LIETUVOS MATEMATIKOS MOKYTOJŲ ASOCIACIJA

O. Jablonskienė

V. Sičiūnienė

Planimetrijos kurso sisteminimas

Metodikos etiudai

(4-asis sąsiuvinis)

Vilnius, 1995

UDK 514.1

Ja-16

Autorės

Onutė Jablonskienė, mokytoja ekspertė.

Viktorija Sičiūnienė, mokytoja ekspertė.

Recenzentai

Antanas Apynis, VU docentas.

Milda Vosylienė, PI docentė

ISBN 9986-467-18-7

ISBN 9986-467-20-9

Pratarmė

*Leidinyje „Planimetrijos kurso sisteminimas“ (*Metodikos etiudai, *4-asis sąsiuvinis)* pateikiama *1-ojo sąsiuvinio 190–309 uždavinių sprendimo racionaliausieji būdai. Metodinėse rekomendacijose rasite svarbiausias teoremas ir išvadas, kurios padės suvokti, kodėl būtent toks sprendimo būdas pasirenkamas, be to, padės įžvelgti ryšį tarp atskirų temų, pateiktų kompleksinio turinio uždaviniuose. Šis sąsiuvinis skirtas pusiaukampinės, pusiaukraštinės ir aukštinės savybių praktiniam nagrinėjimui uždaviniuose.*

Autorės

Įvadas

2015 metais „Planimetrijos kurso sisteminimas“ (Metodikos etiudai, 4-asis sąsiuvinis) buvo atnaujintas elektroninėje formoje. Atnaujintame leidinyje ištaisytos klaidos, naujieji brėžiniai yra tikslesni, labiau atitinka uždavinių sąlygoje pateiktą informaciją.

matematikos mokytojas metodininkas A. Apynis

matematikos mokytoja ekspertė V. Bugailiškytė

UŽDAVINIAI SU PUSIAUKRAŠTINĖMIS

Metodinės rekomendacijos

1. *Atkarpa, jungianti trikampio viršūnę su priešais esančios kraštinės vidurio tašku, vadinama pusiaukraštine.*

   Trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške ir dalijasi jame santykiu $2:1$, skaičiuojant nuo viršūnės.

   Žr. užd. 197-202, 213, 215, 216.

2. *Pusiaukraštinių susikirtimo taškas vadinamas sunkio centru.*

   Trikampio pusiaukraštinė dalija trikampio plotą pusiau.

   Žr. užd. 201, 202 ir toliau.

   Trikampio pusiaukraštinės susikirsdamos dalija trikampį į tris arba šešis lygiapločius trikampius.

   Žr. užd. 213, 215, 217-221.

   Pst. Ne tik šiame skyriuje dažnai tenka naudotis trikampio ploto formulėmis:

   a) trikampio plotas lygus pagrindo ir aukštinės sandaugos pusei;

   b) trikampio plotas lygus dviejų kraštinių ir kampo tarp jų sinuso sandaugos pusei;

   c) Herono formule: $S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$, čia p – pusperimetris, a, b, c – trikampio kraštinės; (77 uždavinys).

   d) trikampio plotas lygus įbrėžto į trikampį apskritimo spindulio ir trikampio pusperimetrio sandaugai;

   e) trikampio plotas lygus trikampių kraštinių sandaugos ir keturgubo apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulio santykiui.

3. Jei sąlygoje nurodyta, kad dvi pusiaukraštinės viena kitai statmenos, tai brėžinį reiktų pradėti braižyti nuo statmenų viena kitai pusiaukraštinių, atsižvelgiant į 1 teiginį.

   Žr. užd. 198-202.

