Lietuvos matematikos mokytojų asociacija

Onutė JABLONSKIENĖ

Viktorija SIČIŪNIENĖ

PLANIMETRIJOS KURSO SISTEMINIMAS

Metodikos etiudai

(3- asis sąsiuvinis)

Vilnius, 1995

UDK 514.1

Ja - 16

Autorės

Onutė Jablonskienė, mokytoja ekspertė,

Viktorija Sičiūnienė, mokytoja ekspertė

Recenzentai

Antanas Apynis, VU docentas,

Milda Vosylienė, PI docentė

ISBN 9986-467-17-9

ISBN 9986-467-20-9

Pratarmė

Leidinyje „Planimetrijos kurso sisteminimas“ (Metodikos etiudai, 3-asis sąsiuvinis) pateikiama 1 - ojo sąsiuvinio 83 – 189 uždavinių sprendimo metodika, metodinės rekomendacijos bei teorinių žinių minimumas, reikalingas racionaliausiam uždavinių sprendimui. Šiame sąsiuvinyje nagrinėjami įbrėžtinių ir apibrėžtinių trikampių bei keturkampių sprendimo būdai, jų ryšys su kitomis planimetrijos kurso temomis.

Autorės

Įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai trikampiai ir keturkampiai

Metodinės rekomendacijos

Jeigu apskritimas įbrėžtas į trikampį, tai:

1. Lietimosi taške liestinė statmena apskritimo spinduliui (liestinės teorema)

Liestinių, nubrėžtų iš vieno taško, atkarpos iki lietimosi taškų yra lygios (liestinės teoremos išvada).
Žr. užd. 66,101, 118, 119, 121 – 125, 287 – 290.
Dažnai patogu naudoti „išlankstymo metodą“, kuris remiasi liestinės teoremos išvada..
Žr. užd.85 – 91.

2. Įbrėžto apskritimo spindulys gali būti apskaičiuojamas pagal formulę: $r = \frac{s}{p}$, čia s – daugiakampio, į kurį įbrėžtas apskritimas, plotas, o p – daugiakampio pusperimetris.

Žr. užd. 23, 25, 33, 83, 93 – 100, 102, 103, 107, 110, 113 – 117, 120, 126, 138.
Dažnai uždavinių sprendimą palengvina formulė: $r = \frac{1}{2}(a + b - c) = p - c$, čia p – stataus trikampio, kurio kraštinės a, b, c, pusperimetris.
Žr. užd. 101 – 112.

3. Įbrėžto į trikampį apskritimo centras yra pusiaukampinių susikirtimo taške.

Žr. užd.9, 127, 142 – 143.
Jei apskritimas įbrėžtas į trikampį, dažnai patogu naudotis pusiaukampinės savybe.
Žr. užd. 244 – 249, 287 – 290.

Jeigu apskritimas apibrėžtas apie trikampį, tai:

Apibrėžto apie trikampį apskritimo centras yra kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas.
Žr. užd. 7, 8.
Sprendžiant uždavinius apie apibrėžtus apie trikampį apskritimus, išskiriami šie atvejai:

1. Jei apskritimas apibrėžtas apie statų trikampį, tai apskritimo centras yra įžambinės vidurio taškas.

Žr. užd. 127 – 134, 194.

2. Jei apskritimas apibrėžtas apie lygiašonį (lygiakraštį) trikampį, tai svarbu, kur yra apskritimo centras: aukštinėje ar jos tęsinyje.

Universalus šio tipo uždavinių sprendimo būdas – pratęsti aukštinę iki apskritimo ir gautą apskritimo tašką sujungti su pagrindo viršūne.
Žr. užd. 135 – 137.

3. Kitais atvejais praverčia formulės apibrėžtinio apskritimo spinduliui apskaičiuoti: $R = \frac{abc}{4S}$, Žr. užd.84, 138 – 141; arba

$R = \frac{a}{2\sin\alpha}$ (sinusų teorema),
Žr. užd. 1, 2, 6 – 9, 15 – 25, 27 – 32, 34, 30, 40, 61, 63, 80.

Jei keturkampis apibrėžtas apie apskritimą, tai priešingų kraštinių sumos yra lygios. Žr. užd. 49 – 51, 179 – 183.

Jei keturkampis įbrėžtas į apskritimą, tai priešingų kampų sumos lygios 180^o.
Žr. užd. 48, 81, 158, 184 – 189.
145 – 151 uždaviniuose apskritimai įbrėžti į rombą,
152 – 157 – naudojami stačiakampiai, 158 – 178 – įbrėžtinės ir apibrėžtinės trapecijos.

Uždavinių sprendimai

83. Lygties $x^2 - 17x + 60 = 0$ sprendiniai yra 5 ir 12. Remiantis Pitagoro teorema, įžambinė = 13. Kadangi $r = \frac{s}{p}$, tai, apskaičiavę trikampio plotą S ir pusperimetrį p, rasime r:

$$S = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30;$$

$$p = \frac{12 + 5 + 13}{30} = 15;$$

$$r = \frac{30}{15} = 2.$$

Ats.: 2.

84. Lygties $x^2 - 14x + 48 = 0$ sprendiniai yra 6 ir 8.

$$R = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4 \cdot 24} = 5.$$

Ats.: 5.

85. **Duota:** p_1, p_2, p_3.

Įrodykite: $p = p_1 + p_2 + p_3$.

Remiantis liestinės teoremos išvada:

$GM = ME, EN = NH, HR = FR, PF = KP, KS = SD, LG = LD$.

Todėl trikampių LBM, NCR, ir PAS perimetrai sudaro trikampio ABC perimetrą, t.y. $p = p_1 + p_2 + p_3$.

86. Žr.85 uždavinį. Pagal sąlygą $p_1 + p_2 + p_3 = 48$. Šoninė kraštinė lygi:

$$(48 - 12) : 12 = 18.$$

Ats.: 18.

87. **Duota:** $r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 4$. C_2C_1 lygiagreti AB, A_1A_2 lygiagreti CB, B_1B_2 lygiagreti AC.

Raskite: r.

$p = p_1 + p_2 + p_3$ (žr. 85 užd.), bet trikampiai AA_1A_2, CC_1C_2, BB_1B_2 ir ABC panašūs, todėl:

$$\begin{cases} \frac{r_1}{r} = \frac{p_1}{p}, \\ \frac{r_2}{r} = \frac{p_2}{p}, \\ \frac{r_3}{r} = \frac{p_3}{p}, \end{cases}$$

$$\frac{r_1 + r_2 + r_3}{r} = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{p}.$$

Kadangi $p_1 + p_2 + p_3 = p$, tai $r = r_1 + r_2 + r_3$ $r = 2+3+4=9$.

Ats.: 9.

88. **Duota:** $AC = 6, CB = 10, AB = 12.$

Raskite: P_{EBD}.

Remiamės liestinės teoremos išvada:

$KE = EL, MD = LD, AR = AM, RC = CK.$

$P_{DBE} = KB + MB = BC + AB - CK - AM = BC + AB - AC$

$P_{DBE} = 10 + 12 - 6 = 16.$

Ats.: 16.

89. **Duota:** $P_{ABC} = 20, A_1B_1$ lygiagreti $AB, A_1B_1 = 2{,}4.$

Raskite: AB.

A_1B_1 lygiagreti AB, todėl trikampiai A_1B_1C ir ABC panašūs:

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C}} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Pažymėję $AL = AM = x, MB = BN = y, CL = CN = z,$ ir panaudoję

liestinės teoremos išvada: $LA_1 = A_1K, KB_1 = B_1N$, gauname:

$P_{ABC} = 2x + 2y + 2z, P_{A_1B_1c_1} = 2z.$

Pagal sąlygą $2x + 2y + 2z = 20,$

$$2z = 20 - 2(x + y).$$

$$\frac{20}{20 - 2(x + y)} = \frac{x + y}{2{,}4},$$

$$(x + y)^2 - 10(x + y) + 24 = 0$$

$AB = x + y = 4$ arba 6.

Ats.: 4 arba 6.

90. **Duota:** $BR = BQ = m, RC = AQ = n$**,** DE lygiagreti AC, FN lygiagreti AB, LM lygiagreti BC.

Raskite: DE, LM.

