\log_a a = 1$, kai $a > 0$, $a \neq 1$.
4. $\log_a\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \log_a f(x) + \log_a g(x)$, kai $a > 0$, $a \neq 1$, $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$.
5. $\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a f(x) - \log_a g(x)$, kai $a > 0$, $a \neq 1$, $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$.
6. $\log_a f^n(x) = n\log_a f(x)$, kai $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, $n - nelyginis$.
7. $\log_a f^n(x) = n\log_a |f(x)|$, kai $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) \neq 0$, n – lyginis.
8. $\log_a f(x) = \frac{\log_b f(x)}{\log_b a}$, kai $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $f(x) > 0$.

Išspręskime nelygybes:

1. $\log_7 \frac{x-2}{x-3} < 0$;

$$\log_7 \frac{x-2}{x-3} < \log_7 1;$$

$7 > 1$,

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{x-3} < 1, \\ \dfrac{x-2}{x-3} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-3} < 0, \\ \dfrac{x-2}{x-3} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3 < 0, \\ x-2 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3, \\ x < 2. \end{cases}$$

$x < 2$.

Ats.: $(-\infty; 2)$.

2. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)>-1;$

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)>\log_{\frac{1}{2}}2;$

$0<\dfrac{1}{2}<1,$

$\begin{cases} x^2-5x+6<2, \\ x^2-5x+6>0; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-5x+4<0, \\ x^2-5x+6>0; \end{cases}$

$\begin{cases} (x-1)(x-4)<0, \\ (x-2)(x-3)>0; \end{cases}$

$\begin{cases} 1<x<4, \\ x<2, \qquad x>3. \end{cases}$

$1<x<2;\ \ 3<x<4.$

Ats.: $(1;2)\cup(3;\ 4)$.

3. $\log_2(x^2-3x+2)<1+\log_2(x-2);$

$\log_2(x^2-3x+2)<\log_2 2+\log_2(x-2);$

$\log_2(x^2-3x+2)<\log_2\big(2(x-2)\big);$ 2>1,

$\begin{cases} x^2-3x+2<2(x-2), \\ x^2-3x+2>0; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-5x+6<0, \\ x^2-3x+2>0; \end{cases}$

$\begin{cases} (x-2)(x-3)<0, \\ (x-1)(x-2)>0; \end{cases}$

$\begin{cases} 2<x<3, \\ x<1, \qquad x>2. \end{cases}$

$2<x<3.$

Ats.: $(2;3)$.

4. $\log_3^2(2-x)\le\frac{1}{4};$

$\sqrt{\log_3^2(2-x)}\le\sqrt{\dfrac{1}{4}};$

$|\log_3^2(2-x)|\le\dfrac{1}{2};$

$\begin{cases} \log_3(2-x)\le\dfrac{1}{2}, \\ \log_3(2-x)\ge-\dfrac{1}{2}; \end{cases}$

$$\begin{cases}\log_3(2-x) \le \log_3\sqrt{3}, \\ \log_3(2-x) \ge \log_3\dfrac{1}{\sqrt{3}};\end{cases} \qquad 3 > 1;$$

$$\begin{cases}2-x \le \sqrt{3}, \\ 2-x \ge \dfrac{1}{\sqrt{3}};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x \ge 2-\sqrt{3}, \\ x \ge 2-\dfrac{1}{\sqrt{3}}.\end{cases}$$

$$2-\sqrt{3} \le x \le 2-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ats.: $\left[2-\sqrt{3};\ 2-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

5. $\log_3^2\frac{4x-3}{4-3x} > -\frac{1}{2}$.

Nelygybė teisinga, kai $\dfrac{4x-3}{4-3x} > 0$.

$$\frac{4x-3}{3x-4} < 0;$$

$$\frac{3}{4} < x < 1\frac{1}{3}.$$

Ats.: $\left(\dfrac{3}{4}; 1\dfrac{1}{3}\right)$.

6. $\log_{\frac{1}{2}}^2(3x+1) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) + 6$.

$$\log_{\frac{1}{2}}^2(3x+1) - \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) - 6 > 0;$$

$$\begin{cases}log_{\frac{1}{2}}(3x+1) = t, \\ t^2 - t - 6 > 0.\end{cases}$$

$$(t+2)(t-3) > 0;$$

$$t < -2; \quad t > 3.$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) < -2 \qquad\qquad \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) > 3;$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) < \log_{\frac{1}{2}}4; \qquad\qquad \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) < \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8};$$

$$0 < \frac{1}{2} < 1. \qquad\qquad 0 < \frac{1}{2} < 1.$$

$$3x+1 > 4. \qquad\qquad \begin{cases}3x+1 < \dfrac{1}{8}, \\ 3x+1 > 0;\end{cases}$$

$x > 1.$

$$\begin{cases} x < -\frac{7}{24}, \\ x > -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$-\frac{1}{3} < x < -\frac{7}{24}.$$

Ats.: $\left(-\frac{1}{3};\ -\frac{7}{24}\right) \cup (1;\ \infty).$

7. $\log_2 x - \log_x 32 \leq 4;$

$$\begin{cases} x > 0, \qquad x \neq 1, \\ \log_2 x - \dfrac{\log_2 32}{\log_2 x} \leq 4. \end{cases}$$

$$\log_2 x - \frac{5}{\log_2 x} - 4 \leq 0;$$

$$\begin{cases} \log_2 x = t, \\ t - \frac{5}{t} - 4 \leq 0. \end{cases}$$

$$\frac{t^2 - 4t - 5}{t} \leq 0;$$

$$\frac{(t+1)(t-5)}{t} \leq 0;$$

$t \leq -1;\ \ 0 < t \leq 5.$

$\log_2 x \leq -1;$

$$\log_2 x \leq \log_2 \frac{1}{2};$$

$2 > 1,$

$$0 < x \leq \frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} \log_2 x \leq 5, \\ \log_2 x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 x \leq \log_2 32, \\ \log_2 x > \log_2 1; \end{cases}$$

$2 > 1;$

$$\begin{cases} x \leq 32, \\ x > 1. \end{cases}$$

$1 < x \leq 32.$

$$\begin{cases} x > 0;\ \ x \neq 1, \\ 0 < x \leq \frac{1}{2};\ \ 1 < x \leq 32. \end{cases}$$

$$0 < x \leq \frac{1}{2};\ \ 1 < x \leq 32.$$

Ats.: $\left(0;\ \frac{1}{2}\right] \cup (1;\ 32].$

Išspręskite nelygybes:

1. $\log_3 \dfrac{2x+4}{x-2} < 3.$

2. $\log_3(2x^2+x-1) > \log_3 4.$

3. $\lg^2 x - \lg x - 2 \geq 0.$

4. $\lg(10\mathrm{x})\log_2 x < 2\log_2 10$

5. $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11} \leq -1.$

6. $\log_2 \dfrac{4}{x+3} > \log_2(2-x).$

7. $\log_{0,2}(x^3+8) - 0{,}5\log_{0,2}(x^2+4x+4) \leq \log_{0,2}(\mathrm{x}+58).$

8. $\log_2^2(x-1)^2 - \log_{0,5}(x-1) > 5.$

9. $\log_3\log_{27}\log_2(x^2+x+2) \leq -1.$

10. $\log_3(x+2) > \log_{x+2}81.$

11. $\log_{\sqrt{2}} x \cdot \log_{\sqrt{2}} \dfrac{2\sqrt{2}}{x} \geq 2.$

12. $\dfrac{\log_2 x \cdot \log_8(4x)}{\log_4(2x) \cdot \log_{16}(8x)} < 5.$

13. $\log_2(x^2-4x+4) + 2x > 2 - (x+1) \cdot \log_{0,5}(2-x).$

14. $1 + \log_x \dfrac{4-x}{10} < (\lg x^2 - 1)\log_{\mathrm{x}} 10.$

15. $\log_2(4^x+4) < x + \log_2(2^{x+1}-3).$

16. $\log_{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}\left(x^2-4x+14-4\sqrt{6}\right) < 2.$

12. NELYGYBĖS SU PARAMETRU

Išspręskime nelygybes:

1. $ax - a > 3 - 2x$.