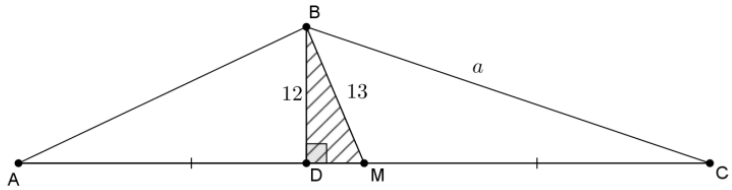
4. Sprendžiant uždavinius su pusiaukraštinėmis, dažnai tenka pusiaukraštinę pratęsti jos ilgiu (žr. užd. 203-212) arba jos ilgio trečdaliu. (žr, užd. 217-220) ir taikyti lygiagretainio savybę: „*lygiagretainio įstrižainių kvadratų suma lygi visų jo kraštinių kvadratų sumai*“. (47 uždavinys)

Uždavinių sprendimai

190. **Duota:** $AC = 60$, $BD = 12$, $AM = MC$, $BM = 13$.

Raskite: BC (pažymėkime a).

Trikampiui BDM taikome Pitagoro teoremą:



$DM = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.

$AM = MC = 30$,

$DC = DM + MC = 35$.

Trikampiui BCD taikome Pitagoro teoremą:

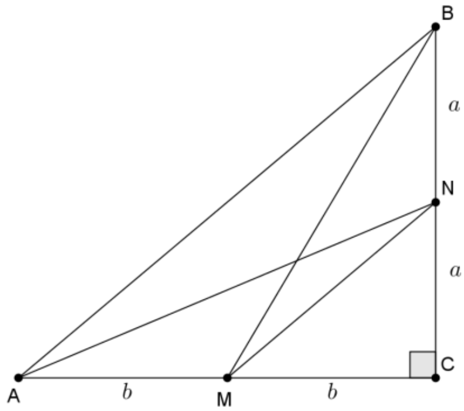
$a = \sqrt{12^2 + 35^2} = 37$.

Ats.: 37.

191. **Duota:** $AM = MC = b$, $CN = NB = a$, $BM = 6$, $AN = 2\sqrt{11}$.

Raskite: MN.

Trikampiams MBC ir ANC taikome Pitagoro teoremą:



$$\begin{cases} b^2 + 4a^2 = 36, \\ 4b^2 + a^2 = 44; \end{cases}$$

$5b^2 + 5a^2 = 80$,

$a^2 + b^2 = 16$.

MN rasime, trikampiui MNC pritaikę Pitagoro teoremą:

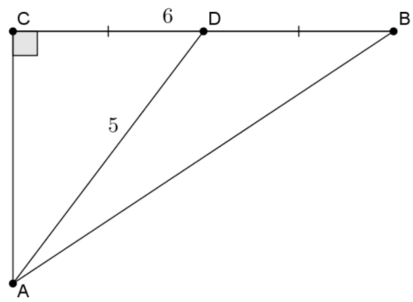
$MN = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16} = 4$.

Ats.: 4.

192. Žr. 191 užd.

193. **Duota:** $CB = 6$, $CD = DB$, $AD = 5$.

Raskite: AB.



$CD = DB = 3$.

Trikampiams ABC bei ADC pritaikę Pitagoro teoremą išreiškiame AC ir sulyginame:

$AB^2 - CB^2 = AD^2 - CD^2$,

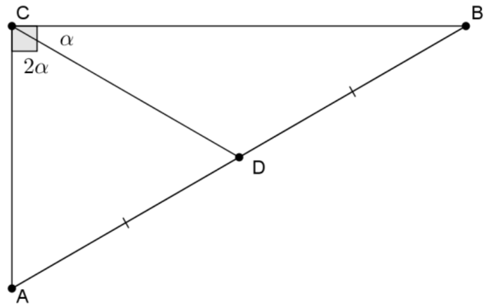
$AB^2 - 6^2 = 5^2 - 3^2$,

$AB = 2\sqrt{13}$.

Ats.: $2\sqrt{13}$.

194. **Duota:** $\angle BCD : \angle DCA = 1:2$.

Raskite: kampus *B* ir *A*.



$\angle BCD = \alpha$, $\angle DCA = 2\alpha$.

$\alpha + 2\alpha = 90^\circ$,

$\alpha = 30^\circ$.

Taškas *D* yra apibrėžto apie trikampį apskritimo centras.

$CD = AD = DB$.