QD + ER = DE, P_{BDE} = 2m;
QL + PN = FN, P_{ALM} = 2m;
RF + PN = FN, P_{NFC} = 2n;
AQ +RC = AC, P_{ABC} = 2m + 2n;

$$QD + ER = DE, P_{BDE} = 2m;$$

$$QL + PN = FN, P_{ALM} = 2m;$$

$$RF + PN = FN, P_{NFC} = 2n;$$

$$AQ + RC = AC, P_{ABC} = 2m + 4n;$$

Kadangi DE lygiagreti AC, tai trikampiai ALM ir ABC panašūs

$$\frac{DE}{AC} = \frac{P_{BDE}}{P_{ABC}},$$

$$\frac{DE}{m + n} = \frac{2m}{4n + 2m},$$

$$DE = \frac{2mn}{m + 2n}$$

Kadangi LM lygiagreti BC, tai trikampiai ALM ir ABC panašūs.

$$\frac{LM}{BC} = \frac{P_{ALM}}{P_{ABC}},$$
$$\frac{LM}{m+n} = \frac{2n}{4n+2m},$$
$$LM = \frac{n(m+n)}{m+2n}, LM = NF.$$

91. **Duota:** $AC = 63, AB = 39, BC = 60,$ MN lygiagreti AC.

Raskite: S_{AMNC}.

$P_{ABC} = 2x + 2y + 2z = 39 + 60 + 63,$

$x + y + z = 81.$

Kadangi $x + y = AC = 63,$ tai $z = 18.$

$P_{ABC} = 162.$

$P_{BMN} = 2z = 36.$

Remiantis Herono formule

$S_{ABC} = \sqrt{81 \cdot 18 \cdot 21 \cdot 42} = 1134.$

$$\frac{S_{MBN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{P_{MBN}}{P_{ABC}}\right)^2,$$
$$\frac{S_{MBN}}{1134} = \left(\frac{36}{162}\right)^2,$$
$$S_{MBN} = 56.$$
$$S_{AMNC} = S_{ABC} - S_{MBN} = 1134 - 56 = 1078.$$

Ats.: 1078.

92. **Duota:** CD statmena AB, $r_1 = 3, r_2 = 4.$

Raskite: r.

Trikampiai BCD ir ABC panašūs:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{BC}{AB}$$

Trikampiai ACD ir ABC panašūs:

$$\frac{r_2}{r} = \frac{AC}{AB}$$

Abi lygtis pakeliame kvadratu ir sudedame

$$\frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \frac{AC^2 + BC^2}{AB^2}.$$

Pagal Pitagoro teoremą $AC^2 + BC^2 = AB^2$, todėl

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Ats.: r = 5.

93. **Duota:** $BD = n., DA = m.$

Įrodykite: $S = m \cdot n.$

$$BE = BD = n,$$
$$AD = AF = m,$$
$$EC = CF = r.$$
$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC,$$

$$2S = (m + r)(r + n),$$
$$2s = r^2 + r(m + n) + mn,$$
$$2S = r \cdot (r + m + n) + mn$$
$r + m + n = p$ (pusperimetris), $2S = rp + mn, S = rp, S = mn$

94. **Duota:** $AD = 3, BD = 4.$

Raskite: S.

Žr. 93 užd. a) $S = AD \cdot BD, S = 3 \cdot 4 = 12.$

Ats.: 12.

95. **Duota:** $CA = 15, BD = 16.$

Raskite: r.

Tegul DA = x. Taikome geometrinio vidurkio teoremą:

$$15^2 = (16 + x) \cdot x,$$
$$x^2 + 16x - 225 = 0,$$

Įžambinė lygi $x = 9.$

Remiamės Pitagoro teorema: $BC = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20.$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{20 \cdot 15}{25 + 15 + 20} = 5.$$

Ats.: 5.

96. **Duota:** $BD = 16, AD = 9.$

Raskite: $\pi r^2.$

Žr. 95 užd. brėžinį.

Taikome geometrinio vidurkio teoremą: $AC = \sqrt{25 \cdot 9} = 15,$

$$BC = \sqrt{25 \cdot 16} = 20.$$
$$r = \frac{S}{p} = \frac{20 \cdot 15}{25 + 15 + 20} = 5.$$
$$S_0 = \pi r^2 = 25\pi.$$

Ats.: $25\pi.$

97. **Duota:** $AD = h, r.$

Raskite: BC (pažymime x)

$$CL = CM, BD = NB, MA = AN.$$
$$P_{ABC} = 2BC + 2r$$
$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot h}{2} = \frac{r \cdot (2BC + 2r)}{2},$$

$$xh = 2xr + 2r^2,$$

$$x = \frac{2r^2}{h-2r}.$$

Ats.: $\frac{2r^2}{h-2r}.$

98. $\begin{cases} S = pr \\ r = p - c; \end{cases}$ (Žr. 101 užd.)

$$\begin{cases} 24 = pr, \\ r = p - 10. \end{cases}$$

$$24 = (r+10)\cdot r, r = 2.$$

Ats.: $2.$

99. Jei ieškoma trikampio kraštinė – x, tai:

$$S = pr = \frac{x^2\sqrt{3}}{4},$$

$$p = \frac{3}{2}x.$$

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}xr,$$

$$r = \frac{x}{2\sqrt{3}}.$$

Pagal sąlygą $S = \pi r^2$:

$$S = \frac{\pi x^2}{12},$$

$$x = 2\sqrt{3S/\pi}.$$

Ats.: $2\sqrt{3S/\pi}.$

100. Trikampio kraštinė –x.

$$S = \left(x^2\sqrt{3}/4\right)$$

$$x^2 = 4S/\sqrt{3}.$$

$$S = pr,$$

$$S = 3xr/2,$$

$$x = 2S/3r,$$

$$x^2 = 4S^2/9r^2.$$

Sulyginame x^2 išraiškas: $4S/\sqrt{3} = 4S^2/9r^2$,

$r = \frac{\sqrt{S\sqrt{3}}}{3}.$ **Ats.:** $\frac{\sqrt{S\sqrt{3}}}{3}.$

101. **Duota:** a, b, c.

Įrodykite: $r = \frac{1}{2} \cdot (a+b-c) = p-c.$

CKOL – kvadratas, kurio kraštinė lygi r.

$AK = AN = b - r.$

$LB = BN = a - r.$

$c = b - r + a - r$

$r = 1/2 \cdot (a+b-c) = 1/2 \cdot (a+b+c-2c) = p-c.$

Remdamiesi Pitagoro teorema, gauname:

$r = 1/2 \cdot \left(a+b-\sqrt{a^2+b^2}\right).$

102. **Duota:** $c = 6, r = 2.$

Raskite: S

(Žr. 101 užd.) $r = p - c \Rightarrow p = r + c = 8.$

Žinome, kad $S = rp$, todėl:

$S = 2 \cdot 8 = 16.$

Ats.: 16.

103. **Duota:** $S = 60, r = 3.$

Raskite: c.

Žr. 101 užd.

$\begin{cases} r = p - c, \\ S = pr; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = p - c, \\ 60 = p \cdot 3. \end{cases}$

$p = 20.$

$c = 17.$

104. **Duota:** $a + b = 5, c = 3.$

Raskite: a, b.

Žr. 101 užd. D = 2r = a + b – c = 5 – 3 = 2.

Ats.2

105.Duota: r = 2, R = 5.

Raskite: a, b.

Žr. 101 užd.Apibrėžto apskritimo centras yra įžambinės vidurio taškas, todėl $c = 2R = 10.$

$2r = a + b - c,$
$a + b = 14$ (1)

Remiamės Pitagoro teorema:

$a^2 + b^2 = 10^2$ (2)

(1) pakėlę kvadratu ir atėmę (2), gauname: $a \cdot b = 48$(3).

Pritaikę Vieto teoremą (1) ir (3), gauname:

$a = 6, b = 8$

Ats.: 6; 8.

106. **Duota:** $P = 90, r = 4.$

Raskite: a, b.

Žr. 101 užd.

$r = p - c,$

$p = 45,$

$c = p - r = 41.$
$a + b = 49$ (1)
$S = pr = 45 \cdot 4 = 180.$

Iš kitos pusės, $S = \dfrac{a \cdot b}{2} = 180.$ (2)

Iš (1) ir (2) sudarome sistemą:

$$\begin{cases} a + b = 49, \\ a \cdot b = 360. \end{cases}$$

Pagal Vieto teoremą statiniai lygūs 9 ir 40.

Ats.: 9; 40.

107. **Duota:** $P = 24, S_{trikampio} = 24.$

Raskite: $S_{skritulio}.$

Žr. 101 užd.

$p = 12, c = 2R,$ todėl

$$\begin{cases} r = p - c \\ S = pr \Rightarrow r = 24 : 12 = 2. \end{cases}$$

$2 = 12 - 2R,$

$R = 5.$

$S_{skritulio} = \pi R^2 = 25\pi.$

Ats.: $25\pi.$

108. **Duota:** $a = 8, b = 15.$

Raskite: x.