   Kintamojo x atžvilgiu nelygybė yra tiesinė, parametras a įgyja bet kokias realias reikšmes.

   $ax + 2x > 3 + a$;

   $x(a + 2) > a + 3$;

   1) $a + 2 < 0$, tai $x < \dfrac{a+3}{a+2}$.

      $a < -2$.

   2) $a + 2 = 0$, tai $x \cdot 0 > 1$.

      $a = -2$. Sprendinių nėra.

   3) $a + 2 > 0$, tai $x > \dfrac{a+3}{a+2}$.

      $a > -2$.

      Ats.: $x < \dfrac{a+3}{a+2}$, kai $a < -2$; nelygybė sprendinių neturi, kai $a = -2$;

      $x > \dfrac{a+3}{a+2}$, kai $a > -2$.

2. Kokios turi būti k reikšmės, kad nelygybei $(k-1)x^2 - 2(k+1)x + k - 3 < 0$ tiktų visi realūs x?

   Duotoji nelygybė teisinga su bet kuria x reikšme, kai:

   $$\begin{cases} k - 1 < 0, \\ D < 0. \end{cases}$$

   $$\frac{1}{4}D = (k+1)^2 - (k-1)(k-3) = k^2 + 2k - 1 - k^2 + 4k - 3 = 6k - 2.$$

   $$\begin{cases} k - 1 < 0, \\ 6k - 2 < 0. \end{cases}$$

   $$\begin{cases} k < 1, \\ k < \frac{1}{3}. \end{cases}$$

   $k < \dfrac{1}{3}$.

   Ats.: su kiekviena k reikšme iš intervalo $\left(\dfrac{1}{3};\ \infty\right)$ duotąją nelygybę tenkina visos realios x reikšmės.

3. $(a^2+a+1)x-3a>(2+a)x+5a;$

$(a^2+a+1-2-a)x>5a+3a;$

$(a^2-1)x>8a;$

1) $\begin{cases} a^2-1<0, \\ x<\dfrac{8a}{a^2-1}; \end{cases}$

$a^2<1;$

$|a|<1;$

$-1<a<1.$

2) $\begin{cases} a^2-1=0, \\ 0\cdot x>8a; \end{cases}$

$a^2=1;$

$a=\pm1.$

$a=-1, \quad 0\cdot x>-8;\quad x-$ bet koks skaičius.

$a=1, \quad 0\cdot x>8;$ sprendinių nėra.

3) $\begin{cases} a^2-1>0 \\ x>\dfrac{8a}{a^2-1}; \end{cases}$

$a^2>1;$

$|a|>1;$

$a<-1, \quad a>1.$

$Ats.$: kai $|a|<1, x<\dfrac{8a}{a^2-1}$; kai $|a|>1, x>\dfrac{8a}{a^2-1}$;

kai $a=-1$, nelygybę tenkina bet kuri reali x reikšmė;

kai $a=1$, nelygybė sprendinių neturi.

4. $(a-2)x^2-x-1\geq 0.$

1) Kai $a-2=0$, $t.y.$ $a=2$, nelygybė yra tiesinė: $-x-1\geq 0;\ \ x\leq -1.$

2) Kai $a\neq 2$, nelygybė kvadratinė. $\mathrm{D}=1-4(a-2)(-1)=4a-7.$

a) $\begin{cases} 4a-7<0, \\ a-2>0; \end{cases}$ nelygybę tenkina bet koks skaičius

$\begin{cases} a<\dfrac{7}{4}, \\ a>2. \end{cases}$

sprendinių nėra.

b) nelygybė sprendinių neturi, kai:

$\begin{cases} 4a-7<0, \\ a-2<0; \end{cases}$

$$\begin{cases} a < \frac{7}{4}, \\ a < 2. \end{cases}$$

$a < 1\frac{3}{4}$.

$c)$ $4a - 7 = 0$;

Nelygybę tenkina tik vienas sprendinys:

$a = \frac{7}{4} < 2$.

$$x = -\frac{-1}{2(a-2)} = \frac{1}{2\left(1\frac{3}{4} - 2\right)} = -2.$$

$d)$ $\begin{cases} 4a - 7 > 0, \\ a - 2 < 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} a > \frac{7}{4}, \\ a < 2. \end{cases}$$

$1\frac{3}{4} < a < 2$, tai $\frac{1 - \sqrt{4a-7}}{2(a-2)} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{4a-7}}{2(a-2)}$.

$e)$ $\begin{cases} 4a - 7 > 0, \\ a - 2 > 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} a > \frac{7}{4}, \\ a > 2. \end{cases}$$

$a > 2$, tai $x \leq \frac{1 - \sqrt{4a-7}}{2(a-2)}$ arba $x \geq \frac{1 + \sqrt{4a-7}}{2(a-2)}$.

5. Raskite visas a reikšmes, su kuriomis atstumas tarp parabolių $y = x^2 + ax + \frac{2}{3}$ ir $y = 3x^2 + 5ax + \frac{19}{12}a^2$ viršūnių didesnis už $\frac{\sqrt{29}}{3}$.

Parabolės $y = x^2 + ax + \frac{2}{3}$ viršūnės koordinatės:

$$x_0 = -\frac{a}{2};\ \ y_0 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + \frac{2}{3} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{a^2}{4}.$$

$$\left(-\frac{a}{2};\ \frac{2}{3} - \frac{a^2}{4}\right).$$

Parabolės $y = 3x^2 + 5ax + \frac{19}{12}a^2$ viršūnės koordinatės:

$$x_0 = -\frac{5a}{6};\ \ y_0 = 3 \cdot \left(-\frac{5a}{6}\right)^2 + 5a \cdot \left(-\frac{5a}{6}\right) + \frac{19}{12}a^2 = -\frac{a^2}{2}.$$

$$\left(-\frac{5a}{6};\ -\frac{a^2}{2}\right).$$

Atstumas tarp dviejų taškų $(x_0;\ y_0)$ ir $(x_0;\ y_0)$:

$$d^2 = (x_0 - x_0)^2 + (y_0 - y_0)^2 = \left(-\frac{a}{2} + \frac{5a}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} + \frac{a^2}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{a^2}{3} + \frac{a^4}{16} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{16}a^4.$$

$d > \dfrac{\sqrt{29}}{3};\ \ d^2 > \dfrac{29}{9}.$

$\dfrac{1}{16}a^4 + \dfrac{4}{9}a^2 + \dfrac{4}{9} > \dfrac{29}{9}.$

$9a^4 + 64a^2 - 400 > 0;$

$\begin{cases} a^2 = t \geq 0, \\ 9t^2 + 64t - 400 > 0. \end{cases}$

$9\left(t + \dfrac{100}{9}\right)(t - 4) > 0;$

$\begin{cases} t < -\dfrac{100}{9}, \qquad t > 4, \\ t > 0. \end{cases}$

$t > 4.$

$a^2 > 4;$

$|a| > 2.$

$a < -2;\ \ a > 2.$

Ats.: $(-\infty;\ -2) \cup (2;\ \infty)$.