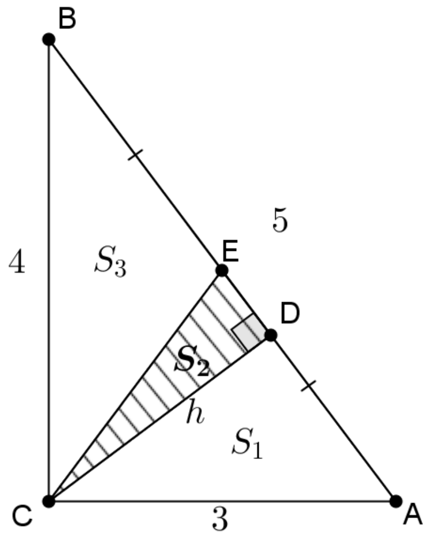
Trikampis *CDB* lygiašonis, o *ACD* lygiakraštis, taigi kampas *B* lygus 30°, o kampas $A - 60^\circ$.

Ats.: 30°, 60°.

195. Žr. 194 užd.

196. **Duota:** $AB = 5$, $BC = 4$, $AC = 3$, *CD* statmena *AB*, $AE = EB$.

Raskite: $S_{ACD} = S_1$, $S_{CDE} = S_2$, $S_{CEB} = S_3$.



Trikampis *ABC* status ($3^2 + 4^2 = 5^2$).

$2S_{ABC} = 3 \cdot 4 = 5 \cdot h$,

$h = 2{,}4$.

Trikampiui *ACD* pritaikome Pitagoro teoremą:

$$AD = \sqrt{3^2 - 2{,}4^2} = 1{,}8.$$

$$DE = \frac{1}{2}AB - AD;$$

$$DE = 2{,}5 - 1{,}8 = 0{,}7.$$

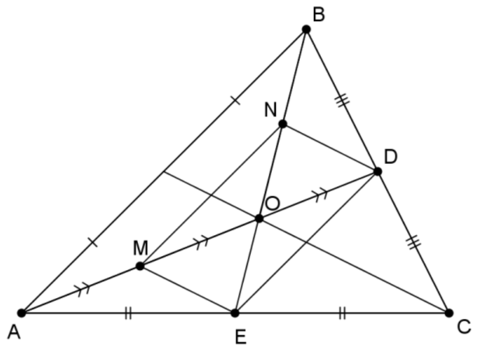
$$S_1 = \frac{1}{2}AD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 1{,}8 \cdot 2{,}4 = 2{,}16.$$

$$S_2 = \frac{1}{2}DE \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 0{,}7 \cdot 2{,}4 = 0{,}84.$$

$$S_3 = \frac{1}{2}EB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}4 = 3.$$

Ats.: 2,16; 0,84; 3.

197. **I būdas:**



Pažymime *AO* vidurio tašką *M* ir *BO* vidurio tašką *N*.

Trikampyje *AOB* *MN* lygiagreti *AB* ir lygi jos pusei.

Trikampyje *ABC* *ED* lygiagreti *AB* ir lygi jos pusei.

Todėl *MN* lygiagreti ir lygi *ED*, o *MNDE* yra lygiagretainis.

$MO = OD = AM$.

O dalija *AD* santykiu $\frac{1}{2}$:

$OA : OD = 2:1$

$BO : OE = 2:1$.

Trečia pusiaukraštinė negali kirsti pirmų dviejų taškuose, kurie skiriasi nuo *O*, nes tada kiekvienoje pusiaukraštinėje būtų du skirtingi taškai, kurie dalytų ją santykiu $2:1$. Tačiau tai neįmanoma.

II būdas:

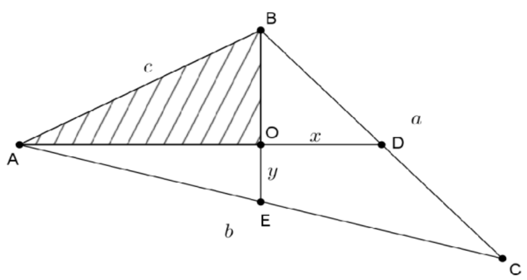
Trikampis *AOB* panašus į trikampį *OED*:

$$\frac{ED}{AB} = \frac{OD}{AO} = \frac{OE}{OB} = \frac{1}{2}.$$

Toliau sprendžiama, kaip ir I atveju.