Žr. 101 užd.

$$r = \frac{1}{2}\left(a + b - \sqrt{a^2 + b^2}\right),$$

$$r = \frac{1}{2}\left(8 + 15 - \sqrt{8^2 + 15^2}\right) = 3.$$

$$x = r\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Ats.: $3\sqrt{2}.$

109. **Duota:** $r = \dfrac{b - a}{2}$

Raskite: $\dfrac{b}{a}$

Žr. 101 užd.

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

Pagal sąlygą $r = \dfrac{1}{2}(b - a).$

Sulyginę r, gauname: $a = \dfrac{c}{2}.$

Tuomet kampas A lygus 30^o.

$$\frac{b}{a} = ctg30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ats.: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

110. **Duota:** status trikampis, įžambinė –a, spindulys – r.

Raskite: $S_{trikampio}$

Žr. 101 užd

$r = p - a,$

$p = r + a.$

$S = rp = r(r + a).$

Ats.: $r(r + a).$

111. **Duota:** status trikampis,

Raskite: d.

Žr. 101 užd.

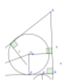
$$r = \frac{1}{2}(a + b - c),$$

$$d = 2r = a + b - c = m - c.$$

Ats.: $m - c.$

112. **Duota:** $r_1 = 1$ **(**įbrėžto į trikampį CDB apskritimo spindulys), $r_2 = 2$ **(**įbrėžto į trikampį CAD apskritimo spindulys).

Raskite: r **(**įbrėžto į trikampį ABC apskritimo spindulį).



Tegul $CD = h, AD = x, BD = c - x.$

Žr. 101 užd.

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c),$$

$$\begin{cases} r_2 = \frac{1}{2}(h + x - b), \\ r_1 = \frac{1}{2}(h + c - x - a), \end{cases}$$

$$3 = \frac{1}{2}(2h + c - a - b),$$

$$c - a - b = 2r.$$

Taigi $r = h - 3.$ (1)

Trikampyje CO_1E ir trikampyje CO_2F : $\begin{cases} \frac{r_1}{h-1} = tg\alpha, \\ \frac{r_2}{h-2} = tg(45^o - \alpha); \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{1}{h-1} = tg\alpha, \\ \frac{2}{h-2} = \frac{1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha}; \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{h-2} = \frac{(h-1-1)\cdot(h-1)}{(h-1)\cdot(h-1+1)},$$

$$h^2 - 6h + 4 = 0,$$

$$h = 3 + \sqrt{5}.$$

Įrašę reikšmę į (1), gauname:
$r = 3 + \sqrt{5} - 3 = \sqrt{5}.$

Ats.: $\sqrt{5}.$

113. **Duota:** $AB = 16, OC = 15, P = 200.$

Raskite: S_{AOB}.

Atstumas iki stygos yra atkarpa, statmena stygai: $AO = OB = r.$
Trikampis AOB lygiašonis: $AC = CB = 8.$
Trikampiui OBC taikome Pitagoro teoremą: $r = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17.$
Pusperimetris lygus 100.
$S = rp,$
$S = 1700.$

Ats.: S_{AOB} = 1700.

114. **Duota:** $CD = 48, AC = BC, AB : AC = 4 : 3.$

Raskite: r.

$AB = 4x, AC = BC = 3x, AD = 2x.$
Trikampiui ACD taikome Pitagoro teoremą:
$(3x)^2 - (2x)^2 = 48^2,$
$$x = \frac{48 \cdot \sqrt{5}}{5}.$$
Pusperimetris $p = \frac{10x}{5} = 48 \cdot \sqrt{5}.$
$$S = \frac{4x \cdot 48}{2} = \frac{48 \cdot 2 \cdot 48\sqrt{5}}{5}.$$
$$r = \frac{S}{p} = \frac{2 \cdot 48 \cdot 48\sqrt{5}}{5 \cdot 48 \cdot \sqrt{5}} = 19{,}2.$$

Ats.: 19,2.

115. **Duota:** $AB = 13, BD = 12, OE = 4.$

Raskite: AC ir BC.

Trikampyje ABD kraštinė AD lygi 5.
Tegul DC = y, BC = x.
$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BD}{2} = (5 + y) \cdot 6, \ (1)$$
$$P_{ABC} = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{x + y}{2} + 9,$$
$r = OE = 4.$
$$S = rp = 4 \cdot \left(\frac{x + y}{2} + 9 \right). \ (2)$$
$$(5 + y) \cdot 6 = 4 \cdot \left(\frac{x + y}{2} + 9 \right).$$
Trikampyje BCD:

$$\begin{cases} x = 2y - 3, \\ x^2 = y^2 + 12^2. \end{cases}$$

$(2y-3)^2 - y^2 = 12^2,$

$y^2 - 4y - 45 = 0,$

$y = 9,$ tuomet $x = 15.$

$AC = 14, BC = 15.$

Ats.: 14; 15.

116. **Duota:** Trikampis ABC lygiakraštis, AB = a.
Raskite: visų skritulių plotų sumą.

$$r = \frac{S}{p} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} : \frac{3a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

$$OBA = 30^o,$$

$$BO = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$r_1 = BO_1 \cdot \sin 30^o,$$

$$r_1 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{a\sqrt{3}}{6} - r_1\right)\frac{1}{2} \Rightarrow r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{18}.$$

$$r_2 = BO_2 \cdot \sin 30^o$$

$$r_2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{a\sqrt{3}}{6} - \frac{a\sqrt{3}}{9} - r_2\right)\frac{1}{2} \Rightarrow r_2 = \frac{a\sqrt{3}}{18 \cdot 3}.....,$$

$$\sum S = \pi\left(r^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2 + ...\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{a^2 \cdot 3}{36} + \frac{3 \cdot a^2 \cdot 3}{18^2} + \frac{3 \cdot a^2 \cdot 3}{18^2 \cdot 9} + ...\right) =$$

$$= \pi a^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{81} + ...\right)\right) = \frac{11}{96}\pi a^2.$$

$\frac{1}{9} + \frac{1}{81} + ... = \frac{1}{8}$ (begalinė geometrinė progresija).

Ats.: $\frac{11}{96}\pi a^2.$

117. **Duota:** $AC = 10, AB = 12,$ LE lygiagreti CD, MN lygiagreti CD.
Raskite: AE, EL, AL, MB, MN, NB.

Trikampiui ACD taikome $CD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$

$$S_{ABC} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48,$$

$$P_{ABC} = \frac{10 + 10 + 2}{2} = 16.$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3.$$

$AE = 6 - 3 = 3.$

Kadangi EL – trikampio ADC vidurio linija, tai:

$EL = MN = \frac{1}{2}CD = 4,$

$AL = NB = 5,$

$AE = MB = 3.$

Ats.: 4; 5; 3.

118. **Duota:** $R = 15, r = 6.$

Raskite: AB, AC, BC.

Apibrėžto apskritimo centras yra įžambinės vidurio taškas:

$AB = 2R = 30.$

Pažymėkime

$AN = AK = x,$

$MC = CK = 6,$

$MB = BN = 30 - x.$

$AC = x + 6, CB = 36 - x, AB = 30.$

Taikome Pitagoro teoremą:

$(36 - x)^2 + (6 + x)^2 = 30^2,$

$x^2 - 30x + 216 = 0,$

$x = 12.$

Ats.: Statiniai – 18 ir 24, įžambinė – 30.

119. **Duota:** $r = 3, BC = 10.$

Raskite: R.

Remiamės liestinės teorema ir jos išvada:

$FA = KA = x,$

$FC = EC = 3,$

$BE = BK = 7.$

Remiamės Pitagoro teorema:

$10^2 + (3 + x)^2 = (7 + x)^2,$

$x = 7{,}5.$

Įbrėžto apskritimo centras yra įžambinės vidurio taškas, todėl $R = \frac{1}{2}AB$:

$R = \frac{7 + 7{,}5}{2} = \frac{29}{4}.$

Ats.: $\frac{29}{4}.$

120. **Duota:** $BC = 8, AC = 6.$

Raskite: OO_1.

Apibrėžto apskritimo centras yra įžambinės vidurio taškas, todėl

$R = \frac{1}{2}AB.$

Remiantis Pitagoro teorema, AB = 5.

$r = \frac{S}{p} = \frac{8 \cdot 6}{8+6+10} = 2.$

$EA = 6 - 2 = 4.$

$O_1D = O_1A - DA = O_1A - AE,$

$O_1D = 5 - 4 = 1.$

Trikampiui OO_1D taikome Pitagoro teoremą:

$OO_1 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$

Ats.: $\sqrt{5}.$

121. **Duota:** $AB : BD = 2 : 3, OC = \sqrt{8}.$

Raskite: AC, AB, BC.

