Lietuvos matematikos mokytojų asociacija

Onutė JABLONSKIENĖ

Viktorija SIČIŪNIENĖ

PLANIMETRIJOS KURSO SISTEMINIMAS

Metodikos etiudai

(2- asis sąsiuvinis)

Vilnius, 1995

UDK 514.1

Ja - 16

Autorės

Onutė Jablonskienė, mokytoja ekspertė,

Viktorija Sičiūnienė, mokytoja ekspertė

Recenzentai

Antanas Apynis, VU docentas,

Milda Vosylienė, PI docentė

ISBN 9986-467-16-0

ISBN 9986-467-20-9

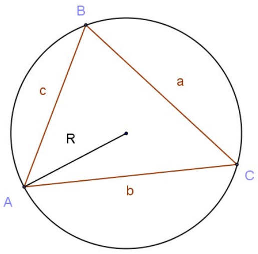
Pratarmė

Leidinyje „Planimetrijos kurso sisteminimas“ (Metodikos etiudai, 2-asis sąsiuvinis) pateikiama 1 - ojo sąsiuvinio 1 – 82 uždavinių sprendimo metodika, paaiškinimai bei nurodymai, kaip racionaliausiai išspręsti sinusų ir kosinusų teoremoms skirtus uždavinius, įžvelgiant jų ryšį su kitomis planimetrijos kurso temomis.

Autorės

Sinusų teorema

Trikampio kraštinės proporcingos prieš jas esančių kampų sinusams, o trikampio kraštinės ir prieš ją esančio kampo sinuso santykis lygus apie trikampį apibrėžto apskritimo skersmeniui:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R;$$

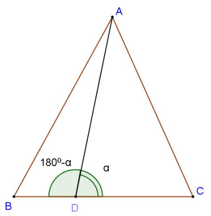
čia a, b, c – trikampio kraštinės,
R – apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulys.

Iš sinusų teoremos akivaizdu, kad $a = 2R\sin\alpha$, $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$, o $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R}$.

Uždavinių sprendimai

1. Pasinaudoję lygybe $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$, apskaičiuojame ieškomą spindulį.

2. **Duota:** AB = AC, D priklauso BC.
Įrodykite: $R_1=R_2$, čia R_1 – spindulys apskritimo, apibrėžto apie trikampį ABD, o R_2 – apibrėžto apie trikampį ACD.



Pažymime: AB = AC = a.
Remdamiesi sinusų teorema, surandame R_1 ir R_2:

$$R_1 = \frac{a}{2\sin(180^o - \alpha)}, R_2 = \frac{a}{2\sin\alpha}.$$

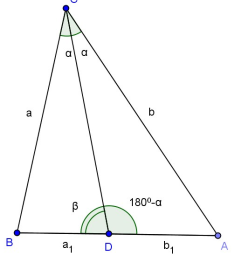
Kadangi $\sin(180^o - \alpha) = \sin\alpha$, tai $R_1=R_2$.

$$\angle BCD = \angle ACD = \alpha$$

3. **Duota:** $\angle BCD = \angle ACD = \alpha$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}.$$

Įrodykite:



Pažymime: $\angle BDC = \beta$, $\angle ADC = 180^o - \beta$.
Trikampiams CBD ir CDA taikome sinusų teoremą:

$$\frac{a}{\sin\beta} = \frac{a_1}{\sin\alpha}; \quad \frac{b}{\sin(180^o - \beta)} = \frac{b_1}{\sin\alpha};$$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}; \quad \frac{b}{b_1} = \frac{\sin(180^o - \beta)}{\sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}.$$

4. Jeigu ieškomo trikampio kraštinė lygi a, o skritulio spindulys – R, tai teisingos lygybės:

$$\begin{cases} a = 2R\sin 60^o, \\ s = \pi R^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}, \\ R = \sqrt{\dfrac{s}{\pi}}. \end{cases}$$

$$\frac{a}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{s}{\pi}}, a = \sqrt{\frac{3s}{\pi}}.$$

Sulyginame:

$$\sqrt{\frac{3s}{\pi}}.$$

Ats.:

5. Jeigu trikampio kraštinė lygi *a*, o skritulio spindulys – R, tai teisingos lygybės:

$$\begin{cases} a = 2R\sin 60^o, \\ s = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = R\sqrt{3}, \\ a = \sqrt{\dfrac{4s\sqrt{3}}{3}}. \end{cases}$$

Sulyginame:

$$R\sqrt{3} = \sqrt{\frac{4s\sqrt{3}}{3}},$$

$$R = \frac{2}{3}\sqrt{s\sqrt{3}}.$$

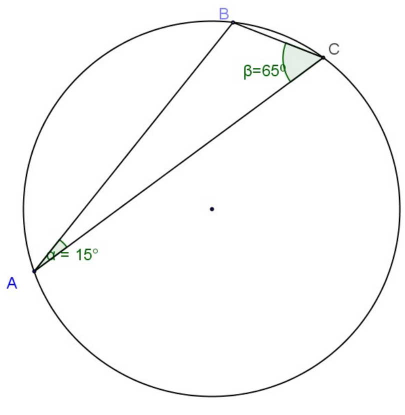
$$R = \frac{2}{3}\sqrt{s\sqrt{3}}.$$

Ats.:

$$\angle BAC = 15^o, \angle BCA = 60^o.$$

6. **Duota:** R,

Raskite: S_{ABC}.



Remdamiesi sinusų teorema, surandame:

$AB = 2R\sin 60^o, BC = 2R\sin 15^o$

.

Pasinaudojame trikampio ploto formule

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot BC\sin B$$

,

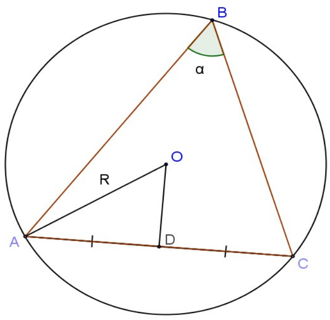
$$\angle B = 180^o - 15^o - 60^o = 105^o.$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin 60^o \cdot 2R\sin 15^o \sin 105^o = R^2 \sin 60^o \sin 30^o = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

Ats.: $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

7. **Duota:** $AC = 2\sqrt{3}$, $OD = 1$.

Raskite: α.



Apibrėžto apskritimo centras yra iš trikampio kraštinių vidurio taškų iškeltų statmenų susikirtimo taškas, todėl $AD = DC = \sqrt{3}$, ir trikampis AOD yra status.
Trikampiui AOD pritaikome Pitagoro teoremą ir randame R: R = 2.
Trikampiui ABC pritaikę sinusų teoremą, gauname:

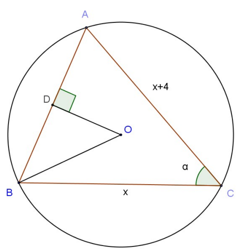
$$\sin\alpha = \frac{AC}{2R}, \sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{2\cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Jeigu trikampis smailusis, tai α lygus 60°, jeigu bukasis, tai apskritimo centras yra trikampio išorėje, o α lygus 120°.

Ats.: 60° arba 120°.

8. **Duota:** $AC - BC = 4,\ DO = 2,\ R = 4.$

Raskite: AB, AC, BC.



Pažymėkime: $BC = x, AC = x + 4$.
Kraštinė AB vidurinioji pagal didumą, tai kampas priešais ją smailusis. Pasinaudojame 7 uždavinyje pateiktais samprotavimais ir randame AB, kuri lygi $4\sqrt{3}$.
Trikampiui ABC pritaikę sinusų teoremą, gauname:

$$\sin\alpha = \frac{AB}{2R}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}.$$

Trikampiui ABC taikome kosinusų teoremą:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC\cdot AC\cos\alpha;$$

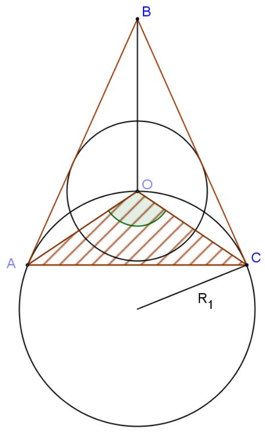
$$\left(4\sqrt{3}\right)^2 = x^2 + (x+4)^2 - 2x(x+4)\cdot\frac{1}{2};$$

$$x = 4.$$

Ats.: $AB = 4\sqrt{3}, BC = 4, AC = 8.$

9. **Duota:** $\angle B = 60^o$, R – apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo spindulys. R = 2.

Raskite: R_1.



Įbrėžto į trikampį ABC apskritimo centras yra pusiaukampinių susikirtimo taškas, todėl:

$$\angle 1 = 180^o - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle C = 180^o - \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) =$$

$$180^o - \frac{1}{2}(180^o - \angle B) = 90^o + \frac{1}{2}\angle B = .$$

$$\angle 1 = 120^o.$$

Trikampiams ABC ir AOC taikome sinusų teoremą:

$$AC = 2R\sin 60^o,$$

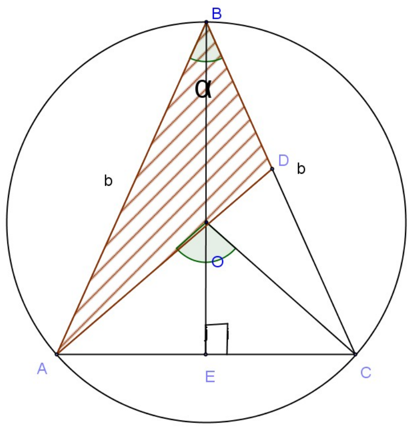
$$AC = 2R_1 \sin 120^o.$$

$$R\sin 60^o = R_1 \sin 120^o.$$

$$R_1 = \frac{R\sin 60^o}{\sin 120^o},$$

$$R_1 = 2.$$

Ats.: 2.