6. Raskite visas a reikšmes, su kuriomis reiškinys $\lg\left((a-1)x^2 + 2ax + 3a - 2\right)$ yra apibrėžtas, kai *x* įgyja bet kurią realią reikšmę.

Funkcijos y=lg$x$ apibrėžimo sritis yra teigiamų skaičių aibė:

$(a - 1)x^2 + 2ax + 3a - 2 > 0.$

Kvadratinė funkcija teisinga su visomis realiomis x reikšmėmis, kai:

$\begin{cases} a - 1 > 0, \\ \dfrac{1}{4}D < 0. \end{cases}$

$\dfrac{1}{4}D = a^2 - (3a - 2)(a - 1) = -2a^2 + 5a - 2;$

$-2a^2 + 5a - 2 < 0;\,|\ \cdot(-1 < 0)$

$2a^2 - 5a + 2 > 0;$

$2\left(a - \dfrac{1}{2}\right)(a - 2) > 0;$

$a < \frac{1}{2}$; $a > 2$.

$\begin{cases} a > 1, \\ a < \frac{1}{2}; \ \ a > 2. \end{cases}$

$a > 2$.

Kai $a - 1 = 0, t.y. a = 1$,

nelygybė yra tiesinė: $2x + 1 > 0$, kurios sprendiniai nėra visi skaičiai.

Ats.: $(2;\ \infty)$.

Išspręskite nelygybes:

1. $2x + 3a \geq 5a$.
2. $\frac{5x}{2} + (a-1)^2 \leq (a+2)^2 - \frac{3x}{2}$.
3. $mx - m < 3 - 2x$.
4. Kokios turi būti k reikšmės,

kad nelygybei $kx^2 + (2k+1)x + k + 2 > 0$ *tiktų visi* $x \in R$?

5. $\frac{2x}{a} - 5 > \frac{x}{a} + a - 4$.
6. $26a^2 + x^2 > 10ax$.

13.ĮVAIRIOS NELYGYBĖS

Išspręskime nelygybes:

1. $\dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + 1} > 0.$

Skaitiklio ir vardiklio reiškinius išskaidome dauginamaisiais:

$x^3 - x^2 - x + 1 = (x^3 - x^2) + (-x + 1) = x^2(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^2 - 1) =$

$= (x^2 - 1)(x + 1);$

$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$

$\dfrac{(x^2 - 1)(x + 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} > 0;\quad \begin{cases} \dfrac{(x^2 - 1)}{(x^2 - x + 1)} > 0, \\ x + 1 \neq 0. \end{cases}$

Kadangi $(x^2 - 1) > 0$ ir $x^2 - x + 1 > 0$ $(D < 0\ \ ir\ \ a = 1 > 0)$ su bet kuria x reikšme, tai:

$\begin{cases} x - 1 \neq 0, \\ x + 1 \neq 0; \end{cases}\quad x \neq \pm 1.$

Ats.: nelygybę tenkina visi skaičiai, išskyrus -1 ir 1.

2. $x^{\frac{2x-1}{3-x}} < 1;$

$x^{\frac{2x-1}{3-x}} < x^0;$

1) $x = 1$

$1^{\frac{2\cdot 1\cdot 1}{3\cdot 1}} < 1,$

$1 < 1$ (klaidingas teiginys).

2) $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ \frac{2x-1}{3-x} > 0. \end{cases}$

$\dfrac{2x - 1}{3 - x} < 0;$

$\dfrac{1}{2} < x < 3.$

$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ \dfrac{1}{2} < x < 3. \end{cases}$

$\dfrac{1}{2} < x < 1.$

3) $\begin{cases} x > 1, \\ \frac{2x-1}{3-x} < 0. \end{cases}$

$\dfrac{2x - 1}{3 - x} > 0;$

$x < \frac{1}{2}$; $x > 3$.

$$\begin{cases} x > 1, \\ x < \frac{1}{2}; \;\; x > 3. \end{cases}$$

$x > 3$.

Ats.: $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (3;\ \infty)$.

3. $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$;

$25 \cdot (2^x - 1) - 5^x(2^x - 1) > 0$;

$(2^x - 1)(25 - 5^x) > 0$;

1) $\begin{cases} 2^x - 1 < 0, \\ 25 - 5^x < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 2^x < 2^0, \\ 5^x > 5^2; \end{cases}$

$2 > 1$, $5 > 1$,

$\begin{cases} x < 0, \\ x > 2. \end{cases}$ sprendinių nėra.

2) $\begin{cases} 2^x - 1 > 0, \\ 25 - 5^x > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 2^x > 2^0, \\ 5^x < 5^2; \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0, \\ x < 2. \end{cases}$

$0 < x < 2$.

Ats.: $(0; 2)$.

4. $\log_{(x+1)^2}(x + 3) > 1$.

$\log_{(x+1)^2}(\mathrm{x} + 3) > \log_{(x+1)^2}(x + 1)^2$;

1) $\begin{cases} 0 < (x + 1)^2 < 1, \\ x + 3 < (x + 1)^2, \\ x + 3 > 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} (x + 1)^2 < 1, \\ (x + 1)^2 > 0, \\ x^2 + x - 2 > 0, \\ x + 3 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x + 1| < 1, \\ x + 1 \neq 0, \\ (x + 2)(x - 1) > 0, \\ x + 3 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < x < 0, \\ x \neq 1, \\ x < -2, x > 1, \\ x > -3. \end{cases}$$

Sprendinių nėra.

2) $\begin{cases} (x+1)^2 > 1, \\ x + 3 > (x+1)^2; \end{cases}$

$$\begin{cases} |\mathrm{x} + 1| > 1, \\ x^2 + x - 2 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 1 < -1, \quad x + 1 > 1, \\ (x+2)(x-1) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -2, x > 0, \\ -2 < x < 1. \end{cases}$$

$0 < x < 1.$

Ats.: $(0; 1)$.

5. $|\log_{\pi} x|^{\sqrt{9-\mathrm{x}^2}} \leq |\log_{\pi} x|^{\sqrt{\mathrm{x}-0{,}5}}$.

1) $\begin{cases} 0 < |\log_{\pi} x| < 1, \\ \sqrt{9 - x^2} \geq \sqrt{x - 0{,}5} \end{cases}$

$$\begin{cases} |\log_{\pi} x| < 1, \\ |\log_{\pi} x| > 0, \\ 9 - x^2 \geq x - 0{,}5 \\ x - 0{,}5 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < \log_{\pi} \mathrm{x} < 1, \\ \log_{\pi} x \neq 0, \\ x^2 + x - 9{,}5 \leq 0, \\ x \geq 0{,}5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{\pi} \dfrac{1}{\pi} < \log_{\pi} x < \log_{\pi} \pi, \\ x \neq 1, \\ 2x^2 + 2x - 19 \leq 0, \\ x \geq 0{,}5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi} < x < \pi, \\ x \neq 1, \\ \dfrac{-1 - \sqrt{39}}{2} \leq x \leq \dfrac{-1 + \sqrt{39}}{2}, \\ x \geq 0{,}5; \end{cases}$$

$\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{\sqrt{39} - 1}{2}, \qquad x \neq 1.$

2) $|\log_{\pi} x| = 1;$

$\log_{\pi} x = -1, \qquad \log_{\pi} x = 1,$

$x = \dfrac{1}{\pi}$. $x = \pi$.