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, todėl $r = 2.$

$AE = AD = 2x,$

$FB = BD = 3x,$

$CE = CF = 2.$

Taikome Pitagoro teoremą:

$(2+3x)^2 + (2+2x)^2 = (5x)^2,$

$3x^2 - 5x - 2 = 0,$

$x = 2,$

$BC = 3x + 2 = 8, AC = 2x + 2 = 6,$

$AB = 5x = 10.$

Ats.: 6; 8; 10.

122. **Duota:** $r = 3,$ viena kraštinių lietimosi tašku dalijasi į atkarpas, lygias 4 ir 3.

Raskite: AB, AC, BC.

Remiamės liestinės teoremos išvada: DC = CE.
Bet DO = OE, be to, OD statmena AC. Todėl DBEO – kvadratas, kurio kraštinė lygi 3.
Taigi trikampis ABC status.

$AD = AF = 4, DC = CE = 3, EB = FB = x.$

Trikampiui ABC taikome Pitagoro teoremą:

$7^2 + (3+x)^2 = (x+4)^2,$

$x = 21.$

Ats.: Trikampio kraštinės lygios 7, 24, 25.

123. **Duota:** $R = 2{,}5r.$

Raskite: $\sin \alpha.$

$EC = CF = r,$

$BE = BD = x,$

$AB = 2R = 5r$ (O_1 – AB vidurio taškas)

$AD = AF = 5r - x.$

$BC = x + r, AC = 6r - x, AB = 5r.$

$(x+r)^2 + (6r-x)^2 = (5r)^2,$

$x^2 - 5rx + 6r^2 = 0,$

$x = \frac{5}{2} r \pm \frac{1}{2} r,$

$x_1 = 2r, x_2 = 3r$ (netinka, nes AC ilgesnė už BC).

$\sin \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{6r - x}{5r} = \frac{6r - 2r}{5r} = 0{,}8.$

Ats.: 0,8.

124. **Duota:** $BC = m, OL = r.$

Raskite: AC, AB.

BN pažymime x.

$BM = BN = x,$

$NC = LC = m - x,$

$MA = AL = r.$

$AB^2 + AC^2 = BC^2,$

$(x + r)^2 + (r + m - x)^2 = m^2,$

$x^2 - xm + rm + r^2 = 0,$

$$x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4(rm + r^2)}}{2}$$

$AB = x + r, AC = r + m - x.$

$R = \frac{m}{2}.$

Ats.: $r + m - \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4(rm + r^2)}}{2};$ $r + \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4(rm + r^2)}}{2}; \frac{m}{2}.$

125. **Duota:** $r = 3, BAD = 30^o.$

Raskite: AB, AC.

Brėžiame OE, lygiagrečią AB (E – lietimosi taškas).

Trikampiai ABD ir EBO panašūs, todėl kampas BOE lygus 30°.

Tegul $AB = x, BD = \frac{1}{2} x$ (Statinis prieš 30° kampą).

$OB = \frac{x}{2} - 3, EB = \frac{1}{2} OB = \frac{x}{4} - \frac{3}{2}.$

$AE = AD = x - \left(\frac{x}{4} - \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{4} x + \frac{3}{2}.$

Trikampiui ABD taikome Pitagoro teoremą:

$\left(\frac{3}{4} x + \frac{3}{2} \right)^2 + \left(\frac{x}{2} \right)^2 = x^2 \,|16,$

$(3x + 6)^2 + 4x^2 = 16x^2,$

$(3x + 6)^2 = 12x^2,$

$3x + 6 = 2\sqrt{3} x,$

$$x=\frac{6}{2\sqrt{3}}=\frac{6\left(2\sqrt{3}+3\right)}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-3^2}=4\sqrt{3}+6$$

$$AD=x\cdot\cos 30^o=\frac{x\sqrt{3}}{2},$$

$$AC=x\sqrt{3}=6\sqrt{3}+12.$$

Ats.: $4\sqrt{3}+6; 6\sqrt{3}+12.$

126. **Duota:** $BN:NC=CL:LA=AM:MB=1:2, r=6.$

Raskite: ML ir AC.

Tegul $ML=x, AC=y.$

$$S_{MNL}=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$P_{MNL}=\frac{3}{2}x \text{ (pusperimetris).}$$

$$r=\frac{S}{p}=\frac{x}{2\sqrt{3}}.$$

$r=6, x=12\sqrt{3}.$

Kadangi $BN=\frac{1}{2}MB, \angle B=60^o$, $\angle NML=60^o$, tai $\angle BMN=30^0$ ir $\angle BNM=90^o$, t.y.

trikampis MNB status: $\left(\frac{2}{3}y\right)^2+\left(\frac{1}{3}y\right)^2=\left(12\sqrt{3}\right)^2,$

$y=36.$

Ats.: $12\sqrt{3}; 36.$

127. **Duota:** $OA=\sqrt{5}, OB=\sqrt{10}.$

Raskite: AC, BC.

$\angle A+\angle B=90^o.$

Jei $\angle KAO=\alpha$ ir O – pusiaukampinių susikirtimo taškas, tai kampas KBO lygus $\left(45^o-\alpha\right).$

Trikampyje AOK $r=\sqrt{5}\sin\alpha,$

trikampyje OKB $r=\sqrt{10}\sin\left(45^o-\alpha\right).$

Sulyginame:

$\sin\alpha=\cos\alpha-\sin\alpha,$

$\cos\alpha=2\sin\alpha,$

$ctg\alpha=2,$

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}, 5=\frac{1}{\sin^2\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

(„-“ netinka, nes α - smailusis kampas).

$$r=\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=1,$$

$AK=\sqrt{5-1}=2$ ir $AC=2+1=3,$

$AB=\sqrt{10-1}=3$ ir $CB=3+1=4.$

Ats.: 3; 4.

128. **Duota:** $\alpha = \beta - \gamma$, kur α, β, γ - trikampio kampai, $AB = 1, S_1 + S_2 = 2S_{skritulio}$.

Raskite: BC (pažymime x).

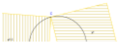
$\alpha = \beta - \gamma \Rightarrow \beta = \alpha + \gamma.$

Bet $\alpha + \gamma = \beta = 180^o$, todėl $2\beta = 180^o$,

$\beta = 90^o$.

Tai trikampis ABC status.

Tegul $\angle A = 90^o, BC = x, AB = 1.$



$S_1 + S_2 = 2S_{skritulio}$, kur S_1, S_2 – kvadratų plotai.

$x^2 + x^2 - 1 = 2\frac{\pi x^2}{4}$, ($R = \frac{x}{2}$ pagal įbr. kampo teoremos išvadą).

$x = \frac{1}{\sqrt{2 - \pi/2}}.$

Ats.: $\frac{1}{\sqrt{2 - \pi/2}}$.

129. **Duota:** $\alpha = \beta - \gamma, AC = 2, S_{ABC} : S_{skritulio} = 1:4.$

Raskite: AB.

$\alpha = \beta - \gamma \Rightarrow \beta = \alpha + \gamma.$

Bet $\alpha + \gamma + \beta = 180^o$, todėl $\beta = 90^o$, trikampis ABC status.

Apibrėžto skritulio centras – įžambinės vidurio taškas, todėl OA = R, BA = 2R. Taikome Pitagoro teoremą:

$BC = \sqrt{4R^2 - 4} = 2\sqrt{R^2 - 1}.$

$\frac{S_{ABC}}{S_{skritulio}} = \frac{1}{4},$

$\frac{2\sqrt{R^2 - 1} \cdot 2}{2 \cdot \pi R^2} = \frac{1}{4},$

$\pi^2 R^4 - 64R^2 + 64 = 0$

$AB = 2R = \frac{4}{\pi}\sqrt{8 \pm 2\sqrt{16 - \pi^2}}.$

Ats.: $\frac{4}{\pi}\sqrt{8 \pm 2\sqrt{16 - \pi^2}}$.

130. **Duota:** $CB = 15, CA = 8,$ CB statmena AC.

Raskite: OB.

Apibrėžto apskritimo centras yra įžambinės vidurio taške, todėl AB = 2R.

$8^2 + 15^2 = AB^2,$

$AB = 17,$

$R = 8{,}5.$

Ats.: 8,5.

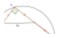
131. **Duota:** $MN = 12,$ AC statmena CB.

Raskite: OA.

Apibrėžto apskritimo centras yra įžambinės vidurio taške, todėl AB = 2R.