10. **Duota:** $AB = BC = b, \angle ABC = \alpha.$

Raskite: AD.

Kampas ABC įbrėžtinis, o kampas AOC centrinis ir remiasi į tą patį lanką AC, todėl kampas AOC lygus 2α. Kadangi trikampis ABC lugiašonis, tai kampas AOE lygus $\frac{1}{2}$ kampo AOC ir lygus α. Trikampis AOE status, tai kampas OAE lygus $(90^o - \alpha)$.

Trikampio BEC kampas BCE lygus $\left(90^o - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Taigi trikampyje ADC:

$$\angle ADC = 180^o - \angle DAC - \angle DCA;$$

$$\angle ADC = \frac{3}{2}\alpha.$$

$$\angle ADB = 180^o - \frac{3}{2}\alpha.$$

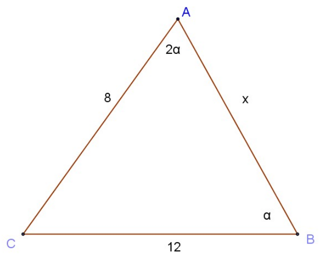
Trikampiui ABD taikome sinusų teoremą:

$$\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\left(180^o - \frac{3}{2}\alpha\right)}. \quad AD = \frac{b\sin\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha}.$$

Ats.: $\dfrac{b\sin\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha}$.

11. **Duota:** $\angle A = 2\angle B, AC = 8, BC = 12.$

Raskite: AB.



Pažymėkime: $\angle B = \alpha, \angle A = 2\alpha, AB = x.$

Taikome sinusų teoremą:

$$\frac{12}{\sin 2\alpha} = \frac{8}{\sin\alpha}; \cos\alpha = \frac{3}{4}, \sin\alpha = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\frac{x}{\sin(180^o - 3\alpha)} = \frac{8}{\sin\alpha};$$

$$x = \frac{8\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 8(3 - 4\sin^2\alpha);$$

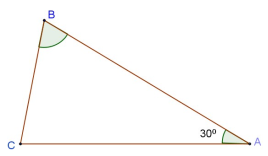
$$x = 8\left(3 - \frac{4\cdot 7}{16}\right);$$

$$x = 10.$$

Ats.: 10.

12. **Duota:** $\dfrac{BC^2}{BA^2} = \dfrac{1}{2}, \angle A = 30^o.$

Raskite: $\angle B.$



Remdamiesi sąlygą, gauname: $AB = BC\sqrt{2}.$

Remiamės sinusų teorema:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}; \frac{BC\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{BC}{\sin 30^o};$$

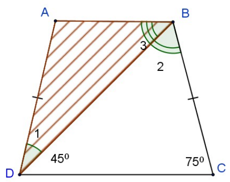
$$\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}; \angle C = 45^o.$$

$$\angle B = 180^o - 45^o - 30^o = 105^o.$$

Ats.: 105^o

13. **Duota:** $DC = 12, \angle C = 75^o, \angle BDC = 45^o, AD = BC.$

Raskite: AB.



$\angle 3 = \angle BDC = 45^O$,

$\angle 1 = 75^O - 45^O = 30^O$.

$\angle 2 = 180^O - 45^O - 75^O = 60^O$.

Trikampiams ABD ir BDC taikome sinusų teoremą:

$$\frac{AD}{\sin 45^o} = \frac{AB}{\sin 30^o}; \frac{BC}{\sin 45^o} = \frac{DC}{\sin 60^o}.$$

Kairiosios lygybių pusės lygios, todėl:

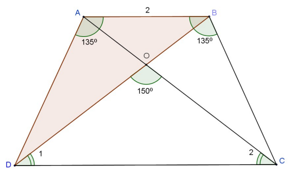
$$\frac{AB}{\sin 30^o} = \frac{DC}{\sin 60^o};$$

$$AB = \frac{12 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}.$$

Ats.: $4\sqrt{3}$.

14. **Duota:** $AB = 2, \angle DAB = \angle CBA = 135^o, \angle DOC = 150^o$.

Raskite: S.



Trapecijos plotas:

$$S = \frac{1}{2} BD \cdot AC \sin 150^o.$$

Kadangi trapecija lygiašonė, tai kampas ADB lygus 30°.

$AC = BD, DO = OC, \angle 1 = \angle 2 = 15^o, \angle ADC = \angle BCD = 45^o$.

Trikampiui ABD taikome sinusų teoremą:

$$\frac{BD}{\sin 135^o} = \frac{2}{\sin 30^o}, BD = 2\sqrt{2}.$$

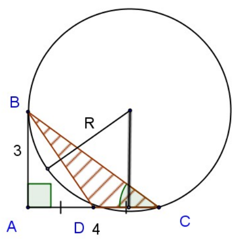
Tuomet ieškomas plotas:

$$S = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Ats.: 2.

15. **Duota:** $AB = 3, AC = 4, AD = DC.$

Raskite: R.



Ieškomo spindulio apskritimas apibrėžtas apie trikampį BDC. Šiam trikampiui pritaikę sinusų teoremą, randame R.

$$R = \frac{BD}{2 \sin C}.$$

Trikampiams BAD ir BAC pritaikę Pitagoro teoremą, apskaičiuojame BD ir BC:

$$BD = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}, BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Iš trikampio BAC išreiškiame sinC:

$$\sin C = \frac{AB}{BC}, \sin C = \frac{3}{5}.$$

$$R = \frac{5}{6}\sqrt{13}.$$

Taigi

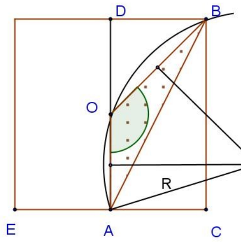
$$\frac{5}{6}\sqrt{13}.$$

Ats.:

$$BC = 1, AE = AC.$$

16. Duota:

Raskite: R.



Ieškomo spindulio apskritimas apibrėžtas apie trikampį AOB. Pasinaudojame sinusų teorema:

$$R = \frac{AB}{2\sin BOA}.$$

Trikampiui ABC taikome Pitagoro teoremą:

$$AB = \sqrt{1^2 + 0{,}5^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\angle BOD = 45^o, \angle AOB = 180^o - 45^o = 135^o.$$

$$\sin BOA = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$R = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

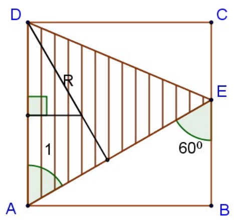
$$\frac{\sqrt{10}}{4}$$

Ats.: .

$$AB = 6\sqrt{3}, \angle AEB = 60^o.$$

17. Duota:

Raskite: R – apibrėžto apie trikampį AED apskritimo spindulys.



Randame trikampio ABE kraštinę EB:

$$EB = 6\sqrt{3}ctg\,60^o,$$

$$EB = 6.$$

$$CE = 6\sqrt{3} - 6.$$

Trikampiui DCE pritaikome Pitagoro teoremą:

$$DE = \sqrt{\left(6\sqrt{3}\right)^2 + \left(6\sqrt{3} - 6\right)^2} = 6\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}.$$

Kampas 1 lygus 60º kaip priešinis duotam kampui prie lygiagrečių tiesių ir kirstinės AE.

Trikampiui AED taikome sinusų teoremą:

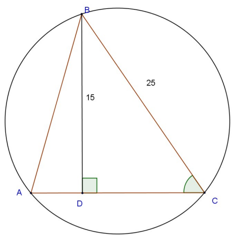
$$R = \frac{DE}{2\sin 60^o},$$

$$R = \frac{6\sqrt{7-2\sqrt{3}}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{21-6\sqrt{3}}.$$

Ats.: $2\sqrt{21-6\sqrt{3}}$.

18. **Duota:** $BC = 25, BD = 15, R = 32{,}5.$

Raskite: AB, AC.



Trikampiui BDC pritaikę Pitagoro teoremą, gauname DC:

$$DC = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20.$$

$$\sin C = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

Šiame trikampyje

Trikampiui ABC taikome sinusų teoremą:

$$AB = 2R\sin C,$$

$$AB = 2\cdot 32{,}5\cdot\frac{3}{5},$$

$$AB = 39.$$

Trikampiui ABD pritaikome Pitagoro teoremą:

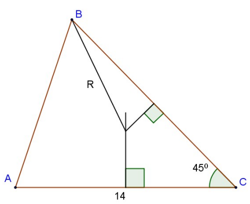
$$AD = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36.$$

$$AC = 30 + 36 = 56.$$

Ats.: 39; 56.

19. **Duota:** $S = 56, AC = 14, \angle C = 45^o.$

Raskite: R.