$1^{\sqrt{9-x^2}} \leq 1^{\sqrt{x-0,5}}$

Nelygybė teisinga, kai $\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0, \\ x - 0,5 \geq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} -3 \leq x \leq 3, \\ x \geq 0,5. \end{cases}$

$0,5 \leq x \leq 3.$

$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\pi}, x = \pi \\ 0,5 \leq x \leq 3. \end{cases}$

Sprendinių nėra.

$\begin{cases} |\log_{\pi} x| > 1, \\ \sqrt{9 - x^2} \leq \sqrt{x - 0,5}; \end{cases}$

$\begin{cases} \log_{\pi} x < -1, \ \ \log_{\pi} x > 1, \\ 9 - x^2 \leq x - 0,5, \\ 9 - x^2 \geq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < x < \dfrac{1}{\pi}, \ \ x > \pi, \\ x \leq \dfrac{-1 - \sqrt{39}}{2}; \ \ x \geq \dfrac{-1 + \sqrt{39}}{2}, \\ -3 \leq x \leq 3. \end{cases}$

Ats.: $\left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left(1; \frac{\sqrt{39}-1}{2}\right]$.

6. $(8 - x)^{\log_2^2(8-x)} \leq 2^{3x-4}$.

   Nelygybės apibrėžimo sritis: $8 - x > 0$; $x < 8$. Abi nelygybės pusės yra teigiamos ir 2>1, tai:

   $\log_2\left((8 - x)^{\log_2^2(8-\mathrm{x})}\right) \leq \log_2 2^{3x-4}$.

   $\log_2^3(8 - x) \leq 3x - 4$.

   Kai x <8, funkcija $\mathrm{y} = \log_2^3(8 - x)$ mažėjanti, o funkcija y=3 x -4 yra didėjanti. Lygtis $\log_2^3(8 - x) = 3x - 4$ gali turėti tik vieną šaknį. Akivaizdu, kai x =4.

   $\log_2^3(8 - x) = (\log_2 4)^3 = 2^3 = 8$ ir $3 \cdot 4 - 4 = 12 - 4 = 8$.

   Nelygybė $\log_2^3(8 - x) \leq 3x - 4$ teisinga, kai $4 \leq x < 8$.

   Ats.: $[4; \ 8)$.

7. $2^x \geq 11 - x$.

   Su bet kuria x reikšme funkcija $y = 2^x$ didėjanti, o funkcija $y = 11 - x$ mažėja.

   Aišku, kad $x = 3$ yra lygties $2^x = 11 - x$ vienintelė šaknis.

   Nelygybę tenkina $x \geq 3$.

Ats.: $[3;\ \infty)$.

8. $\dfrac{3x^2+20}{4} > \dfrac{12}{5x^2-20x+23}$.

$y = \dfrac{3x^2+20}{4} = \dfrac{3}{4}x^2 + 5 \geq 5$ su bet kuria x reikšme.

$y_{\min} = 5$, kai $x = 0$.

$y = \dfrac{12}{5x^2-20x+23} = \dfrac{12}{5(x-2)^2+3} \leq 4$ su bet kuria x reikšme.

$y_{\max} = 4$, kai $x = 2$.

Vadinasi, nelygybė teisinga su bet kuria x reikšme.

Ats.: $(-\infty;\ \infty)$.

9. Įrodykite, kad su bet kuria x reikšme iš intervalo $[-2; 2]$ nelygybė

$x^3 - 3x^2 + 3x \leq 0$ teisinga.

Kairiąją nelygybės pusę pasižymime funkcija:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

1. $D(f) = (-\infty;\ \infty)$.

2. $f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 3x)' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 \geq 0$.

su bet kuria x reikšme.

Funkcija yra didėjanti.

3. $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = 2$

$x \in [-2; 2]$, $\quad f(x) \leq 2$, $\quad t.y.$ $\quad \mathrm{x}^3 - 3x^2 + 3x \leq 2$.

Įrodėme.

10. $\dfrac{6}{2x+1} > \dfrac{1+\log_2(2+x)}{x}$.

Nelygybės apibrėžimo sritis:

$$\begin{cases} 2x+1 \neq 0, \\ 2+x > 0, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq -\dfrac{1}{2}, \\ x > -2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

$-2 < x < -\dfrac{1}{2}$; $\quad -\dfrac{1}{2} < x < 0$, $\quad x > 0$.

Spręsime nelygybę kiekviename intervale.

1) $-2 < x < -\frac{1}{2}$.

$$\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(2+x)}{x} \quad \Bigg| \cdot x < 0;$$

$$\frac{6}{2x+1} < 1+\log_2(2+x);$$

$$\log_2(2+x) > \frac{4x-1}{2x+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1).$$

$$\log_2(2+x) < \log_2\left(2+\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \log_2\frac{3}{2} < 1,$$

$$\frac{4x-1}{2x+1} = \frac{2(2x+1)-3}{2x+1} = 2-\frac{3}{2x+1} > 2.$$

(1) nelygybė neteisinga.

2) $-\frac{1}{2} < x < 0$.

$$1+\log_2(2+x) > 1+\log_2\left(2+\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 1+\log_2\frac{3}{2} > 0;$$

$$\frac{1+\log_2(2+x)}{x} < 0, \quad o \quad \frac{6}{2x+1} > 0.$$

Teigiamas skaičius visada didesnis už neigiamą skaičių. Duotoji nelygybė yra teisinga, kai $-\frac{1}{2} < x < 0$.

3) $x > 0$.

$$\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(2+x)}{x} \quad \Bigg| \cdot x > 0;$$

$$\frac{6x}{2x+1} > 1+\log_2(2+x);$$

$$\log_2(2+x) < \frac{4x-1}{2x+1}.$$

$$\log_2(2+x) > \log_2(2+0) = \log_2 2 = 1, \text{o}$$

$$\frac{4x-1}{2x+1} = 2-\frac{3}{2x+1} < 2.$$

Nelygybė neteisinga, kai:

a) $\log_2(2+x) \geq 2$;

$2+x \geq 4$;

$x \geq 2$.

b) $\frac{4x-1}{2x+1} \le 1;$

$\frac{2(x-1)}{2x+1} \le 0;$

$-\frac{1}{2} < x \le 1.$

$\begin{cases} x > 0, \\ -\frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$

$0 < x \le 1.$

Liko: $1 < x < 2.$

$\log_2(2+x) > \log_2 3$, o $\frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} < 2 - \frac{3}{2\cdot 2+1} = \frac{7}{5}.$

Vadinasi, $\log_2 3 > \frac{7}{5};$

$\log_2 3 > \log_2 2^{\frac{7}{5}};$

$2 > 1;$

$3 > 2^{\frac{7}{5}};$

$3^5 > 2^7;\quad 243 > 128$ (tesinga nelygybė).