198. **Duota:** $BC = a$, $AC = b$, $AE = EC$, $BD = DC$, *BE* statmena *AD*.

Raskite: *AB* (pažymim *c*).



Brėžiame tarpusavyje statmenas pusiaukraštines, kurios susikirsdamos dalija vieną kitą santykiu $2:1$.

Pažymime: $OD = x$, $OE = y$.

Trikampiams *AOE* ir *BOD* taikome Pitagoro teoremą:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = \dfrac{b^2}{4}, \\ 4y^2 + x^2 = \dfrac{a^2}{4}; \end{cases}$$

$$5 \cdot \left(x^2 + y^2\right) = \frac{a^2 + b^2}{4} ,$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{20}, (1)$$

Trikampiui *AOB* taikome Pitagoro teoremą:

$$4x^2 + 4y^2 = c^2,$$

$$x^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}. \ (2)$$

Sulyginame (1) ir (2):

$$a^2 + b^2 = 5c^2,$$

$$c = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)}{5}}.$$

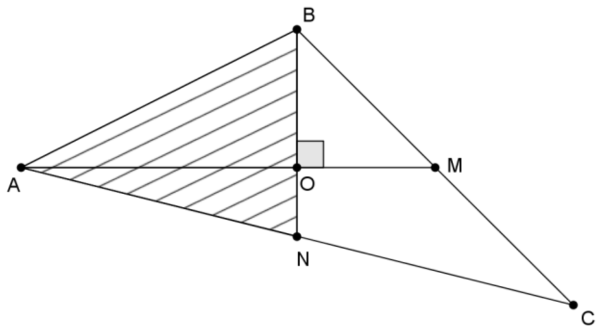
Ats.: $c = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)}{5}}$.

199. Žr. 198 uždavinį.

200. Žr. 198 uždavinį.

201. **Duota:** $BM = MC$, $AN = NC$, $AM = m$, $BN = n$, *AM* statmena *BN*.

Raskite: S_{ABC}.



Brėžiame tarpusavyje statmenas pusiaukraštines, kurios susikirsdamos dalija viena kitą santykiu $2:1$.

$$AO = \frac{2}{3}m.$$

Pusiaukraštinė *BN* trikampio plotą dalija pusiau:

$$S_{ABC} = 2S_{ABN} = 2 \cdot \frac{BN \cdot AO}{2},$$

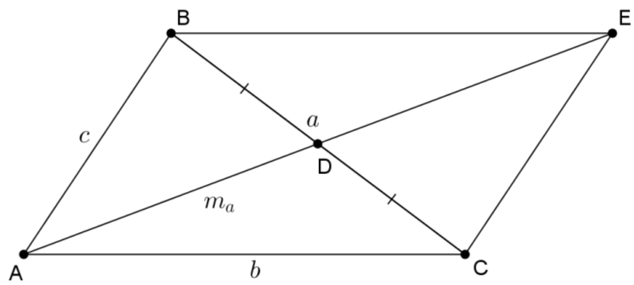
$$S_{ABC} = \frac{2}{3}nm.$$

Ats.: $\frac{2}{3}nm$.

202. Žr. 201 uždavinį.

203. **Duota:** a, b, c, $BD = DC$.

Raskite: m_a.



Pratęsiame: $DE = AD = m_a$.

$ABEC$ yra lygiagretainis, todėl remiamės 47 uždaviniu:

$AE^2 + BC^2 = 2c^2 + 2b^2$,

$4m_a^2 + a^2 = 2c^2 + 2b^2$,

$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}$.

Ats.: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}$.

204. Remiamės 203 uždaviniu:

$m_a^2 = \frac{1}{4}\left(2c^2 + 2b^2 - a^2\right)$,

$m_b^2 = \frac{1}{4}\left(2c^2 + 2a^2 - b^2\right)$,

$m_c^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$,

$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$,

$\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}$.