Trikampio plotas:

$$S = \frac{1}{2}BC\cdot AC\sin C,$$

$$56\cdot 2 = BC\cdot 14\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$BC = 8\sqrt{2}.$$

Remdamiesi kosinusų teorema, randame AB:

$$AB^2 = 14^2 + \left(8\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot 14\cdot 8\sqrt{2}\cos 45^o,$$

$$AB = 10.$$

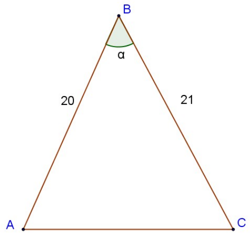
Spindulį randame, panaudoję sinusų teoremą:

$$R = \frac{AB}{2\sin C};$$
$$R = \frac{10}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 5\sqrt{2}.$$

Ats.: $5\sqrt{2}$.

20. **Duota:** $\frac{AC}{R} = \frac{6}{5}, AB = 20, BC = 21.$

Raskite: AC.



Pažymėkime: $\angle B = \alpha$.

Pagal sąlygą kraštinė AC lygi $\frac{6}{5}R$, pagal sinusų teoremą - $2R\sin\alpha$.

$$\frac{6}{5}R = 2R\sin\alpha,$$
$$\sin\alpha = \frac{3}{5},$$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$ (prieš mažesnę kraštinę gali būti tik smailusis kampas).

Ieškomą kraštinę randame, pasinaudoję kosinusų teorema:

$$AC^2 = 20^2 + 21^2 - 2 \cdot 20 \cdot 21 \cdot \frac{4}{5},$$

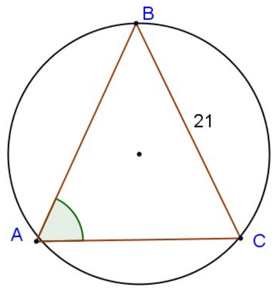
$$AC = 13.$$

Ats.: 13.

21. **Duota:** $R = 7\sqrt{3}, BC = 21, \frac{AB}{AC} = \frac{5}{8}.$

Raskite: AB, AC.

Pagal sinusų teoremą kraštinė BC lygi $2R\sin A.$



$$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}.$$

Pažymėkime $AB = 5x, AC = 8x$ ir taikome kosinusų teoremą:

$$21^2 = (5x)^2 + (8x)^2 - 2\cdot 5x\cdot 8x\cdot\frac{1}{2},$$

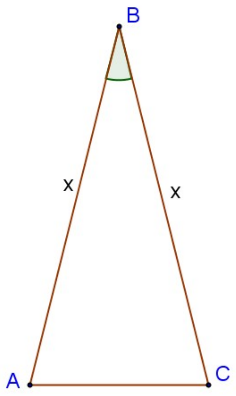
$$(7x)^2 = 21^2,$$

$$x = 3.$$

Ats.: $AB = 15, AC = 24.$

22. **Duota:** $AB = BC$ (pažymime x), $\sin\alpha = 0{,}96, R = 12{,}5.$

Raskite: x.



$$\angle A = 90^o - \frac{\alpha}{2}.$$

Taikome sinusų teoremą:

$$x = 2R\sin A,$$

$$x = 2\cdot 12{,}5\sin\left(90^o - \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{25},$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{x^2}{625}}.$$

$$\sin\alpha = \frac{24}{25}.$$

Pagal sąlygą:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

Kadangi tai

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x}{25}\right)^2}\cdot\frac{x}{25} = \frac{12}{25},$$

$\left(\frac{x}{25}\right)^2$ pažymime a ir lygtį keliame kvadratu:

$$(1-a)a = \frac{144}{625},$$

$$a^2 - a + \frac{144}{625} = 0,$$

$$a = \frac{16}{25}.$$

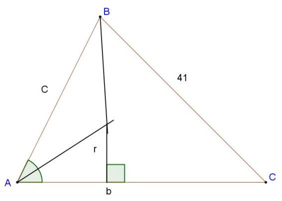
$$\frac{x}{25} = \frac{4}{5},$$

$$x = 20.$$

Ats.: 20.

23. **Duota:** $BC = 41, R = 25{,}625, S = 780.$

Rakite: r.



Pažymime $AC = b, AB = c.$

Pagal sinusų teoremą $\sin\alpha = \dfrac{BC}{2R}$.

$$\sin\alpha = \frac{41}{2\cdot 25{,}625} = \frac{4}{5},$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}.$$

Pasinaudoję kosinusų teorema:

$$41^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cdot\frac{3}{5}.$$

Kadangi

$$c^2 + b^2 = (c+b)^2 - 2bc,$$

tai

$$(c+b)^2 = 1681 + \frac{16}{5}bc.$$

Sandaugą bc rasime iš trikampio ploto formulės $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$:

$$2\cdot 780 = bc\cdot\frac{4}{5},$$

$$\frac{16}{5}bc = 6240.$$

$$(c+b)^2 = 7921 = 89^2,$$

$$c + b = 89.$$

Tuomet trikampio perimetras lygus 130:

$$c+b+41=130.$$

$$r=\frac{s}{p},$$

$$r=\frac{780}{65}=12.$$

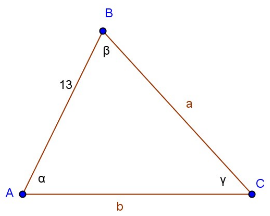
12.

Ats.:

$$S=84, AB=13, R=8{,}125.$$

24. **Duota:**

Raskite: BC (pažymime a) ir AC (pažymime b).



Remdamiesi sinusų teorema, surandame AB:

$$AB=2r\sin\gamma,$$

$$\sin\gamma=\frac{13}{2\cdot 8{,}125}=\frac{4}{5},$$

$$\cos\gamma=\frac{3}{5}.$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

Trikampio plotas

$$2\cdot 84=ab\cdot\frac{4}{5},$$

$$ab=210.$$

Pagal kosinusų teoremą:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\gamma,$$

$$13^2=a^2+b^2-2\cdot 210\cdot\frac{3}{5},$$

$$a^2+b^2=421,$$

$$(a+b)^2-2ab=421,$$

$$(a+b)^2=841,$$

$$a+b=29.$$

Išsprendę sistemą $\begin{cases} a+b=29 \\ ab=210 \end{cases},$ randame a:

$$a=14,$$

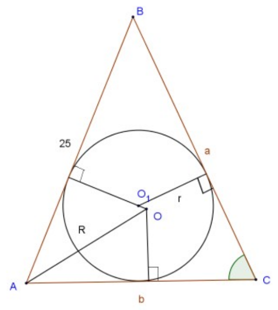
$$b=15.$$

Ats.: 14, 15.

$$AB=25. r=9, R=\frac{125}{6}.$$

25. **Duota:**

Raskite: AC (pažymime b), BC (pažymime a).



Remiamės sinusų teorema:

$$\sin C = \frac{AB}{2R},$$

$$\sin C = \frac{3}{5},$$

$$\cos C = \frac{4}{5}.$$

Trikampio plotas $S = \frac{1}{2}ab\sin C = pr$ (p – pusperimetris).

$$ab \cdot \frac{3}{5} = (a+b+25)9,$$

$$ab = 15(a+b+25).$$

Remiamės kosinusų teorema:

$$25^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

$$(a+b)^2 = \frac{18}{5}ab + 625.$$

Remiamės gautomis lygybėmis:

$$(a+b)^2 - 54(a+b) - 1975 = 0,$$

$$a+b = 79,$$

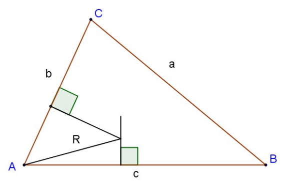
$$ab = 1560.$$

$$a = 39, b = 40.$$

Ats.: 39; 40.

26. **Duota:** $R = 32{,}5, \sin A = \frac{3}{5}, \sin B = \frac{5}{13}.$

Raskite: a, b, c, S.



Jei $\sin A = \frac{3}{5}$, tai $\cos A = \frac{4}{5}$;

Jei $\sin B = \frac{5}{13}$, tai $\cos B = \frac{12}{13}$.

$$\sin C = \sin\left(180^o - (A+B)\right) = \sin(A+B) = \sin A\cos B + \sin B\cos A.$$

$$\sin C = \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5}=\frac{56}{65}.$$

$$a = 2R\sin A, a = 65\cdot\frac{3}{5}=39.$$

$$b = 2R\sin B, b = 65\cdot\frac{5}{13}=25.$$

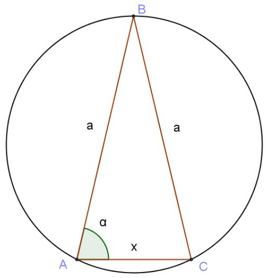
$$c = 2R\sin C, c = 65\cdot\frac{56}{65}=56.$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A, S = 420.$$

Ats.: 39, 25, 56, 420.

27. **Duota:** $\sin\alpha = 0{,}6, AB = BC$ (pažymime a), $a = R + 7{,}5.$

Raskite: AC (pažymime x).



Pagal sinusų teoremą kraštinė a lygi $2R\sin\alpha$, pagal sąlygą - $(R+7{,}5)$.

$$R+7{,}5 = 2R\cdot 0{,}6;$$

$$R = 37{,}5.$$

$$x = 2R\sin(180^o - 2a) = 75\sin 2a.$$

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a,$$

$$\sin 2a = 2\cdot 0{,}6\cdot\sqrt{1-0{,}6^2} = 0{,}96.$$

$$x = 72.$$

Ats.: 72.