MN – trikampio ABC vidurio linija, taiga MN = 12.

Ats.: 12.



132. **Duota:** $\angle C = 90^o, AC = 30, BC = 40.$

Raskite: CO.

Apibrėžto apskritimo centras yra įžambinės vidurio taške. Ieškoma pusiaukraštinė lygi spinduliui, todėl:

$$CO = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}\sqrt{30^2 + 40^2} = 25.$$

Ats.: 25.

133. **Duota:** $S_{apskr.} = S, \angle ABC = 30^0.$

Raskite: $S_{ABC}.$

$$AC = \frac{1}{2} AB = R,$$

$$\angle BAC = 60^o.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin 60^o = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}.$$

Remiamės sąlyga:

$$S_{apskr.} = \pi R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{S}{\pi}.$$

$$S_{ABC} = \frac{S\sqrt{3}}{2\pi}.$$

Ats.: $\frac{S\sqrt{3}}{2\pi}.$

134. **Duota:** $OB = \sqrt{5}, OM = 2 \cdot ON.$

Raskite: BC.

Pažymime ON = x, tai OM = 2x.
ONCM – stačiakampis.
ON yra trikampio ABC vidurinė linija, todėl AC = 2x.
OM yra trikampio ABC vidurinė linija, todėl BC = 4x.
Trikampiui ABC taikome Pitagoro teoremą:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

$$\left(2\sqrt{5}\right)^2 = (2x)^2 + (4x)^2,$$

$$x = 1.$$

$$BC = 4.$$

Ats.: 4.

135. **Duota:** $AC = 12, OD = 1.$

Raskite: R.

a) jei apskritimo centras yra trikampio viduje, tai: CD pratęsiam iki skersmens CE. Sujungiam AE. Kampas CAE lygus 90^o, nes tai įbrėžtinis kampas ir jis remiasi į skersmenį. Trikampiui ACE taikome geometrinio vidurkio teoremą:

$$AC = \sqrt{CE \cdot CD},$$
$$12 = \sqrt{2R \cdot (R+1)},$$
$$R^2 + R - 72 = 0,$$
$$R = 8.$$

b) jei apskritimo centras yra trikampio išorėje, tai $AC = \sqrt{CE \cdot CD},$

$$12 = \sqrt{2R \cdot (R-1)},$$
$$R^2 - R - 72 = 0,$$
$$R = 9.$$

Ats.: 8; 9 .

136. **Duota:** $AB = a, \angle ABC = 120^o.$

Raskite:BD.

Brėžiame BD, DC. Trikampis BCD status, be to, $\angle BDC = 30^o$, nes $\angle CBO = 60^o.$

Taigi BD = 2a.

Ats.: 2a.

137. **Duota:** $BC = a, \angle BAC = 30^o.$

Raskite: $S_{skritulio}$.

Žr. 136 užd. brėžinį.

Praeitam uždavinyje gavome, kad BD = 2a, tai R = a.

$S_{skritulio} = \pi R^2 = \pi a^2.$

Ats.: $\pi a^2.$

138. **Duota:** $r = \frac{3}{2}, R = \frac{25}{8}.$

Raskite: AB, BC (priklauso sveikiems skaičiams).

Tegul $AB = a, AC = BC = b$

$$S_{ABC} = rp = \frac{3}{2} \cdot \frac{a+2b}{2} = \frac{3}{4}(a+2b). \ (1)$$

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot b}{4R} = \frac{2b^2 a}{25}. \ (2)$$

Sulyginam (1) ir (2):

$$\frac{6b+3a}{4} = \frac{2ab^2}{25},$$

$$a = \frac{150b}{8b^2 - 75} = \frac{25 \cdot 6b}{8b^2 - 25 \cdot 3},$$

$b = 5, a = \dfrac{150 \cdot 5}{8 \cdot 25 - 25 \cdot 3} = 6.$

Ats.: 6; 5.

139. **Duota:** $AB = 16, AC = 10.$

Raskite: r, R,O_1O_2.

AD = 8.

Trikampiui ACD taikome Pitagoro teoremą:

$CD = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$

$S_{ABC} = \dfrac{AB \cdot CD}{2}.$

$S_{ABC} = \dfrac{16 \cdot 6}{2} = 48.$

$p = 18.$

$r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{8}{3}.$

$R = \dfrac{AC \cdot CB \cdot AB}{4S_{ABC}},$

$R = \dfrac{25}{3}.$

Trikampiui ADO_2 taikome Pitagoro teoremą:

$DO_2 = \sqrt{AO_2^2 - AD^2},$

$DO_2 = \dfrac{7}{3}.$

$O_1O_2 = O_2D + DO_1 = \dfrac{7}{3} + \dfrac{8}{3} = 5.$

Ats.: $\dfrac{8}{3}, \dfrac{25}{3}, 5.$

140. **Duota:** $AC = 120, BC = 112, AD = 96.$

Raskite: R.

Trikampiui ACD taikome Pitagoro teoremą:

$DC = \sqrt{120^2 - 96^2} = 72.$

$BD = 112 - 72 = 40.$

Trikampiui ABD taikome Pitagoro teoremą:

$AB = \sqrt{96^2 + 40^2} = 104.$

$R = \dfrac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S} = \dfrac{104 \cdot 112 \cdot 120 \cdot 2}{4 \cdot 112 \cdot 96} = 65.$

Ats.: 65.

141. **Duota:** $R = 2, \angle B = 60^o, \angle A = 45^o.$

Raskite: S_{ABC}.

Pažymime: BD = a.

$\angle 1 = 30^o$, todėl $BC = 2a, CD = a\sqrt{3}.$

$\angle 2 = 45^o$, todėl $CD = AD = a\sqrt{3}, AC = a\sqrt{6}.$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R};$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot CD}{2},$$

$$\frac{\left(a\sqrt{3}+a\right)\cdot 2a \cdot a\sqrt{6}}{4 \cdot 2} = \frac{\left(a\sqrt{3+a}\right)\left(a\sqrt{3}\right)}{2};$$

$a = \sqrt{2}.$

$$S_{ABC} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot \sqrt{3} \cdot 2}{2} = 3 + \sqrt{3}.$$

Ats.: $3+\sqrt{3}.$

142. **Įrodykite:** $\angle 1 = 90^o + \frac{1}{2}\angle B,$

$\angle 2 = 90^o + \frac{1}{2}\angle C,$

$\angle 3 = 90^o + \frac{1}{2}\angle A.$

Įrodome pirmą lygybę:

$\angle 1 = 180^o - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle C = 180^o - \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = 90^0 + \frac{1}{2}\angle B,$ nes

$\angle A + \angle C = 180^o - \angle B.$

Analogiškai įrodomos ir kitos lygybės.

143. Žr. 142 uždavinį.

$126^o = 90^o + \frac{1}{2}\angle A \Rightarrow \angle A = 72^o.$

$102^o = 90^o + \frac{1}{2}\angle B \Rightarrow \angle B = 24^o.$

$\angle C = 180^o - \angle A - \angle B \Rightarrow \angle C = 84^o.$

Ats.: $72^o; 24^o; 84^o.$

144. **Duota:** spindulys yra lygties $2\sqrt{3} - 3 = x^2$ šaknis. CD = AC (pažymime a).

Raskite: a.

Randam trikampio ABC kraštinę CB:

$CB = a \cdot \cos 30^o = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0,$

$\left(x - \sqrt{3}\right)^2 = 0,$

$x = \sqrt{3}$, taigi radome spindulį.

$$a = \frac{2 \cdot CB}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4.$$

Ats.: 4.

145. Žr. 144 brėžinį. Rombo įstrižainė lygi 2r, todėl rombo plotas lygus 2ar.
Ats.: 2ar.

146. **Duota:** Du lygūs lygiakraščiai trikampiai ABC ir ADC. r = 2.
Raskite: AB.
Jei rombo kraštinė x, tai:

$$AO = \frac{1}{2}x,$$

$$OB = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{AOB} = \frac{x \cdot r}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Kadangi r = 2, tai $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Ats.: $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

147. **Duota:** $\angle ABC = 30^o, S_{skritulio} = Q.$
Raskite: S_{rombo}.

$$\pi r^2 = Q \Rightarrow r^2 = \frac{Q}{\pi}.$$

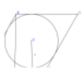
$$AC = 2r,$$

$$AB = 2AC = 4r,$$

$$S_{rombo} = AB \cdot AC = 4r \cdot 2r = 8r^2 = \frac{8Q}{\pi}.$$

Ats.: $\frac{8Q}{\pi}$.