Reiškia, $\log_2(2+x) > \log_2 3 > \frac{7}{5} > \frac{4x-1}{2x+1}$, o buvo $\log_2(2+x) < \frac{4x-1}{2x+1}.$

Ats.: $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right).$

11. $\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\log_5\frac{x}{5} + \frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right) \le 0.$

Nelygybės apibrėžimo sritis:

$\begin{cases} x^2-4x+3 \ge 0, \\ \frac{x}{5} > 0, \\ x \ne 0, \\ 8x-2x^2-6 \ge 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-4x+3 \ge 0, \\ x > 0, \\ x^2-4x+3 \le 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-4x+3 = 0 \\ x > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1, x = 3 \\ x > 0. \end{cases}$

$x = 1, \qquad x = 3.$

Patikrinimas:

$$\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)\le 0.$$

$x=1.$

$$\left(\sqrt{1^2-4\cdot 1+3}+1\right)\log_5\frac{1}{5}+\frac{1}{1}\left(\sqrt{8\cdot 1-2\cdot 1^2-6}+1\right)\le 0;$$

$(0+1)\cdot(-1)+1\cdot(0+1)\le 0,$

$0\le 0$ (teisingas teiginys),

$\mathrm{x}=3.$

$$\left(\sqrt{3^2-4\cdot 3+3}+1\right)\log_5\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\left(\sqrt{8\cdot 3-2\cdot 3^2-6}+1\right)\le 0;$$

$\log_5 3-1+\dfrac{1}{3}\le 0;$

$\log_5 3-\dfrac{2}{3}\le 0;$

$\log_5\dfrac{3}{5^{\frac{2}{3}}}\le 0 \ldots\ldots\ldots\ldots..(1).$

Kadangi $27>25,tai\ (3^3)^{\frac{1}{3}}>(5^2)^{\frac{1}{3}}$ (funkcija $\mathrm{y}=\sqrt[3]{\mathrm{x}}$ didėjanti).

$3>5^{\frac{2}{3}};$

$\dfrac{3}{5^{\frac{2}{3}}}>1;$

$\log_5\dfrac{3}{5^{\frac{2}{3}}}>\log_5 1=0.$

Vadinasi, $\log_5\dfrac{3}{5^{\frac{2}{3}}}>0.$ (1) nelygybė neteisinga.

Ats.: 1

<u>Išspręskite nelygybes:</u>

1. $|5x-x^2-6|>x^2-5x+6.$
2. $(x^3-2x^2-5x+6)(x^2-x+1)>0.$
3. $\left|-\dfrac{5}{x+2}\right|<\left|\dfrac{10}{x-1}\right|.$
4. $(x^2-8x+15)^{x-6}<1.$
5. $\log_{x^2}(x+2)>1.$
6. $9^{\log_3(1-2x)}\ge 5\mathrm{x}x^2-5.$
7. $|x-1|^{\lg^2 x-\lg x^2}>|x-1|^3.$
8. $x^{\log_x(2-x)^2}\le 9.$
13. $(x^2+x+1)^x<1.$
14. $|x-3|^{2x^2-7x}>1.$
15. $\log_{x-2}(2x-3)>\log_{x-2}(24-6x).$
16. $\log_x(x^3+1)\log_{x+1}x>2.$
17. $\log_{|x-1|}(2x^2-9x+4)>1.$
18. $\log_{|x+6|}2\cdot\log_2(x^2-x-2)\ge 1.$
19. $(2^x+3\cdot 2^{-x})^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1.$
20. $\dfrac{\log_5(x^2+3)}{4x^2-16x}<0.$

9. $\dfrac{(x-0{,}5)(3-x)}{\log_2|x-1|} > 0.$

10. $x^{\lg x} > 10.$

11. $3^{\log_2 \frac{3x-1}{x}} < 1.$

12. $\dfrac{1}{0{,}5^x - 1} - \dfrac{1}{1 - 0{,}5^{x+1}} \geq 0.$

21. $\dfrac{3x^2 - 16x + 21}{\log_{0,3}(x^2 + 4)} < 0.$

22. $\dfrac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2 - 4x} < 0.$

23. $4^x - 9 \cdot 2^{xx} + 8^{\log_5 7 \cdot \log_7 5} < 0.$

24. $x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 5} > 7.$

14. FUNKCIJOS APIBRĖŽIMO IR REIKŠMIŲ SRITIS

Apibrėžimas. Funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritis yra jos argumento leistinųjų reikšmių aibė, jeigu ta sritis nėra kaip nors kitaip nusakyta. Žymime D(f) arba D(y).

Apibrėžimas. Funkcijos y reikšmių aibė, kai x įgyja visas reikšmes iš apibrėžimo srities, vadiname funkcijos reikšmių sritimi. Žymime E(f) arba E(y).

Dažniausiai funkcija išreiškiama kokia nors formule, kuri bendru atveju užrašoma $y = f(x)$. Čia x – nepriklausomas kintamasis arba argumentas, o y – priklausomas kintamasis arba funkcija.

Formule išreikštos funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritimi vadinama aibė argumento reikšmių, su kuriomis ši formulė turi prasmę, jeigu nėra papildomų apribojimų. Žymime D(f) arba D(y).

Trupmena turi prasmę su tokiomis kintamojo reikšmėmis, su kuriomis vardiklis nėra lygus nuliui.

Lyginio laipsnio šaknis turi prasmę, kai jos pošaknis įgyja neneigiamas reikšmes.

a^m:

1. m $\in N$, tai a – bet koks skaičius,
2. m – neteigiamas sveikas skaičius, tai $a \neq 0$,
3. m – teigiamas trupmeninis skaičius, tai $a \geq 0$,
4. m – neigiamas trupmeninis skaičius, tai $a > 0$,

Funkcija $y = \log_a f(x)$ turi prasmę, kai $\boldsymbol{a} > 0$, $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}$, $f(x) > 0$.

Raskime funkcijų apibrėžimo sritis:

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x^2-x+1)}{x^3-1}} + lg(x^2-4x+4)$.

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)(x^2-x+1)}{x^3-1} \geq 0, \\ x^2-4x+4 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \geq 0, \\ x-1 \neq 0, \\ (x-2)^2 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in R, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

$x \neq 1, \qquad x \neq 2.$

Ats.: $\mathrm{D(f)} = (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; \infty)$.

2. $y = \sqrt{3x - x^2}$.

$3x - x^2 \geq 0;$

$x(x^2 - 3) \leq 0;$

$x\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right) \leq 0.$

$x \leq -\sqrt{3};\ \ 0 \leq x \leq \sqrt{3}.$

Ats.: $\mathrm{D}(y) = \left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right] \cup \left[0;\ \sqrt{3}\right].$

3. $y = \lg(3^x - 3^{-x})$.

$3^x - 3^{-x} > 0;$

$3^x > 3^{-x};$

$3 > 1;$

$x > -x;$

$2x > 0;$

$x > 0.$

Ats.: $\mathrm{D}(y) = (0; \infty).$

4. $y = \lg\left(\sqrt{x-3} - 2\right)$.

$\sqrt{x-3} - 2 > 0;$

$\sqrt{x-3} > 2;$

$x - 3 > 4;$

$x > 7.$

Ats.: $\mathrm{D}(y) = (7; \infty).$

5. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{x-1}$.