28. Žr. 27 uždavinio brėžinį

Duota: AB=BC,

$\angle BAC = a$

,

skritulio plotas S.

Raskite: SABC.

Pagal sinusų teoremą $a = 2R\sin\alpha, x = 2R\sin 2\alpha.$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ax\sin\alpha = \frac{1}{2}4R^2\cdot 2\sin^3 a\cos\alpha.$$

$$S = \pi R^2.$$

$$R^2 = \frac{S}{\pi}.$$

$$S_{ABC} = \frac{4S}{\pi}\sin^3\alpha\cos\alpha.$$

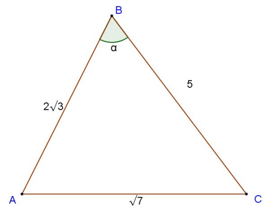
$$\frac{4S}{\pi}\sin^3\alpha\cos\alpha.$$

Ats.:

$$AB = 2\sqrt{3}, BC = 5, AC = \sqrt{7}.$$

29. **Duota:**

Rasti: R.



Remdamiesi kosinusų teorema, surandame kampą α.

$$7 = 25 + 12 - 2\cdot 5\cdot 2\sqrt{3}\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}.$$

Taikome sinusų teoremą:

$$R = \frac{AC}{2\sin\alpha},$$

$$R = \sqrt{7}.$$

$$\sqrt{7}.$$

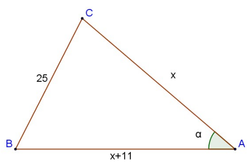
Ats.:

$$BC = 25, AB - AC = 11, R = 32{,}5.$$

30. **Duota:**

Rasti: S.

$$AC = x, AB = x + 11.$$



Pažymime

$$\sin\alpha = \frac{BC}{2R};$$

Pagal sinusų teoremą:

$$\sin\alpha = \frac{25}{2\cdot 32{,}5} = \frac{5}{13},$$

$$\cos\alpha = \frac{12}{13}.$$

Taikome kosinusų teoremą:

$$25^2 = x^2 + (x+11)^2 - 2x(x+11)\cdot\frac{12}{13},$$

$$x = 52.$$

$$S = \frac{1}{2}AC\cdot AB\sin\alpha,$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot 52\cdot 63\cdot\frac{5}{13} = 630.$$

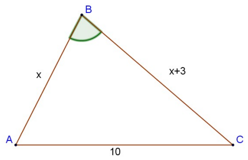
630.

Ats.:

$AC = 10, BC - AB = 3, R = 5.$

31. **Duota:**

Raskite: S.



Remiamės sinusų teorema:

$$\sin\alpha = \frac{AC}{2R};$$
$$\sin\alpha = 1,$$
$$\alpha = 90^o.$$

Taigi trikampis status.
Taikome Pitagoro teoremą:

$$x^2 + (x+3)^2 = 100,$$
$$2x^2 + 6x - 91 = 0,$$
$$x = \sqrt{191} - 3.$$

$$S = \frac{1}{2}x \cdot (x+3):$$

Tuomet trikampio plotas

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left(191 - 3\sqrt{191}\right).$$

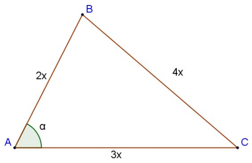
$$\frac{1}{2} \cdot \left(191 - 3\sqrt{191}\right).$$

Ats.:

$AB : AC : BC = 2 : 3 : 4, R = 8.$

32. **Duota:**

Raskite: S.



$$AB = 2x, AC = 3x, BC = 4x.$$

Pažymime:

Remdamiesi sinusų teorema, gauname:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{2R},$$
$$\sin\alpha = \frac{4x}{2 \cdot 8} = \frac{x}{4}.$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}.$$

Remdamiesi kosinusų teorema, užrašome:

$$16x^2 = 4x^2 + 9x^2 \pm 12x^2\sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2},$$
$$1 = \pm 4\sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}.$$

Tik $1=\pm 4\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}$ turi prasmę, o tai yra tuo atveju, kai kampas α bukas.
Pastarąją lygybę keliame kvadratu:

$$\frac{1}{16}=1-\left(\frac{x}{4}\right)^2,$$

$$x=\sqrt{15}.$$

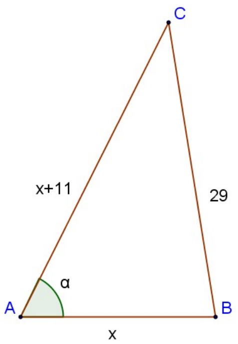
$$S=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 3x\cdot\frac{x}{4}=\frac{3}{4}x^2,$$

$$S=\frac{45}{4}.$$

Ats.: $\frac{45}{4}.$

33. **Duota:** $BC=29, AC-AB=11, R=18\frac{1}{8}.$

Raskite: r.



Pagal sinusų teoremą $\sin\alpha=\frac{BC}{2R}:$

$$\sin\alpha=\frac{4}{5},$$

$$\cos\alpha=\frac{3}{5}.$$

(α - smailusis kampas).

Pagal kosinusų teoremą:

$$29^2=x^2+(x+11)^2-2x(x+11)\cdot\frac{3}{5},$$

$$x^2+11x-900=0,$$

$$x=25.$$

$$x+11=35.$$

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\alpha,$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot 25\cdot 35\cdot\frac{4}{5}=360.$$

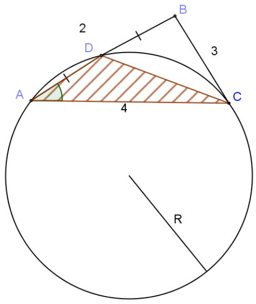
$$p=45.$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{360}{45}=8.$$

Ats.: 8.

34. **Duota:** $AC=4, BC=3, AB=2, AD=DB.$

Raskite: R.



Ieškomo spindulio apskritimas apibrėžtas apie trikampį ADC. Šiam trikampiui pritaikę sinusų teoremą, surandame R:

$$R = \frac{DC}{2\sin A}.$$

Trikampiui ABC taikome kosinusų teoremą:

$$9 = 4 + 16 - 2 \cdot 8\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{11}{16},$$

$$\sin\alpha = \frac{3\sqrt{15}}{16}.$$

DC randame, trikampiui ADC pritaikę kosinusų teoremą:

$$DC^2 = 1 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{11}{16} = \frac{46}{4},$$

$$DC = \frac{\sqrt{46}}{2}.$$

$$R = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{46}{15}}.$$

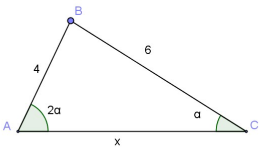
$$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{46}{15}}.$$

Ats.:

$$AB = 4, BC = 6, \angle C : \angle A = 1:2.$$

35. **Duota:**

Raskite: AC (pažymime x).



$$\angle C = \alpha, \angle A = 2\alpha.$$

Pažymime:

Taikome sinusų teoremą:

$$\frac{6}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{4};$$

$$\angle B = 180^o - 3\alpha,$$

$$\frac{x}{\sin(180^o - 3\alpha)} = \frac{4}{\sin\alpha},$$

$$x = \frac{4\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 4(3 - 4\sin^2\alpha) = 16\cos^2\alpha - 4,$$

$$x = 5.$$

5.

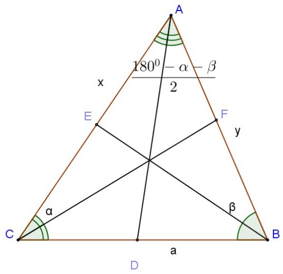
Ats.:

$$BC = a, \angle C = \alpha, \angle B = \beta.$$

36. **Duota:**

Raskite: CF, BE, AD.

Pažymime: AC = x, AB = y.



Trikampiui ABC taikome sinusų teoremą:

$$x=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},\; y=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Trikampiui ACD taikome sinusų teoremą:

$$AD=\frac{x\sin\alpha}{\sin ADC}.$$

$$\sin ADC=\sin\left(180^o-\frac{180^o-\alpha-\beta}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

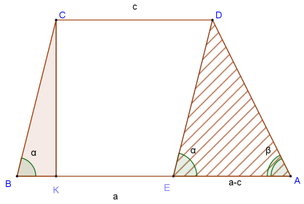
$$AD=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Pritaikę sinusų teoremą trikampiams BEC ir CFB, gauname:

$$BE=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},CF=\frac{a\sin\beta}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

37. **Duota:** $AB=a, CD=c, \angle B=\alpha, \angle A=\beta.$

Raskite: S.



$$EA=a-c.$$

Brėžiame DE, lygiagrečią BC.

Trikampiui ADE taikome sinusų teoremą:

$$DE=\frac{(a-c)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

$$DE=BC.$$

Remdamiesi trikampiu BCK, išreiškiame CK:

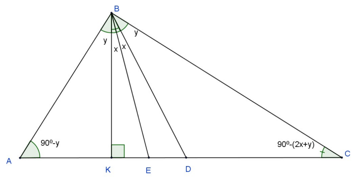
$$CK=CB\sin\alpha=\frac{(a-c)\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

$$S=\frac{CD+AB}{2}\cdot CK,$$

$$S=\frac{(a^2-c^2)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$

38. **Duota:** $AD=DC,$ BK statmena AC, $\angle ABE=\angle CBE, \angle KBE=\angle EBD$ (pažymime x).