148. **Duota:** $\angle BAM = 60^o, ON = r.$
Raskite: S_{ABCD}.
BM = 2r.
Trikampio ABM kraštinę AB pasižymime x:



$$x = \frac{2r}{\sin 60^o} = \frac{4r}{\sqrt{3}},$$

$$S_{ABCD} = x^2 \cdot \sin 60^o = \frac{16r^2\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{8r^2\sqrt{3}}{3}.$$

Ats.: $\frac{8r^2\sqrt{3}}{3}$.

149. **Duota:** $S_{rombo} = 4S_{kvadrato}$.
Raskite: α.
Tegul rombo kraštinė lygi a, tai rombo plotas lygus $a\sin^2\alpha$.
ED – kvadrato įstrižainė:
$ED = AC = a\sin\alpha$ (remiantis trikampiu ACB).

Kvadrato plotas lygus įstrižainių sandaugos pusei, t.y. $\frac{a^2 \sin^2 \alpha}{2}.$

Remiantis sąlyga: $a^2 \sin\alpha = \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{2} \cdot 4,$

$\sin\alpha = \frac{1}{2}.$

$a = 30^o.$

Ats.: $30^o.$

150. **Duota:** $\angle ABC = 30^o.$

Raskite: $\frac{S_{rombo}}{S_{kvadrato}}.$

$AC = 2r, AB = 2AC = 4r.$

$S_{rombo} = 4r \cdot 2r = 8r^2,$

Kvadrato įstrižainė $MN = 2r,$ o kraštinė - $\sqrt{2}r,$ tai $S_{kvadrato} = 2r^2.$

$\frac{S_{rombo}}{S_{kvadrato}} = \frac{8r^2}{2r^2} = 4.$

Ats.: 4.

151. **Duota:** $P_{staciakampio} = 46, S_{skritulio} = 72{,}25\pi.$

Raskite: $S_{staciakampio}.$

Jei stačiakampio vieną kraštinę pažymėsim x, tai greta esanti lygi (23-x). Apibrėžto skritulio plotas $S = \pi R^2$. Šio skritulio centras – stačiakampio įstrižainių susikirtimo taškas. Remiamės Pitagoro teorema:

$4R^2 = x^2 + (23 - x)^2,$

$S_{skritulio} = \pi R^2 = \frac{\pi}{4}\left(x^2 + (23 \_ x)^2\right) = 72\frac{1}{4}\pi.$

$23x - x^2 = 120,$ o tai ir yra ieškomas stačiakampio plotas.

Ats.:120.

152. **Duota:** $S_{skritulio} = S.$

Raskite: a.

Kvadrato įstrižainė lygi $a\sqrt{2}.$

$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

$S = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2S/\pi}.$

Ats.: $\sqrt{2S/\pi}.$

153. **Duota:** $S_{skritulio} = S, BC = 2AB.$

Raskite: S_{ABCD}.

Jei AB = x, tai BC = 2x.

$AC = x\sqrt{5}.$

$R = \frac{1}{2}AC = \frac{x\sqrt{5}}{2}.$

$S = \pi R^2,$

$S = \frac{\pi x^2 \cdot 5}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{4S}{5\pi}.$

$S_{ABCD} = 2x^2 = \frac{8S}{5p}.$

Ats.: $\frac{8S}{5p}.$

154. **Duota:** BC = a.

Raskite: $CD = 2\pi R.$

Jei $r = \frac{a}{4}$, tai $AB = \frac{a}{2}.$

$AC = \sqrt{a^2 + (a/2)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2},$

$R = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{5}}{4}.$

$C = 2\pi R = \frac{\pi a\sqrt{5}}{2}.$

Ats.: $\frac{\pi a\sqrt{5}}{2}.$

155. **Duota:** $AD = 24, AB = 7.$

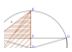
Raskite: BE(pažymim x), AE (pažymim y).

Trikampiui ABD taikome Pitagoro teoremą:

$BD^2 = 7^2 + 24^2,$

$R = 12{,}5.$

$EF = ED - FD = 12{,}5 - 3{,}5 = 9.$



Trikampiui BEF taikome Pitagoro teoremą:

$x = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15,$

$EL = EF + FL = 9 + 7 = 16.$

Trikampiui AEL taikome Pitagoro teoremą:

$y = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20.$

Ats.: 15; 20.

156. **Duota:** $S_{skritulio} - S_{kvadrato} = 2\sqrt{3}(\pi - 2).$

Raskite: $S_6, S_3.$

Tegul kvadrato kraštinė lygi a. Apibrėžto apskritimo spindulys lygus pusei kvadrato įstrižainės, t.y. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$S_{skritulio} = \pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a^2\pi}{2},$$

$$S_{kvadrato} = a^2.$$

$$a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 2\sqrt{3}(\pi - 2) \Rightarrow a^2 = 4\sqrt{3}.$$

$$S_6 = 6 \cdot S_{AOB} = 6\frac{a^2 \sin 60^o}{4} = 9.$$

$$S_3 = S_6 : 2 = 4{,}5.$$

Ats.: 9; 4,5.

157. **Duota:** $OA = R, AD = BC, AB = 2R, \angle A = 60^o.$

Raskite: S.

Trapecija sudaryta iš trijų lygiagrečių trikampių, kurių kiekvieno plotas lygus $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$, todėl trapecijos plotas:

$$S = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

Ats.: $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

158. Kad apie trapeciją būtų galima apibrėžti apskritimą, turi būti tenkinama tokia sąlyga:

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^o.$$

$$\begin{array}{l} \angle A + \angle D = 180^o, \\ - \\ \underline{\angle A + \angle C = 180^o.} \\ \angle D = \angle C \end{array}$$

Trapecija turi būti lygiašonė.

Kad į trapeciją būtų galima įbrėžti apskritimą, turi būti tenkinama tokia sąlyga:

$$AD + BC = AB + DC,$$

$$AD = BC,$$

$$AD = \frac{AB + DC}{2}.$$

Šoninė kraštinė turi būti lygi trapecijos vidurio linijai.

Ats.: Lygiašonė trapecija, kurios šoninė kraštinė lygi trapecijos vidurinei linijai.

159. **Duota:** $r = 1, AB = 3.$

Raskite: $S_{trapecijos}$.

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BE.$

Remiamės apibrėžtinio keturkampio savybe:

$AD + BC = AB + CD = 6.$

$BE = 2r.$

$BE = 2.$

$S = 6.$

Ats.: 6.

160. **Duota:** $BC = 36, AD = 100, AB = CD.$

Raskite: r.

Remdamiesi apibrėžtinio keturkampio savybe, randame šoninę kraštinę AB:

$AB = (100 + 36)/2 = 68.$

$AE = (AD - BC)/2,$

$AE = 32.$

Trikampiui ABE taikome Pitagoro teoremą:

$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2},$

$BE = 2r.$

$r = \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{50 \cdot 18} = 30.$

Ats.: 30.

161. **Duota:** $AD = b, BC = a.$

Raskite: r.

Kadangi apie trapeciją galima apibrėžti apskritimą, tai ji lygiašonė:

$AB = CD,$

$AE = \dfrac{b - a}{2}.$

Kadangi į trapeciją galima įbrėžti apskritimą, tai:

$AB = \dfrac{a + b}{2}.$

Trikampiui ABE taikome Pitagoro teoremą:

$$BE = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

$$r = \frac{1}{2} BE = \frac{\sqrt{ab}}{2}.$$

Ats.: $\dfrac{\sqrt{ab}}{2}.$

162. **Duota:** $r = 4, AB = CD, P_{trapecijos} = 68.$

Raskite: BC, AD.

Kadangi lygiašonė trapecija apibrėžta apie apskritimą, tai šoninių kraštinių suma lygi pagrindų sumai ir lygi $68 : 2 = 34.$
Šoninė kraštinė lygi 17.

$BE = 2r,$

$BE = 8.$

Trikampio ABE kraštinė AE lygi 15. Kadangi trapecija lygiašonė, tai AE = FD.

$AD = AE \cdot 2 + EF.$

Iš kitos pusės, $AD = (34 - BC), EF = BC.$

Sulyginę gauname:

$30 + BC = 34 - BC,$

BC = 2 ir AD = 32.

Ats.: 2; 32.

163. **Duota:** $r, \alpha, AB = CD.$

Raskite: P.