$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0, \\ x - 1 \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 \leq 4, \\ x \neq 1; \end{cases}$

$\begin{cases} -2 \leq \mathrm{x} \leq 2, \\ \mathrm{x} \neq 1. \end{cases}$

$-2 \leq \mathrm{x} < 1, \qquad 1 < x < 2.$

Ats.: $\mathrm{D}(y) = [-2;\ 1) \cup (1;\ 2].$

6. $y = \dfrac{1}{3 - \log_3(x-3)}$.

$3 - \log_3(x-3) \neq 0;$

$\log_3(x-3) \neq 3;$

$\begin{cases} x - 3 \neq 27, \\ x - 3 > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \neq 30, \\ x > 3. \end{cases}$

$3 < x < 30, \quad x > 30.$

Ats.: $\mathrm{D(f)} = (3; 30) \cup (30; \infty)$.

7. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\lg(x+10)^2}$.

$\begin{cases} \lg(x+10)^2 \neq 0, \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} (x+10)^2 \neq 1, \\ x + 10 \neq 0, \\ (x-2)(x-3) \geq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \neq -11, x \neq -9, \\ x \neq -10, \\ x \leq 2, x \geq 3. \end{cases}$

$x < -11, \qquad -11 < x < -10, \qquad -10 < x < -9, \qquad -9 < x \leq 2, \qquad x \geq 3.$

$Ats.: \mathrm{D}(f) = (-\infty; 11) \cup (-11; -10) \cup (-10; -9) \cup (-9; 2] \cup [3; \infty).$

8. $y = \log_{2x-3}(x^2 - 3x - 10)$.

$\begin{cases} x^2 - 3x - 10 > 0, \\ \quad 2x - 3 > 0, \; 2x - 3 \neq 1; \end{cases} \qquad (x+2)(x-5) > 0.$

$\begin{cases} x < -2, \qquad x > 5, \\ x > 1{,}5, \qquad x \neq 2. \end{cases}$

$x > 5.$

Ats.: $\mathrm{D}(f) = (5; \infty)$.

9. $y = \dfrac{x+5}{\sqrt{x-1} - 3} + \dfrac{2x}{\sqrt{10-x} - 2}$.

$\begin{cases} \sqrt{x-1} - 3 \neq 0, \\ \sqrt{10-x} - 2 \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x-1} \neq 3, \\ \sqrt{10-x} \neq 2; \end{cases}$

$\begin{cases} x - 1 \neq 9, \\ x - 1 \geq 0, \\ 10 - x \neq 4, \\ 10 - x \geq 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x \neq 10; \\ x \geq 1, \\ x \neq 6, \\ x \leq 10. \end{cases}$$

$1 \leq x < 6, \qquad 6 < x < 10.$

Ats.: $\mathrm{D}(f) = [1;\ 6) \cup (6; 10)$.

10. $y = \sqrt{3 - |x-2|} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1} - 1}$.

$$\begin{cases} 3 - |x-2| \geq 0, \\ \sqrt{x-1} - 1 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-2| \leq 3, \\ \sqrt{x-1} \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x - 2 \leq 3, \\ x - 1 \neq 1, \\ x - 1 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 5, \\ x \neq 2, \\ x \geq 1; \end{cases} \qquad 1 \leq x < 2, \quad 2 < x \leq 5.$$

Ats.: $\mathrm{D}(y) = [1; 2) \cup (2;\ 5]$.

Nustatykite funkcijų apibrėžimo sritis:

1. $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x} - 1} + \dfrac{x+1}{\sqrt{4-x} - 2}$.
2. $y = \sqrt{|x-1| - 2} + \dfrac{1}{3 - \sqrt{5-x}}$.
3. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2 - |x-3|} - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{|x-2| - 1} - 2}$.
4. $y = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$.
5. $y = \lg\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$.
6. $y = \lg\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 1}$.
7. $y = \lg|4 - x^2|$.
8. $y = \log_{|x|}2$.
9. $y = \sqrt{3^{2x-2} + 9^x - 10}$.
10. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 10x + 25}{4x - 5}} - \sqrt{-(x-2)(x^2 - 6x + 9)}$.
11. $y = \sqrt{(x^2 - 3x - 10)\lg^2(x-2)}$.
12. $y = \lg(5x^2 - 8x - 4) + (x+3)^{-0,5}$.

Raskime funkcijų reikšmių sritis:

1. $y = \dfrac{x+2}{x-3}$.

1 būdas.

$y = \dfrac{x+2}{x-3} = \dfrac{(x-3)+5}{x-3} = 1 + \dfrac{5}{x-3}$.

Su bet kuria *x* reikšme ($\boldsymbol{x \neq 3}$) trupmena $\frac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{x-3}}$ negali būti lygi nuliui.

Vadinasi, $y \neq 1$.

$\text{Ats.}: \mathrm{E(y)} = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.

2 būdas.

Iš $y = \dfrac{x+2}{x-3}$ išsireikšime x per y ir gauname:

$x = \dfrac{3y+2}{y-1}, \qquad y \neq 1.$

$\text{Ats.}: \mathrm{E(y)} = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.

2. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1) Jei y=0, tai *x*=0.

2) $y \neq 0, \quad yx^2 - x + y = 0.$

Lygtis turi šaknis, kai diskriminantas – neneigiamas.

$\mathrm{D} = 1 - 4y^2;$

$1 - 4y^2 \geq 0;$

$y^2 \leq \dfrac{1}{4};$

$|y| \leq \dfrac{1}{2};$

$-\dfrac{1}{2} \leq y \leq \dfrac{1}{2}.$ $\text{Ats.}: \mathrm{E(y)} = \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.

3. $y = \sqrt{-x^2 + x + 2}$.

$-x^2 + x + 2 = -\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4} \leq \dfrac{9}{4}.$

Vadinasi, $\begin{cases} y \leq \dfrac{3}{2}, \\ y \geq 0. \end{cases}$

$0 \leq y \leq \dfrac{3}{2}.$

$\text{Ats.}: \mathrm{E(y)} = \left[0; \dfrac{3}{2}\right]$.

1. Raskite funkcijų apibrėžimo ir reikšmių sritis:

1. $y = \frac{x^2 - 5}{2x - 4}$.
2. $y = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - x + 2}$.
3. $y = (-1)^x$.
4. $y = \sqrt{x^2 - x - 2}$.
5. $y = \frac{1 - 2x}{x - 2}$.
6. $y = 1 + \sqrt{x}$.

2. Kokios turi būti *x* reikšmės, kad funkcija :

a) $y = \log_{0,3}|2x+1|$ įgytų reikšmes, didesnes už 1;

b) $y = \log_{0,5}\frac{2x-1}{x+1}$ įgytų reikšmes, didesnes už 1?

ATSAKYMAI

$\mathbf{1.1}$ $(3a+3b)_{min}=12$, $\mathbf{1.2}$ $(ab)_{max}=2500$.

$\mathbf{3.1}$ $(-\infty;\infty)$, $\mathbf{3.2}$ $(-\infty;\infty)$, $\mathbf{3.3}$ *Sprendinių nėra*, $\mathbf{3.4}$ $(-\infty;-0{,}8)$, $\mathbf{3.5}$ $[0;\infty)$,

$\mathbf{3.6}$ $\left(3\frac{1}{3};\infty\right)$, $\mathbf{3.7}$ $(-\infty;1)$.