Nustatykite trikampio rūšį.



$\angle ABK=\angle DBC$ (pažymime y).

$$\angle A=90^o-y, \angle C=90^o-(2x+y).$$

Trikampiui ABC taikome sinusų teoremą:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{\sin\left(90^o-\left(2x+y\right)\right)}{\sin\left(90^o-y\right)}=\frac{\cos\left(2x+y\right)}{\cos y}.$$

Trikampiui ABD ir BDC plotai lygūs, nes AD lygi DC ir aukštinė BK bendra.

$$2S_{ABD}=AB\cdot BD\sin\left(2x+y\right),$$

$$2S_{BDC}=BD\cdot BC\sin y.$$

$$\frac{AB}{BC}=\frac{\sin y}{\sin\left(2x+y\right)}.$$

Palyginame santykio $\frac{AB}{BC}$ reikšmes:

$$\frac{\cos\left(2x+y\right)}{\cos y}=\frac{\sin y}{\sin\left(2x+y\right)},$$

$$\sin(4x+2y)=\sin 2y.$$

$$4x+2y+2y=180^o,$$

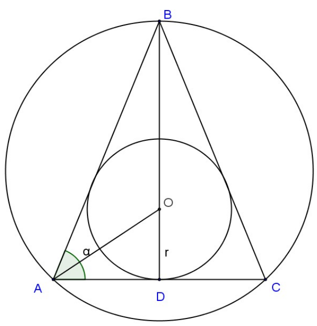
$$2x+2y=90^o.$$

Taigi kampas B status.

Ats.: Status.

39. **Duota:** $R, AB=BC, \angle BAC=\alpha.$

Rasti: r.



AO yra pusiaukampinė. Remdamiesi trikampiu AOD, išreiškiame r:

$$r=\frac{1}{2}ACtg\frac{\alpha}{2}.$$

Trikampiui ABC taikome sinusų teoremą:

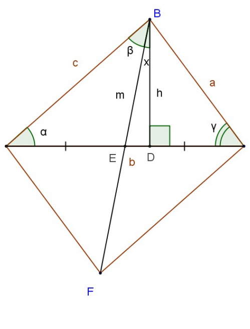
$$AC=2R\sin\left(\pi-2\alpha\right).$$

$$r=R\sin 2\alpha tg\frac{\alpha}{2}.$$

Ats.: $R\sin 2\alpha tg\frac{\alpha}{2}.$

40. **Duota:** $\alpha,\beta,\gamma, AE=EC,$ BD statmena AC.

Raskite: $\angle EBD$ **(**pažymėkime x).



Pažymime:

$$AB=c,$$

$$BC=a,$$

$$AC=b,$$

$$BE=m,$$

$$BD=h.$$

Remdamiesi trikampiais EBD ir ABD, gauname:

$$\cos\alpha = \frac{h}{m} = \frac{c\sin\alpha}{m}.$$

m išreiškiame trikampio kraštinėmis.
Pratęsiame BE = EF = m
ABCF – lygiagretainis, todėl:

$$BF^2 + AC^2 = 2\left(BC^2 + AB^2\right).$$

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}.$$

$$a = 2R\sin\alpha,$$

Remiamės sinusų teorema:

$$b = 2R\sin\beta,$$

$$c = 2R\sin\gamma.$$

$$\cos x = \frac{2R\sin\gamma\sin\alpha}{\frac{1}{2}\sqrt{(2R)^2\left(2\sin^2\alpha + 2\sin^2\gamma - \sin^2\beta\right)}}.$$

$$\frac{2\sin\alpha\sin\gamma}{\sqrt{2\sin^2\alpha + 2\sin^2\gamma - \sin^2\beta}}.$$

Ats.:

<u>Kosinusų teorema</u>

Trikampio kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumos ir dvigubos tų kraštinių bei tarp jų esančio kampo kosinuso sandaugos skirtumui:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Remdamiesi kosinusų teorema, galime rasti cosA:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Uždavinių sprendimas

42. 43. Remkitės trikampio kraštinių ir kampų priklausomybės teorema bei formule $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

44. Didžiausias kampas yra prieš didžiausią kraštinę, todėl kosinusų teoremą taikome didžiausiai kraštinei:

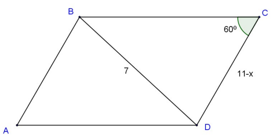
a) $\cos\alpha = \frac{6^2 + 7^2 - 9^2}{2\cdot 6\cdot 7} = \frac{1}{21} > 0,$ todėl α - smailusis kampas, o trikampis smailus;

b) $\cos\alpha = \frac{7^2 + 24^2 - 25^2}{2\cdot 7\cdot 24} = 0,$ todėl α - statusis kampas, o trikampis status;

c) $\cos\alpha = \frac{23^2 + 25^2 - 34^2}{2\cdot 23\cdot 25} = -\frac{1}{23\cdot 25} < 0,$ todėl α - bukasis kampas, o trikampis bukas.

45. a)**Duota:** $\angle C = 60^o$, perimetras lygus 22, $BD = 7$.

Raskite: CD, BC, BA, AD.



Pusperimetris lygus 11.

Pažymime: BC = x, CD = 11-x.

Trikampiui BCD taikome kosinusų teoremą:

$$7^2 = x^2 + (11 - x)^2 - 2x(11 - x)\cdot\frac{1}{2},$$

$$x = 3.$$

Ats.: AB = CD = 8, AD = BD = 3.

d) Gretimas kraštines pažymime 5x ir 8x, ir trikampiui ABD (žr. a) taikome kosinusų teoremą.

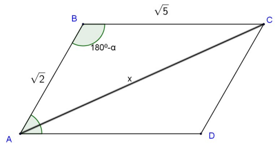
$$AB = \sqrt{2}, BC = \sqrt{5}, \angle A = \alpha, \sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

46. **Duota:**

Raskite: AC (pažymime x).

$\angle B = 180^o - \alpha.$

$$\cos(180^o-\alpha)=-\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{9}{10}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}.$$



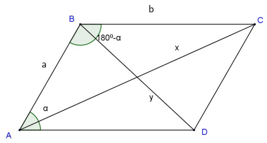
Trikampiui ABC taikome kosinusų teoremą:

$$x^2=2+5+2,$$
$$x^2=9,$$
$$x=3.$$

Ats.: 3.

47. **Duota:** AB = CD (pažymime a), BC = AD (pažymime b), AC (pažymime x), BD (pažymime y).

Įrodykite: $x^2+y^2=2(a^2+b^2).$



Pažymime $\angle A=\alpha, \angle B=180^o-\alpha.$

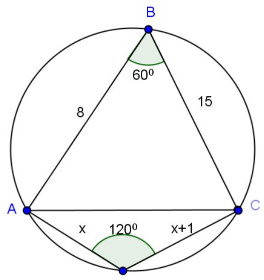
Trikampiui ABD ir ABC taikome kosinusų teoremą:

$$+\begin{cases} y^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha \\ x^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha \end{cases}$$

$$x^2+y^2=2(a^2+b^2).$$

48. **Duota:** $AB=8, BC=15, \angle B=60^o\ DC-AD=1.$

Raskite: AD, DC.



Remdamiesi įbrėžtinio keturkampio savybe, randame kampą D:

$$\angle D=180^o-60^o=120^o.$$

Pažymime: $AD=x, DC=x+1.$

Pritaikę kosinusų teoremą trikampiams ABC bei ADC, išreiškiame AC^2 ir sulyginame:

$$8^2+15^2-2\cdot 8\cdot 15\cos 60^o=x^2(x+1)^2-2x(x+1)\cos 120^o,$$

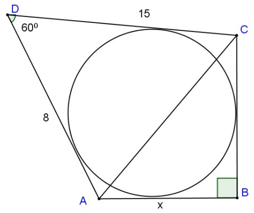
$$x^2+x-56=0,$$
$$x=7,$$
$$x+1=8.$$

Ats.: 7; 8.

49. **Duota:** $\angle D=60^o, \angle B=90^o, DA=8, DC=15.$

Raskite: AB, BC.

Brėžiame AC. Pažymime: AB – x.



Trikampiui ADC taikome kosinusų teoremą:

$$AC^2 = 8^2 + 15^2 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cos 60^o,$$
$$AC = 13.$$

Trikampiui ABC taikome Pitagoro teoremą:

$$BC = \sqrt{13^2 - x^2}.$$

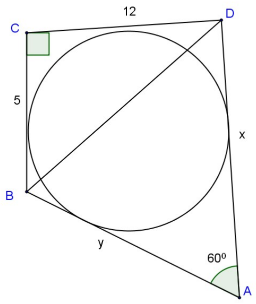
Taikome apibrėžtinio keturkampio savybę:

$$AB + CD = BC + AD,$$
$$x + 15 = \sqrt{13^2 - x^2} + 8,$$
$$x^2 + 7x - 60 = 0,$$
$$x = 5,$$
$$BC = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

Ats.: 5, 12.

50. **Duota:** $\angle C = 90^o, \angle A = 60^o, BC = 5, CD = 12.$

Raskite: BA(pažymime y), AD (pažymime x).