Pažymime:

$AB = CD = c, BC = b, AD = a.$

$h = 2r.$

Taikome apibrėžtinio keturkampio savybę:

$a + b = 2c.$

$P = 4c.$

Trikampio CED kraštinė CD lygi

$$c = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

$$P = \frac{4h}{\sin \alpha} = \frac{8r}{\sin \alpha}.$$

Ats.: $\frac{8r}{\sin \alpha}.$

164. **Duota:** $AB = CD, BC = 3, AD = 6.$

Raskite: $r^2.$

Remiamės apibrėžtinio keturkampio savybe:

$$AB = \frac{3+6}{2} = 4{,}5.$$

$BE = 2r.$

$$AE = \frac{AD - BC}{2} = 1{,}5.$$

Trikampiui ABE taikome Pitagoro teoremą:

$4r^2 = AB^2 - AE^2,$

$4r^2 = 4{,}5^2 - 1{,}5^2,$

$r^2 = 4{,}5.$

Ats.: 4,5.

165. **a)** Tegul BC lygi x.

Remiamės apibrėžtinio keturkampio savybe:

$BC = AD = AB + CD,$

$AD = 10 - x.$

$$AE = \frac{AD - BC}{2} = 5 - x.$$

$ED = AD - AE = 10 - x - 5 + x = 5.$

Taikome Pitagoro teoremą trikampiams ABE ir BDE:

$AB^2 - AE^2 = BD^2 - ED^2,$

$5^2 - (5 - x)^2 = 7^2 - 5^2,$

$x = 4.$

$BC = 4, AD = 6.$

Ats.: 4; 6.

b) Ats.: 8; 12.

c) BE = 15,

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BE,$$

$$255 = \frac{BC + AD}{2} \cdot 15 \Rightarrow BC + AD = 34.$$

Tuomet, remiantis apibrėžtinio keturkampio savybe, šoninė kraštinė lygi 17. Trikampiui ABE taikome Pitagoro teoremą:

$AE = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8,$

$2AE + 2BC = 34.$

$BC = 9, AD = 25.$

Ats.: 9; 25.

d) Ats.: 18; 32.

166. **Duota:** $EC = 10, FD = 24, OD = 13.$

Raskite: AB (h).

Taikome Pitagoro teoremą:

a) trikampiui OAC:

$OA = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12,$

b) trikampiui ODB:

$DB = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$

$h = AO - OB,$

$h = 12 - 5 = 7.$

Ats.: 7.

167. **Duota:** $BK = 12 \cdot \sqrt[4]{3}, \angle BOC = 60^o, AD = BC.$

Raskite: $S_{trapecijos}$.

$\angle 1$ - įbrėžtinis kampas, $\angle BOC$ - centrinis kampas.

Abu jie remiasi į tą patį lanką, todėl $\angle 1 = 30^o$.

Trikampio DBK kraštinė DK lygi:

$DK = BK \cdot ctg 30^o = 12\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3}.$

$$S = \frac{AB + DC}{2} \cdot BK;$$

$$S = \frac{2 \cdot AB + 2x}{2} \cdot BK = (AB + x) \cdot BK = DK \cdot BK;$$

$S = 12\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 12\sqrt[4]{3} = 432.$

Ats.: 432.

168. **Duota:** $S_{ABCD} = S, AD = 2MD.$

Raskite: r.

$$DM = 2r,$$
$$AD = 2DM = 4r,$$
$$BC = AD = 4r.$$

Taikome apibrėžtinio keturkampio savybę:

$AD + BC = DC + AB.$

$AM = NB = 2r\sqrt{3},$ o $AB = a + 4r\sqrt{3}.$

$8r = a + a + 4r\sqrt{3},$

$DC = a = 4r - 2r\sqrt{3},$

$AB = 4r + 2r\sqrt{3}.$

$$S = \frac{4r - 2r\sqrt{3} + 4r + 2r\sqrt{3}}{3} \cdot 2r.$$

$S = 8r^2.$

$$r = \sqrt{\frac{S}{8} \cdot \frac{2}{2}} = \frac{\sqrt{2S}}{4}.$$

Ats.: $\frac{\sqrt{2S}}{4}.$

169. **Duota:** $AB : DC = 12 : 5, DE = 17, DE$ lygi vidurinei linijai.

Raskite: R.

Vidurinė linija lygi 17:

$$\frac{5x + 12x}{2} = 17 \Rightarrow x = 2.$$

Trapecijos pagrindai lygūs 10 ir 24. Skaičiuojant apie trapeciją apibrėžto apskritimo spindulį, remiamasi tuo pačiu metodu, kaip skaičiuojant apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulį.

$$R = \frac{DC \cdot CB \cdot BD}{4S},$$

$DC = 10.$

$$CB = \sqrt{CF^2 + FB^2}, CF = 17, FB = \frac{24 - 10}{2} = 7.$$

$CB = \sqrt{17^2 + 7^2} = 13\sqrt{3}.$

$EB = EF + FB = 10 + 7 = 17.$

Trikampis DEB lygiašonis, status, tai $BD = 17\sqrt{2}.$

$$S_{trikampio} = \frac{DC \cdot CF}{2},$$

$S_{trikampio} = \frac{10 \cdot 17}{2} = 5 \cdot 17.$

$R = \frac{10 \cdot 13\sqrt{2} \cdot 17\sqrt{2}}{4 \cdot 5 \cdot 17} = 13.$

Ats.: 13.

170. **Duota:** $DC = 6, r = 4.$

Raskite: S_{ABCD}.

Kadangi DE = AN = 4, tai

$EC = NF = 6 - 4 = 2.$

$AD = 8 = CF.$

Pažymime: $MB = x, BF = x - 2.$

Trikampiui CBF taikome Pitagoro teoremą:

$8^2 + (x-2)^2 = (x+2)^2,$

$x = 8,$

$AB = 12.$

$S_{ABCD} = \frac{6+12}{2} \cdot 8 = 72.$

Ats.: 72.

171. **Duota:** $OC = 4, OB = 8.$

Raskite: HE.

Įbrėžto apskritimo centras yra pusiaukampinių susikirtimo taške, todėl:

$\frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle B = 90^o.$

Taigi kampas COB status.

$OE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 8^2} = 2\sqrt{5}.$

$HO = OF.$

Trikampiui COB taikome geometrinio vidurkio teoremą:

$OC^2 = CF \cdot CB,$

$16 = CF \cdot 4\sqrt{5},$

$CF = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$

Trikampiui OCF taikome Pitagoro teoremą:

$OF = \sqrt{16 - 16/5} = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$

$HE = HO + OE$

$HE = \frac{8\sqrt{5}}{5} + 2\sqrt{5} = \frac{18\sqrt{5}}{5}.$

Ats.: $\frac{18\sqrt{5}}{5}.$

172. **Duota:** $r, DC = \frac{4}{3}r.$

Raskite: AD, AB, BC.

$DM = AN = r,$

$MC = CK = \frac{1}{3}r,$

$CE = 2r,$

$KB = NB = a,$

$CB = a + \frac{1}{3}r,$

$EB = a - \frac{1}{3}r.$

Trikampiui CEB taikome Pitagoro teoremą:

$(2r)^2 + \left(a - \frac{1}{3}r\right)^2 = \left(a + \frac{1}{3}r\right)^2,$

$a = 3r.$

$AD = 2r, AB = 4r, BC = \frac{10}{3}r.$

Ats.: $2r; 4r; \frac{10}{3}r.$

173. Žr. 172 uždavinio sprendimą.

174. **Duota:** $AB = 20, DC = 12.$

Raskite: AC, BD, CB, AD.

Įbrėžtinio keturkampio priešingų kampų sumos lygios 180°, t.y.

$\angle B + \angle D = 180^o.$

Be to, $\angle A + \angle D = 180^o.$

Todėl kampas A lygus kampui B, t.y. trapecija lygiašonė:

$AC = BD, CB = AD.$

Kampas ABC lygus 90°, nes jis įbrėžtinis ir remiasi į skersmenį.

$EB = (AB - DC)/2,$

$EB = 4.$

$EA = 16.$

Pagal geometrinio vidurkio teoremą:

$CB = \sqrt{AB \cdot EB},$

$CB = \sqrt{20 \cdot 4} = 4\sqrt{5}.$

$AC = \sqrt{AB \cdot AE},$

$AC = \sqrt{20 \cdot 16} = 8\sqrt{5}.$

Ats.: $8\sqrt{5}; 4\sqrt{5}.$

175. **Duota:** $DC = 2, AB = 14, CB = 10.$

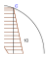
Raskite: R.

Rasti apie trapeciją apibrėžto apskritimo spindulį, tai rasti apibrėžto apie trikampį BDC apskritimo spindulį.