$\mathbf{4.1}$ 1) $a\in(2;\infty)$, 2) $a\in(-\infty;4)$, $\mathbf{4.2}$ 1) $(-\infty;2]$, 2) $(4;\infty)$, $\mathbf{4.3}$ $a)$ $(-\infty;2]$, $b)$ 3,

$\mathbf{4.4}$ 1) 5, 2) 1, $\mathbf{4.5}$ -5, $\mathbf{4.6}$ 4.

$\mathbf{5.1}$ $(-\infty;-5)\cup(-5;\infty)$, $\mathbf{5.2}$ 3, $\mathbf{5.3}$ $(-\infty;-1)\cup(3;\infty)$, $\mathbf{5.4}$ $(0{,}5;4)$, $\mathbf{5.5}$ $(-\infty;-5)\cup$
$(3;\infty)$,

$\mathbf{5.6}$ $[-3;\infty)$, $\mathbf{5.7}$ *Sprendinių nėra*, $\mathbf{5.8}$ $[-1;2]$, $\mathbf{5.9}$ $(-\infty;\infty)$, $\mathbf{5.10}$ *Sprendinių nėra*.

$\mathbf{6.1}$ $(-\infty;2)\cup(3;12)$, $\mathbf{6.2}$ $[-2;-1]\cup[1;3]$, $\mathbf{6.3}$ $(-\infty;-1]\cup\{2\}\cup[7;\infty)$,

$\mathbf{6.4}$ $(-3;1)\cup(-1;3)$, $\mathbf{6.5}$ $(-\sqrt{5};\sqrt{5})$, $\mathbf{6.6}$ $(-\infty;5]\cup[-4;0]\cup\{2\}$, $\mathbf{6.7}$ $(-5;-3)\cup$
$(1;2)\cup(3;7)$.

$\mathbf{6.8}$ $(-\infty;2)\cup(-2;-1)\cup(\frac{2}{3};3)$, $\mathbf{6.9}$ $-1;1$, $\mathbf{6.10}$ $(-\infty;-4]\cup\left[\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]\cup[4;\infty)$,

$\mathbf{6.11}$ $(-2;2)\cup(2;4)$, $\mathbf{6.12}$ $\left[-3;\frac{1-\sqrt{41}}{4}\right]\cup\left[0;\frac{1+\sqrt{41}}{4}\right]\cup\{3\}$.

$\mathbf{7.1}$ $(-\infty;-1)\cup(0;0{,}5)\cup(1;\infty)$, $\mathbf{7.2}$ $[-4;-3]\cup[-1{,}5;0)\cup[1;0)$,

$\mathbf{7.3}$ $(-\infty;-1]\cup\left(1-\sqrt{3};0\right)\cup(0;2]\cup[1+\sqrt{3};\infty)$, $\mathbf{7.4}$ $(-\infty;-1]\cup\left[0;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};1\right]$,

$\mathbf{7.5}$ $(-\infty;-3)\cup\{0{,}5\}\cup[1;2)$, $\mathbf{7.6}$ $(-6;-3)\cup\{-2\}\cup\{-1\}\cup\{0\}\cup(2;4)$, $\mathbf{7.7}$ $(3;\infty)$,

$\mathbf{7.8}$ $(-\infty;3)\cup(4;\infty)$, $\mathbf{7.9}$ $(-\infty;-1)\cup(-1;2]$, $\mathbf{7.10}$ $\left(-\infty;-1\frac{1}{3}\right)\cup\left(-1\frac{4}{75};1\frac{1}{2}\right)\cup(2;\infty)$,

$\mathbf{7.11}$ $[1;4)\cup(4;\infty)$, $\mathbf{7.12}$ $(-\infty;2{,}75)\cup(3{,}5;\infty)$, $\mathbf{7.13}$ $[-2;1]$, $\mathbf{7.14}$ $(-1;0)$,

$\mathbf{7.15}$ $(-2;-1)\cup[0;1]\cup[2;\infty)$, $\mathbf{7.16}$ $[-1-2\sqrt{2};-3)\cup(1;3]$.

$\mathbf{8.1}$ $(-\infty;\infty)$, $\mathbf{8.2}$ $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2};\infty\right)$, $\mathbf{8.3}$ $(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup1;\infty)$, $\mathbf{8.4}$ $[0;3]$,

$\mathbf{8.5}$ $(-\infty;-5)\cup\left(\frac{5+\sqrt{89}}{2};\infty\right)$, $\mathbf{8.6}$ $(-\infty;-1)\cup(2;3)\cup(3;\infty)$, $\mathbf{8.7}$ $(2;3)$, $\mathbf{8.8}$ $[0;1{,}6]\cup$
$[2{,}5;\infty)$,

$\mathbf{8.9}$ $\left(1-\sqrt{7};\sqrt{6}\right)$, $\mathbf{8.10}$ $(2;\infty)$, $\mathbf{8.11}$ $[-2;3\frac{2}{3}]$, $\mathbf{8.12}$ $[-1;7]$, $\mathbf{8.13}$ $(-\infty;-1]\cup[1{,}4;\infty)$,

$\mathbf{8.14}$ $\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$,

$\mathbf{8.15}$ $(0;1)$, $\mathbf{8.16}$ $(-\infty;2-\sqrt{5})\cup(2+\sqrt{5};\infty)$, $\mathbf{8.17}$ $\left[\frac{5-\sqrt{21}}{2};\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right]$,

$\mathbf{8.18}$ *Sprendinių nėra*,

$\mathbf{8.19}$ $\left(-\frac{1+\sqrt{2}}{2};-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathbf{8.20}$ $(1;2)$, $\mathbf{8.21}$ $(-1;0)$,

$\mathbf{8.22}$ $\left(-\infty;-2\frac{3}{5}\right)\cup\left(\frac{5}{11};3\right)\cup(3;\infty)$, $\mathbf{8.23}$ $(-\infty;3)$, $\mathbf{8.24}$ $(-\infty;0)\cup\left(\frac{1}{3};\infty\right)$,

$\mathbf{8.25}$ $(1;2)\cup(2;\infty)$,

$\mathbf{8.26}$ $[0; 2]$.

$\mathbf{9.1}$ $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$, $\mathbf{9.2}$ 2, $\mathbf{9.3}$ $-1; 2$, $\mathbf{9.4}$ *Sprendinių nėra*, $\mathbf{9.5}$ $-1{,}5$,

$\mathbf{9.6}$ *Sprendinių nėra*,

$\mathbf{9.7}$ $\{-2\} \cup \{1\} \cup [3; \infty)$, $\mathbf{9.8}$ $(-\infty; -8{,}5] \cup [1; 10)$, $\mathbf{9.9}$ $(-\infty; -1-\sqrt{3}] \cup [-1+\sqrt{6}; 2) \cup (2; 5]$,

$\mathbf{9.10}$ $(-3; 5)$, $\mathbf{9.11}$ $(3; 5]$, $\mathbf{9.12}$ $\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}; 2\right]$, $\mathbf{9.13}$ $(-\infty; 0) \cup [1; 2]$, $\mathbf{9.14}$ $[2{,}5; 3)$,

$\mathbf{9.15}$ $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup [3; \infty)$, $\mathbf{9.16}$ *Sprendinių nėra*, $\mathbf{9.17}$ $\left(-\infty; \frac{-5-\sqrt{97}}{6}\right] \cup (0; 2)$,

$\mathbf{9.18}$ $[7; \infty)$.