Trikampiui BCD taikome Pitagoro teoremą:

$$BD = \sqrt{5^2 - 12^2} = 13.$$

Remiamės apibrėžtinio keturkampio savybe:

$$5 + x = 12 + y,$$
$$y = x - 7.$$

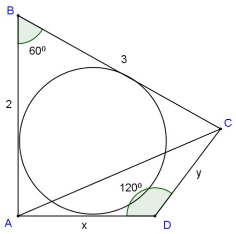
Trikampiui BDA taikome kosinusų teoremą:

$$13^2 = x^2 + y^2 - 2yx \cos 60^o,$$
$$13^2 = x^2 + (x-7)^2 - 2x(x-7),$$
$$x = 10,$$
$$y = 3.$$

Ats.: 3; 10.

51. **Duota:** $AB = 2, BC = 3, \angle B = 60^o, \angle D = 120^o.$

Raskite: AD (pažymime x), DC (pažymime y).



Pritaikę kosinusų teoremą trikampiams ABC bei ADC, išsireiškiame AC^2 ir sulyginame:

$$2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos 60^o = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^o,$$
$$x^2 + y^2 + xy = 7.$$

Remiamės apibrėžtinio keturkampio savybe:

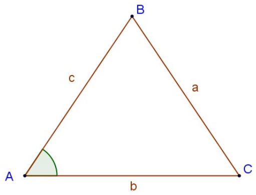
$$x+3=2+y,$$
$$x=y-1.$$
$$y^2-y-2=0,$$
$$y=2, x=1.$$

Ats.: 2; 1.

$$b, c, S=\frac{2}{5}bc.$$

52. **Duota:**

Raskite: a.



Taikome kosinusų teoremą:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

Trikampio plotas

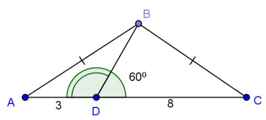
$$\sin A=\frac{2s}{bc},$$
$$\sin A=\frac{4}{5},$$
$$\cos A=\pm\frac{3}{5}.$$
$$a=\sqrt{b^2+c^2\pm\frac{6}{5}bc}.$$

$$AB=BC, \angle BDC=60^o, AD=3, DC=8.$$

53. **Duota:**

Raskite: AB.

$$\angle BDA=120^o.$$



Trikampiams ADB ir BDC taikome kosinusų teoremą, išreiškiame AB^2 bei BC^2 ir sulyginame:

$$3^2+BD^2-2\cdot 3\cdot BD\cos 120^o=8^2+BD^2-2\cdot 8\cdot BD\cos 60^o,$$
$$BD=5.$$

Trikampiai ADB taikydami kosinusų teoremą, randame AB, kuris lygus 7.

Ats.: 7.

54. Taikome kosinusų teoremą ilgiausiai kraštinei:

$$\cos\alpha=\frac{9^2+10^2-17^2}{2\cdot 9\cdot 10}=-0{,}6,$$
$$\sin\alpha=\sqrt{1-0{,}36}=0{,}8.$$

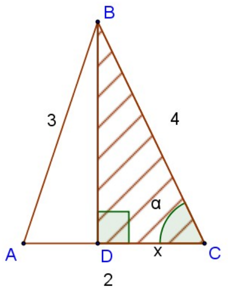
0,8.

Ats.:

$$AC=2, AB=3, BC=4,$$

55. **Duota:** BD statmena AC.

Raskite: CD (pažymime x).



Naudodamiesi trikampiu BCD, išreiškiame $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{x}{4}.$$

Pritaikę kosinusų teoremą trikampiui ABC, išreiškiame $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{2^2 + 4^2 - 3^2}{2\cdot 2\cdot 4} = \frac{11}{16}.$$

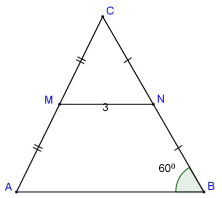
Sulyginę kosinusų reikšmes, gauname:

$$\frac{x}{4} = \frac{11}{16},$$
$$x = 2{,}75.$$

Ats.: 2,75.

56. **Duota:** $AM = MB, BN = NC, AB = 7, MN = 3, \angle C = 60^o.$

Raskite: BC (pažymime x).



MN – trikampio vidurinė linija, todėl $MN = \frac{1}{2}AC,$ o $AC = 6.$

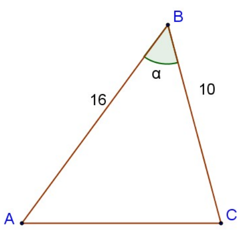
Trikampiui ABC taikome kosinusų teoremą:

$$7^2 = x^2 + 6^2 - 2x\cdot 6\cos 60^o,$$
$$x^2 - 6x - 13 = 0,$$
$$x = 3 + \sqrt{22}.$$

Ats.: $3+\sqrt{22}.$

57. **Duota:** $AB = 16, BC = 10, \alpha$ -smailus, $S = 48.$

Raskite: AC.



$$S = \frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\alpha,$$
$$48\cdot 2 = 16\cdot 10\cdot \sin\alpha,$$
$$\sin\alpha = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

Taikome kosinusų teoremą:

$$AC^2 = 16^2 + 10^2 - 2\cdot 16\cdot 10\cdot \frac{4}{5},$$
$$AC = 10.$$

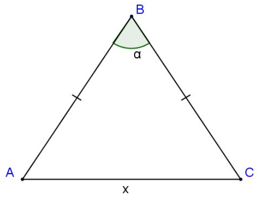
Ats.: 10.

58. Žr. 57 uždavinį.

59. Žr. 57 uždavinį.

60. **Duota:** $S = 10, \cos\alpha = \frac{21}{29}, AB = BC = a.$

Raskite: AC (pažymime x).



$$2S = a^2 \sin\alpha,$$
$$2 \cdot 10 = a^2 \sqrt{1 - \left(\frac{21}{29}\right)^2},$$
$$a^2 = 29.$$

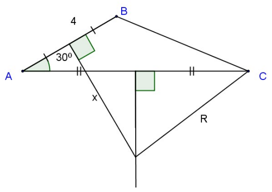
Taikome kosinusų teoremą:

$$x^2 = 2a^2 - 2a^2\cos\alpha = 2a^2(1 - \cos\alpha),$$
$$x^2 = 58\left(1 - \frac{21}{29}\right) = 16,$$
$$x = 4.$$

Ats.: 4.

61. **Duota:** $AB = 4, \angle A = 30^o, S = 16.$

Raskite: $S_{skritulio}$.



Pažymime: AC = x, BC = a.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 30^o,$$
$$16 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x \cdot \frac{1}{2},$$
$$x = 16.$$

Remdamiesi kosinusų teorema, randame BC:

$$a^2 = 4^2 + 16^2 - 2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2},$$
$$a = 4\sqrt{13}.$$

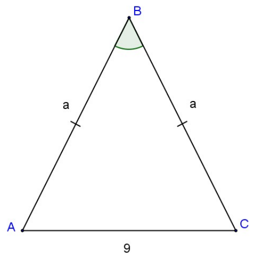
Remdamiesi sinusų teorema, ieškome apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulio:

$$R = \frac{a}{2\sin 30^o},$$
$$R = a = 4\sqrt{13}.$$
$$S_{skritulio} = \pi R^2,$$
$$S_{skritulio} = 208\pi.$$

Ats.: 208π.

62. **Duota:** $AB = BC$ (pažymime a), $AC = 9, \cos\beta = 0{,}28.$

Raskite: S.



Taikome kosinusų teoremą:

$$9^2 = 2a^2 - 2a^2 \cdot 0{,}28,$$

$$a = 7{,}5.$$

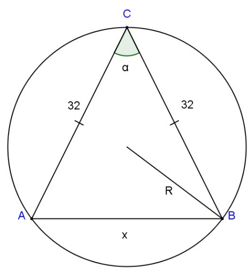
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a^2 \sin B,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 7{,}5^2 \cdot \sqrt{1 - 0{,}28^2} = 27.$$

Ats.: 27.

63. **Duota:** $AC = BC = 32, \cos\alpha = 0{,}28.$

Raskite: R.



Taikome kosinusų teoremą:

$$x^2 = 2 \cdot 32^2 - 2 \cdot 32^2 \cdot 0{,}28,$$

$$x = 38{,}4.$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - 0{,}28^2} = 0{,}96.$$

Taikome sinusų teoremą:

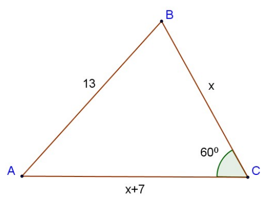
$$R = \frac{x}{2\sin\alpha},$$

$$R = \frac{38{,}4}{2 \cdot 0{,}96} = 20.$$

Ats.: 20.

64. **Duota:** $AB = 13, AC - BC = 7, \angle C = 60^o.$

Raskite: $AC, BC.$



Pažymime: BC = x, AC = x+7.
Taikome kosinusų teoremą:

$$13^2 = x^2 + (x+7)^2 - 2x(x+7) \cdot \frac{1}{2},$$

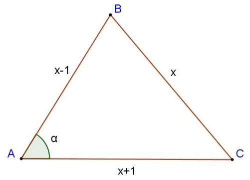
$$x^2 + 7x - 120 = 0,$$

$$x = 8.$$

Ats.: 8; 15.