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}.$$

$$EF = 2,$$

$$FB = (14 - 2) : 2 = 6.$$



$$DE = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

$$EB = 8.$$

$$BD = 8\sqrt{2}.$$

$$S_{DBC} = \frac{DC \cdot ED}{2},$$

$$S_{DBC} = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8.$$

$$R = \frac{2 \cdot 10 \cdot 8\sqrt{2}}{4 \cdot 8} = 5\sqrt{2}.$$

Ats.: $5\sqrt{2}.$

176. **Duota:** $AB = CD, MN = 5, S_1 : S_2 = 7 : 13.$

Raskite: h.

Kiekvienos susidariusių trapecijų aukštinė lygi $\frac{h}{2}$.

$$MN = \frac{BC + AD}{2}.$$

Remiamės apibrėžtinio keturkampio savybe:

$$AD = 10 - BC.$$

$$MN = 5.$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{BC + MN}{2} \cdot \frac{h}{2}}{\frac{MN + AD}{2} \cdot \frac{h}{2}},$$

$$\frac{7}{13} = \frac{BC + 5}{15 - BC},$$

$$BC = 2.$$

$$ED = \left(AD - BC\right) : 2,$$

$$ED = 3.$$

Trikampiui CED taikome Pitagoro teoremą;

$$h = \sqrt{25 - 9} = 4.$$

Ats.: 4.

177. **Duota:** $a - b = 14, AB = 15, CD = 13.$

Raskite: $S_{trapecijos.}$

Kadangi EF = BC, tai jei FD = x, tuomet AE = 14 – x.

Taikome Pitagoro teoremą trikampiui ABE: $h^2 = 15^2 - (14 - x)^2$ (1),

Trikampiui CFD: $h^2 = 13^2 - x^2$ (2).

Sulgyginame (1) ir (2):

$13 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$,

$x = 5$.

$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

Remiamės apibrėžtinio keturkampio savybe: a + b = 28,

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BE$,

$S = \dfrac{28 \cdot 12}{2} = 168$.

Ats.: 168.

178. **Duota:** $AB = 15, CD = 13, S = 168$.

Raskite: AD, BC.

Žr. 177 užd. brėž.

Remiamės apibrėžtinio keturkampio savybe:

a + b = 28 (1)

Trapecijos plotas: $\dfrac{a + b}{2} \cdot h = 168$. (2)

(1) įstatę į (2), gausime h = 12.

$AE = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.

$FD = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.

$AD = a = b + 9 + 5 = b + 14$.

Įstatę į (1), gausime:

$2b + 14 = 28 \Rightarrow b = 7$.

Tuomet a =21.

Ats.: 21; 7.

179. **Duota:** $BC = 21, DC = 26, BD = 25, \angle DAB = 90^o$.

Raskite: AD, AB.

Jei AD pažymime x, tai AB išreiškiame taikydami Pitagoro teoremą trikampiui ABD:

$AB = \sqrt{25^2 - x^2}$.

Taikome apibrėžtinio keturkampio savybę:

$x + 21 = 26 + \sqrt{25^2 - x^2}$,

$x = 15$.

$AD = 15$.

$AB = 20$.

Ats.: 15; 20.

180. **Duota:** $DC = 8, BC = 6, S_{keturk.} = 72, r = 4$.

Raskite: x, y.

S = rp, 72 = 4p ⇒ p = 18.

Remiamės apibrėžtinio keturkampio savybe:

x + 8 = y + 6 = 18.

x = 10, y = 12.

Ats.: 10; 12.

181. **Duota:** AB =13, BC = 20, CD = 17, AC = 21.

Raskite: r.

Remiamės apibrėžtinio keturkampio savybe:

$x + 20 = 13 + 17,$

$x = 10.$

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}.$

Naudojamės Herono formule:

$S_{ABC} = \sqrt{27 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 14} = 126,$

$S_{ADC} = \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 7} = 84,$

$S_{ABCD} = 126 + 84 = 210.$

$r = \frac{S}{p},$

$r = \frac{210}{30} = 7.$

Ats.: 7.

182. **Duota:** $AC = 30, BD = 28, r = 10.$

Raskite: $S_{keturkampio}$.

Keturkampio plotas lygus įstrižainių sandaugos pusei:

$\frac{28 \cdot 30}{2} = 420.$

$p = \frac{S}{r}$

$p = \frac{420}{10} = 42.$

Taigi perimetras lygus 84.

Ats.: 84.

183. **Duota:** $AB = AD = x, BC = CD = y, \angle ADC = 90^o, P_{keturk.} = 9{,}8, S_{keturk.} = 5{,}88.$

Raskite: AC.

Keturkampio plotas lygus dvigubam trikampio ABC plotui: xy = 5,88.

Remiantis apibrėžtinio keturkampio savybe, x + y = 4,9.

Sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} xy = 5{,}88; \\ x + y = 4{,}9; \end{cases}$$

$$-\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 24{,}01; \\ 2xy = 11{,}76; \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 12{,}25.$

Trikampiui ABC taikome Pitagoro teoremą:

$AC = \sqrt{x^2 + y^2} = 3{,}5.$

Ats.: 3,5.

184. **Duota:** $\angle A = \angle C = 90^o, \angle D = 120^o, \angle B = 60^o, S_{ABCD} = 9\sqrt{3}$, AC statmena BD.

Raskite: R.

$S_{AOD} = S_{AOB} = S_{OBC} = S_{DOC}$ (pagrindai DO ir OB lygūs, aukštinės AE ir EC lygios).

$S_{AOD} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ (1).

Trikampis AOD lygiakraštis trikampis, kurio kraštinė lygi R, tai

$S_{AOD} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ (2).

(1) = (2),

$R^2 = 9$,

$R = 3$.

Ats.:3.

185. **Duota:** ABCD įbrėžtas į apskritimą, o AC statmena BD.

Įrodykite: $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 = 4R^2$

Brėžiam BO. M sujungiam su A ir D. Kampas BAM status, nes remiasi į skersmenį. Trikampiui ABM taikome Pitagoro teoremą:

$AB^2 + AM^2 = 4R^2$ (1).

Trikampis AND status, todėl:

$\angle 1 + \angle 2 = 90^o$, tai lankas CbD + lankas Aab =180°.

Trikampis AMB status, todėl:

$\angle 3 + \angle 4 = 90^o$, tai lankas Aab + lankas AcM = 180°.

Lankas CbD lygus lankui AcM; AM = CD.

Pertvarkę (1), gauname:

$AB^2 + CD^2 = 4R^2$.

Analogiškai $AD^2 + BC^2 = 4R^2$.

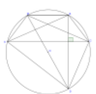
186. **Duota:** ABCD įbrėžtas į apskritimą, AC statmena BD.

Įrodykite: $S = \frac{1}{2}(AD \cdot BC + AB \cdot DC).)$

Remiamės 186 uždaviniu: AM = BC, AB = MC.

$S_{ABCD} = S_{AMCD} = S_{AMD} + S_{DMC} = \frac{1}{2}(AD \cdot AM + DC \cdot MC) =$

$= \frac{1}{2}(AD \cdot BC + DC \cdot AB).$



Šį uždavinį galima spręsti, pasinaudojus Ptolemėjaus teorema:

$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot DC.$

Kadangi AC statmena BD, tai: $AC \cdot BD = 2S.$

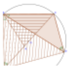
$S = \frac{1}{2}(AD \cdot BC + AB \cdot DC).$

Pst. Ptolemėjaus teorema įrodyta toliau (187 užd.)

187. **Duota:** įbrėžtas keturkampis.

Įrodykite: $AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC.$

Atidedame lygius kampus ABC ir OBC. Trikampis ABK panašus į trikampįBCD, nes kampas ABK lygus kampui OBC; o kampas BAC lygus kampui BDC (remiasi į lanką BC).



$$\frac{AB}{BD}=\frac{AK}{CD},$$

$$AB\cdot CD=BD\cdot AK\ (1)$$

Trikampis BCK panašus į trikampį ABD:

$$\frac{AD}{KC}=\frac{BD}{CD},$$

$$AD\cdot BC=BD\cdot KC\ (2)$$

Sudedame (1) ir (2):

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=BD\cdot (AK+KC).$$

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=BD\cdot AC$$

188. **Duota:** lygiakraštis trikampis ABC.

Įrodykite:MA = MB + MC.

Taikome Ptolemėjaus teoremą:

$$BC\cdot AM=BM\cdot AC+AB\cdot MC \quad :BC$$

$$AC=AB=BC,$$

$$AM=BM+MC.$$

189. **Duota:** įbrėžta lygiašonė trapecija.

Įrodykite: $AC^2=AB\cdot (AD+AB).$

Taikome Ptolemėjaus teoremą:

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD.$$

$$BD=AC$$

$$CD=BC=AB$$

$$AC^2=AB\cdot (AB+AD).$$