$\mathbf{10.1}$ $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, $\mathbf{10.2}$ $(-1; 0)$, $\mathbf{10.3}$ $[0{,}5; \infty)$, $\mathbf{10.4}$ $(0; \infty)$, $\mathbf{10.5}$ $(-\infty; 6)$,

$\mathbf{10.6}$ $[4 - \log_3 5; 4]$,

$\mathbf{10.7}$ $(-\infty; -1)$, $\mathbf{10.8}$ $(-\infty; 2 - 2\log_2 3]$, $\mathbf{10.9}$ $(-\infty; -1] \cup (0; \infty)$, $\mathbf{10.10}$ $[4 + \log_2 7; \infty)$, $\mathbf{10.11}$ $(-\infty; 2]$, $\mathbf{10.12}$ $\left[\log_{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \infty\right)$, $\mathbf{10.13}$ $(0; \log_6 5)$, $\mathbf{10.14}$ $(-\infty; 0)$.

$\mathbf{11.1}$ $(-\infty; -2) \cup \left(2\frac{8}{25}; \infty\right)$, $\mathbf{11.2}$ $(-\infty; -1{,}5) \cup (1; \infty)$, $\mathbf{11.3}$ $(0; 0{,}1] \cup (100; \infty)$,

$\mathbf{11.4}$ $(0{,}01; 10)$,

$\mathbf{11.5}$ $[2; 2{,}75) \cup [4; \infty)$, $\mathbf{11.6}$ $(-3; -2) \cup (1; 2)$, $\mathbf{11.7}$ $[9; \infty)$, $\mathbf{11.8}$ $\left(1; 1 + \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\right) \cup (3; \infty)$,

$\mathbf{11.9}$ $[-3; -1) \cup (0; 2]$, $\mathbf{11.10}$ $\left(-1\frac{8}{9}; -1\right) \cup (7; \infty)$, $\mathbf{11.11}$ $[\sqrt{2}; 2]$, $\mathbf{11.12}$ $\left(0; \frac{1}{32}\right) \cup \left(\frac{1}{8}; 2^{-\frac{9}{7}}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$,

$\mathbf{11.13}$ $(-\infty; -2) \cup (1; 2)$, $\mathbf{11.14}$ $(0; 1) \cup (2; 4)$, $\mathbf{11.15}$ $(2; \infty)$, $\mathbf{11.16}$ $(1; 3)$.

$\mathbf{12.1}$ $[a; \infty)$, $\mathbf{12.2}$ $\left(-\infty; \frac{6a+3}{4}\right]$, $\mathbf{12.3}$ $Kai\ m < -2, x > \frac{m+3}{m+2}; kai\ m = -2, x - bet\ koks\ skaičius; kai\ m > -2, x < \frac{m+3}{m+2}$,

$\mathbf{12.4}$ $(0{,}25; \infty)$, $\mathbf{12.5}$ $Kai\ a < 0, x < a(a+1); kai\ a > 0, x > a(a+1)$,

$\mathbf{12.6}$ $x - bet\ koks\ skaičius, jei\ a \neq 0; x - bet\ koks\ skaičius, išskyrus\ 0, jei\ a = 0$.

$\mathbf{13.1}$ $(2; 3)$, $\mathbf{13.2}$ $(-2; 1) \cup (3; \infty)$, $\mathbf{13.3}$ $(-\infty; -5) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$,

$\mathbf{13.4}$ $(-\infty; 4 - \sqrt{2}) \cup (4 + \sqrt{2}; 6)$, $\mathbf{13.5}$ $(1; 2)$, $\mathbf{13.6}$ $[-2 - \sqrt{10}; 0{,}5)$,

$\mathbf{13.7}$ $(0{,}1; 1) \cup (1; 2) \cup (1000; \infty)$, $\mathbf{13.8}$ $(0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; 5]$, $\mathbf{13.9}$ $(0; 0{,}5) \cup (2; 3)$,

$\mathbf{13.10}$ $(0; 0{,}1) \cup (10; \infty)$, $\mathbf{13.11}$ $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{13.12}$ $[\log_{\frac{1}{2}} \frac{4}{3}; 0) \cup (-\infty; -1)$, $\mathbf{13.13}$ $(-\infty; -1)$,

$\mathbf{13.14}$ $(-\infty; 0) \cup (2; 3) \cup (3; 3{,}5) \cup (4; \infty)$, $\mathbf{13.15}$ $(2; 3) \cup \left(3\frac{3}{8}; 4\right)$, $\mathbf{13.16}$ $(2; \infty)$,

$\mathbf{13.17}$ $(-\infty; 0) \cup (2; \infty)$, $\mathbf{13.18}$ $(-\infty; -7) \cup (-5; 2] \cup [4; \infty)$, $\mathbf{13.19}$ $(3; \infty)$, $\mathbf{13.20}$ $(0; 4)$,

$\mathbf{13.21}$ $(-\infty; 2\frac{1}{3}) \cup (3; \infty)$, $\mathbf{13.22}$ $(-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (4; \infty)$, $\mathbf{13.23}$ $(0; 3)$,

$\mathbf{13.24}$ $(-\infty; -1) \cup (4; \infty)$.

$\mathbf{14.\mathit{I}.1}$ $(0; 1) \cup (1; 4]$, $\mathbf{14.\mathit{I}.2}$ $(-\infty; -4) \cup -4; -1] \cup [3; 5]$, $\mathbf{14.\mathit{I}.3}$ $\{1\} \cup [3; 4) \cup (4; 5]$,

$\mathbf{14.\mathit{I}.4}$ $(-2; 0]$,

$\mathbf{14.\mathit{I}.5}$ $(-1; 1) \cup (2; \infty)$, $\mathbf{14.\mathit{I}.6}$ $(-\infty; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; \infty)$, $\mathbf{14.\mathit{I}.7}$ $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$,

$\mathbf{14.\mathit{I}.8}$ $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$, $\mathbf{14.\mathit{I}.9}$ $[1; \infty)$, $\mathbf{14.\mathit{I}.10}$ $\{-5\} \cup (1{,}25; 2] \cup \{3\}$,

$\mathbf{14.\mathit{I}.11}$ $\{3\} \cup [5; \infty)$, $\mathbf{14.\mathit{I}.12}$ $(-3; -0{,}4) \cup (2; \infty)$,

$\mathbf{14.\mathit{II}.1}$ $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty);\ E(y) = (-\infty; \infty)$,

$\mathbf{14.\mathit{II}.2}$ $D(y) = (-\infty; \infty); E(y) = \left[\frac{9-4\sqrt{2}}{7}; \frac{9+4\sqrt{2}}{7}\right]$,

$\mathbf{14.\mathit{II}.3}$ $D(y) = (-\infty; \infty); E(y) = \{\pm 1\}$,

$\mathbf{14.\mathit{II}.4}$ $D(y) = (-\infty; -1) \cup [2; \infty); E(y) = [0; \infty)$,

$\mathbf{14.\mathit{II}.5}$ $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty); E(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$,

$\mathbf{14.\mathit{II}.6}$ $D(y) = (0; \infty);\ E(y) = (1; \infty)$.

$\mathbf{2.}\,\boldsymbol{a}$) $(-0{,}65; -0{,}5) \cup (-0{,}5; -0{,}35)$, $\mathbf{2.}\,\boldsymbol{b}$) $(0{,}5; 1)$.