65. **Duota:** $AB = x, BC = x - 1, AC = x + 1, \cos\alpha = \frac{2}{3}.$

Raskite: P.



Taikome kosinusų teoremą:

$$x^2 = (x-1)^2 + (x+1)^2 - 2(x-1)(x+1)\cdot\frac{2}{3},$$

$$x = \sqrt{10}.$$

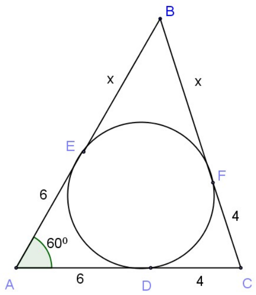
$$P = 3x,$$

$$P = 3\sqrt{10}.$$

Ats.: $P = 3\sqrt{10}.$

66. **Duota:** $\angle A = 60^o, AD = 6, DC = 4.$

Raskite: AB, BC,



Remiamės liestinės teoremos išvada:

$$AD = AE = 6,$$

$$DC = CF = 4,$$

$$BE = BF = x.$$

Taikome kosinusų teoremą:

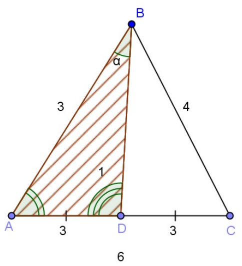
$$(x+4)^2 = (x+6)^2 + 10^2 - 2\cdot 10(x+6)\cos 60^o,$$

$$x = 10.$$

Ats.: 16, 14.

67. **Duota:** $AB = 3, BC = 4, AC = 6, AD = DC.$

Raskite: $\cos\alpha$ **.**



$$AD = \frac{1}{2}AC = 3.$$

Jei AB = AD, tai $\angle 1 = \alpha.$

$$\angle A = 180^o - 2\alpha.$$

Tuomet

Trikampiui ABC taikome kosinusų teoremą:

$$4^2 = 3^2 + 6^2 + 2\cdot 18\cos 2\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{29}{36},$$

$$2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{29}{36},$$

$$\cos^2\alpha = \frac{7}{72},$$

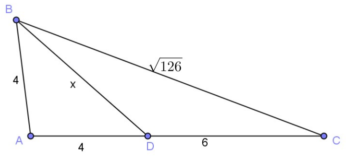
$$\cos\alpha = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{7}{2}}$$

(nes α - smailus kampas).

Ats.: $\frac{1}{6}\sqrt{\frac{7}{2}}$.

68. **Duota:** $AB = 4, BC = \sqrt{126}, AC = 10.$

Įrodykite: ABC galima padalyti į du lygiašonius trikampius.



Atidedame AD = 4, DC = 6.

Įrodysime, kad DC = BD = 6.

BD pažymime x.

Pritaikę kosinusų teoremą trikampiams ABD bei ABC, išreiškiame $\cos\alpha$ ir sulyginame:

$$\frac{4^2+4^2-x^2}{2\cdot 4\cdot 4} = \frac{4^2+10^2-126}{2\cdot 10\cdot 4},$$

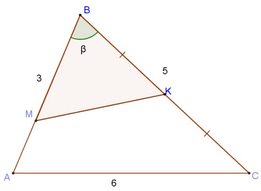
$$x = 6.$$

69. **Duota:** $AB = 3, BC = 5, AC = 6, BM = 2AM, 3BK = 2KC.$

Raskite: MK.

$$MB = \frac{2}{3}AB; MB = 2.$$

$$BK = \frac{2}{5}BC; BK = 2.$$



Trikampiams MBK ir ABC taikome kosinusų teoremą, išreiškiame $\cos\beta$ ir sulyginame:

$$\frac{3^2+5^2-6^2}{2\cdot 3\cdot 5} = \frac{2^2+2^2-MK^2}{2\cdot 2\cdot 2},$$

$$MK^2 = \frac{128}{15},$$

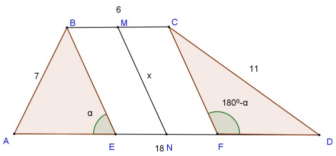
$$MK = 8\sqrt{\frac{2}{15}}.$$

Ats.: $8\sqrt{\frac{2}{15}}$.

70. **Duota:** $BC = 6, AD = 18, AB = 7, CD = 11, BM = MC, AN = ND.$

Raskite: MN.

Brėžiame BE ir CF, lygiagrečias MN.



$$BE = MN = CF = x.$$

Kampą BEA pažymime α, tuomet kampas CFD lygus $(180^o - \alpha)$.

$$BM = MC = EN = NF = 3.$$

$$AE = FD = \frac{1}{2}AD - 3 = 6.$$

Trikampiams ABE ir CFD taikome kosinusų teoremą:

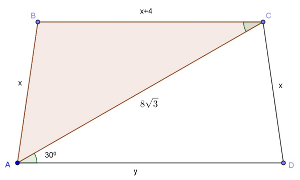
$$+\begin{cases} 7^2 = 6^2 + x^2 - 2\cdot 6\cdot x\cos\alpha, \\ 11^2 = 6^2 + x^2 + 2\cdot 6\cdot x\cos\alpha, \end{cases}.$$

$$121 + 49 = 72 + 2x^2,$$
$$x = 7.$$

Ats.: 7.

71. **Duota:** $AB = BC - 4, AC = 8\sqrt{3}, \angle CAD = 30^o, AB = CD.$

Raskite: AD.



Pažymime:

$$AB = CD = x,$$
$$BC = x + 4.$$
$$AD = y.$$

$\angle BCA = \angle CAD = 30^o.$

Trikampiui ABC taikome kosinusų teoremą:

$$x^2 = (x+4)^2 + (8\sqrt{3})^2 - 2(x+4)8\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$x = 7.$$

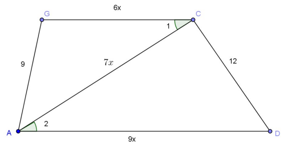
Trikampiui ACD taikome kosinusų teoremą:

$$7^2 = (8\sqrt{3})^2 + y^2 - 2y\cdot 8\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$y^2 - 24y + 143 = 0,$$
$$y = 13.$$

Ats.: 13.

72. **Duota:** $AB = 9, CD = 12, BC : AC : AD = 6 : 7 : 9.$

Raskite: trapecijos vidurio liniją.



Pažymime:

$$BC = 6x,$$
$$AC = 7x,$$
$$AD = 9x.$$

Tuomet vidurio linija lygi:

$$\frac{6x+9x}{2} = 7{,}5x.$$
$$\angle 1 = \angle 2 = \alpha.$$

Trikampiams ABC ir ACD taikome kosinusų teoremą, išreiškiame $\cos\alpha$ ir sulyginame:

$$\frac{36x^2+49x^2-81}{2\cdot 42\cdot x^2} = \frac{48x^2+81x^2-144}{2\cdot 63\cdot x^2},$$
$$x = 3.$$

Vidurio linija lygi 22,5.

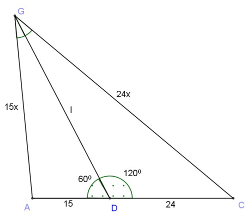
Ats.: 22,5

73. **Duota:** $\angle ABD = \angle DBC, \angle BDA = 60^o, AD = 15, DC = 24.$

Raskite: BD (pažymime *l*).

Taikome pusiaukampinės savybę:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}.$$



Pažymime:

$$AB = 15x,$$
$$BC = 24x.$$

Trikampiams ABD ir BDC taikome kosinusų teoremą:

$$\begin{cases} 225x^2 = l^2 + 15^2 - 2\cdot 15l\cdot\frac{1}{2}, \\ 576x^2 = l^2 + 24^2 + 2\cdot 24l\cdot\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 225(x^2-1) = l(l-15), \\ 576(x^2-1) = l(l+24), \end{cases}$$

$$\frac{225}{576} = \frac{l-15}{l+24},$$

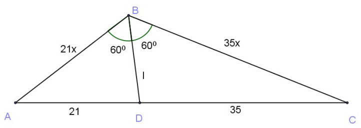
kai $x \neq 1$, tai

$$l = 40.$$

Ats.: 40.

74. **Duota:** $\angle ABD = \angle DBC = 60^o, AD = 21, DC = 35.$

Raskite: AB, BC, BD (pažymime *l*).



Remiamės pusiaukampinės savybe:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}.$$

Pažymime:

$$AB = 21x,\ BC = 35x.$$

Trikampiams ABD ir DBC taikome kosinusų teoremą:

$$\begin{cases} 21^2 = (21x)^2 + l^2 - 21xl, \\ 35^2 = (35x)^2 + l^2 - 35xl; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 441(1 - x^2) = l(l - 21x), \\ 1225(1 - x^2) = l(l - 35x); \end{cases}$$

$$\frac{441}{1225} = \frac{l - 21x}{l - 35x},$$

$$8l = 105x.$$

Taikome pusiaukampinės savybę:

$$l^2 = 21 \cdot 35x^2 - 21 \cdot 35,$$

$$\left(\frac{105}{8}x\right)^2 = 21 \cdot 35x^2 - 21 \cdot 35,$$

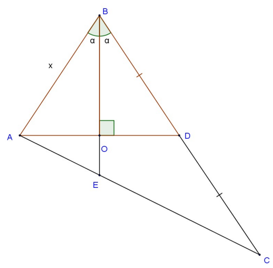
$$x = \frac{8}{7},$$

$$l = 15.$$

Ats.: 15; 24; 40.

75. **Duota:** $\angle ABE = \angle EBC, BD = DC, BE = AD = 4.$

Raskite: AB (pažymime x), BC, AC.



Trikampis ABO lygus trikampiui DBO, tai AO lygi OD ir lygi 2, BD=AB=x, BC=2x.

Pritaikę pusiaukampinės savybę trikampiui ABC, gauname: EC=2AE.

EC ir AE išreiškiame iš trikampių ABE bei BEC, naudodami kosinusų teoremą:

$$AE^2 = x^2 + 16 - 8 \cdot x \cdot \cos\alpha,$$

$$CE^2 = 4x^2 + 16 - 16 \cdot x \cdot \cos\alpha.$$

Kadangi $EC^2 = 4AE^2$, tai:

$$4x^2 + 16 - 16x\cos\alpha = 4x^2 + 64 - 32x\cos\alpha,$$

$$x\cos\alpha = 3.$$

$x\cos\alpha = BO$ (pagal trikampį AOB),

$$BO = 3,$$

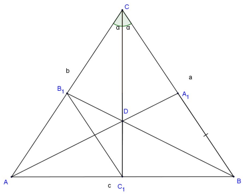
$$OE = 1.$$

Trikampiams ABO ir AEO taikome Pitagoro teoremą:

$$AB = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13};$$

$$AE = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, AC = 3\sqrt{5}.$$

76. **Duota:** AA_1 – pusiaukraštinė, BB_1 – aukštinė, CC_1 – pusiaukampinė.
Raskite ryšį tarp AB, lygios c, AC, lygios b ir BC, lygios a.



AA_1 – pusiaukraštinė, ir taškas D yra joje, todėl C_1B_1 lygiagreti CB.
Trikampiai AB_1C_1 ir ABC panašūs, tai:

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AC_1}{C_1B}.$$

Kadangi $AB_1 = AC - B_1C = b - B_1C$, o pagal pusiaukampinės savybę $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{b}{a}$, tai

$$\frac{b - B_1C}{B_1C} = \frac{b}{a}, B_1C = \frac{ab}{a+b}.$$

Kadangi BB_1 – aukštinė, tai remdamiesi trikampiu BB_1C_1, gauname:

$$\cos c = \frac{B_1C}{a} = \frac{b}{a+b}.$$

Taikome kosinusų teoremą trikampiui ABC:

$$c^2 = a^2 + b^2 - \frac{2ab^2}{a+b}.$$

77. **Duota:** a, b, c.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Raskite:

$$S = \frac{1}{2} ac \sin B.$$

Trikampio plotas

$$\sin^2 B = 1 - \cos^2 B.$$

Remdamiesi kosinusų teorema, gauname:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

$$\sin^2 B = 1 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)^2 = \frac{1}{4a^2c^2}\left(b^2 - (a-c)^2\right)\left((a+c)^2 - b^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4a^2c^2}(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b) =$$

$$= \frac{4}{a^2c^2}\left(\frac{a+b+c-2a}{2} \cdot \frac{a+b+c-2c}{2} \cdot \frac{a+b+c-2b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2}\right) = \frac{4}{a^2c^2}(p-a)(p-b)(p-c)p.$$

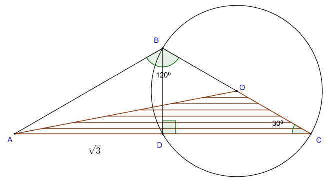
$$S = \frac{1}{2} ac \cdot \frac{2}{ac}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$AB = BC, BO = OC, AD = \sqrt{3}, \angle ABC = 120^o.$$

78. **Duota:**

Raskite: AO.



Kampas BDC įbrėžtinis ir remiasi į skersmenį, todėl kampas BDC lygus 90°.

$$DC = AD = \sqrt{3}.$$

$$\angle C = 30^o.$$

Remdamiesi trikampiu BDC, gauname:

$$BC = \frac{DC}{\cos 30^o} = 2.$$

$$OC = 1.$$

Trikampiui ACO taikome kosinusų teoremą:

$$AO^2 = OC^2 + AC^2 - 2 \cdot OC \cdot AC \cdot \cos 30^o;$$

$$AO^2 = 1 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7,$$

$$AO = \sqrt{7}.$$

$\sqrt{7}.$

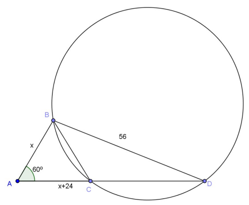
Ats.:

$$BD = 56, AD - AB = 24, \angle A = 60^o.$$

79. **Duota:**

Raskite: BC.

$$AB = x, AD = x + 24.$$



Pažymime:

Trikampiui ABD taikome kosinusų teoremą:

$$56^2 = x^2 + (24 + x)^2 - 2x(24 + x)\cos 60^o,$$

$$x^2 + 24x - 80 \cdot 32 = 0,$$

$$x = 40, x + 24 = 64.$$

$$AB^2 = AD \cdot AC,$$

$$40^2 = 64 \cdot AC,$$

$$AC = 25.$$

Trikampiui ABC taikome kosinusų teoremą:

$$BC^2 = 40^2 + 25^2 - 2 \cdot 40 \cdot 25 \cdot \frac{1}{2},$$

$$BC = 35.$$

35.

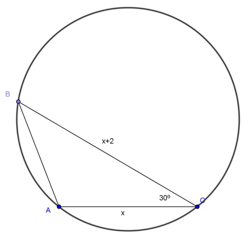
Ats.:

$$BC - AC = 2, \angle C = 30^o, R = 4.$$

80. **Duota:**

Raskite: AB, AC, BC.

Remiamės sinusų teorema: $AB = 2R\sin C$, $AB = 2 \cdot 4 \cdot \sin 30^o = 4$.



Remiamės kosinusų teorema:

$$4^2 = x^2 + (x+2)^2 - 2x(x+2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\left(2-\sqrt{3}\right)x^2 + (4-2\sqrt{3})x - 12 = 0,$$
$$x^2 + 2x - (24+12\sqrt{3}) = 0,$$
$$x = \sqrt{97+48\sqrt{3}} - 1, x+2 = \sqrt{97+48\sqrt{3}} + 1.$$

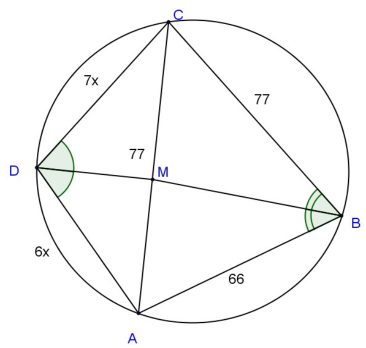
$\sqrt{97+48\sqrt{3}} \pm 1.$

Ats.: 4;

$AB = 66, BC = 77, AC = 77, \angle ADM = \angle MDC, \angle ABM = \angle MBC.$

81. **Duota:**

Raskite: AD, DC.



Trikampiams ADC ir ACB taikome pusiaukampinės savybę:

$$\frac{AD}{DM} = \frac{DC}{MC}; \frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MC}; \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}.$$

Pažymime: AD = 6x, DC = 7x.

Kadangi keturkampis įbrėžtinis, tai:

$$\angle B = 180^o - \angle D, t.y. \cos B = -\cos D.$$

Trikampiams ACD ir ACB taikome kosinusų teoremą:

$$\begin{cases} 77^2 = 36x^2 + 49x^2 - 2\cdot 42x^2\cos D, \\ 77^2 = 66x^2 + 77x^2 + 2\cdot 66\cdot 77\cos D. \end{cases}$$

Išreiškiame cosD ir sulyginame:

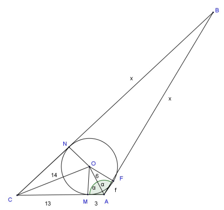
$$\frac{36x^2 + 49x^2 - 77x^2}{84x^2} = -\frac{66}{2\cdot 77},$$
$$x = 7,$$
$$AD = 42, DC = 49.$$

Ats.: 42; 49.

$AC = 16, OA = 6, OC = 14.$

82. **Duota:**

Raskite: AB, BC.



Trikampiui OAC taikome kosinusų teoremą:

$$\cos\alpha = \frac{16^2 + 6^2 - 14^2}{2\cdot 16\cdot 6} = \frac{1}{2},$$
$$\alpha = 60^o.$$

Įbrėžtinio apskritimo centras yra pusiaukampinių susikirtimo taške, tai kampas A lygus 120°.

Remiamės trikampiu OMA:

$$MA = 6\cos 60^o = 3.$$

Tuomet CM lygi 13.

Remiamės liestinės teoremos išvada:

$$MA = AF = 3, CN = CM = 13, BN = BF = x.$$

Taikome kosinusų teoremą trikampiui ABC:

$$(13 + x)^2 = 16^2 + (3 + x)^2 + 2 \cdot 16 \cdot (3 + x) \cdot \frac{1}{2},$$

$$BC = 36 + 13 = 49, AB = 36 + 3 = 39.$$

Ats.: 49; 39.