Ats.: $\frac{3}{4}$.

205. Žr. 203 uždavinį. $m_c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\left(13^2 + 16^2\right) - 11^2} = 13{,}5$.

206. Žr. 203 uždavinio brėžinį.

$BC^2 + AE^2 = 2AB^2 + 2BE^2$,

$4^2 + 6^2 = 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot b^2$,

$b = \sqrt{10}$.

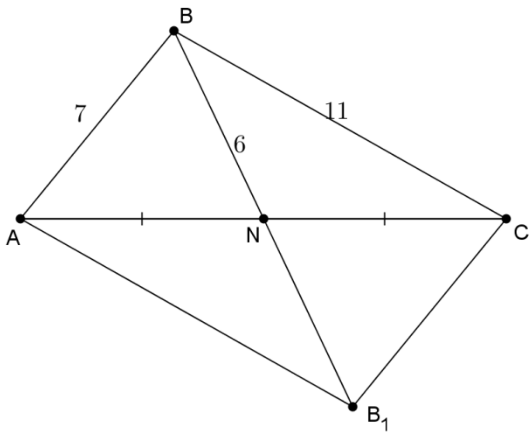
Ats.: $\sqrt{10}$.

207. Žr. 203 uždavinį.

208. **Duota:** $AB = 7$, $BC = 11$, $AN = NC$, $BN = 6$.

Raskite: P_{ABC} ir mažiausio kampo sinusą.

Pratęsiame: $BN = NB_1$.



$ABCB_1$ yra lygiagretainis.

$2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 11^2 = 12^2 + AC^2$,

$AC = 14$.

$P_{ABC} = 7 + 11 + 14 = 32$.

Mažiausias kampas bus *C*. Taikome kosinusų teoremą:

$$\cos C = \frac{11^2 + 14^2 - 7^2}{2 \cdot 11 \cdot 14} = \frac{67}{77}.$$

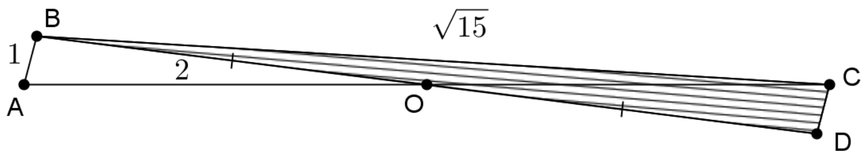
$$\sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{67}{77}\right)^2} = \frac{12\sqrt{10}}{77}.$$

Ats.: 32; $\frac{12\sqrt{10}}{77}$.

209. **Duota:** $AB = 1$, $BC = \sqrt{15}$, $AO = OC$, $BO = 2$.

Raskite: S_{ABC}.

Pratęsiame: $OD = OB$.



$S_{ABC} = S_{BCD}$.

$BD^2 = DC^2 + BC^2$.

Trikampis *BCD* status, todėl $S_{ABC} = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

Ats.: $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

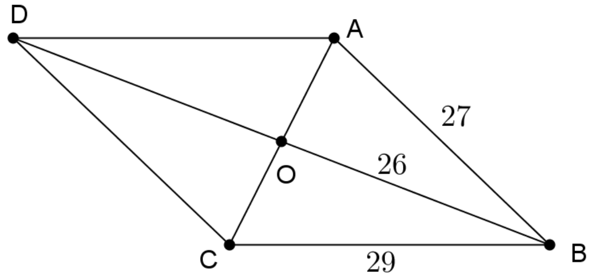
210. **Duota:** $AB = 27$, $BC = 29$, $AO = OC$, $BO = 26$.

Raskite: S_{ABC}.

Pratęsiame: $BO = OD$.

ADCB – lygiagretainis.

Trikampis *ABC* lygus trikampiui *ADC*, todėl $S_{ABC} = S_{BDC}$.



Žinomos visos trikampio *BDC* kraštinės. Plotui apskaičiuoti naudojame Herono formulę (77 uždavinys).

$S = \sqrt{54 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 25} = 270$.

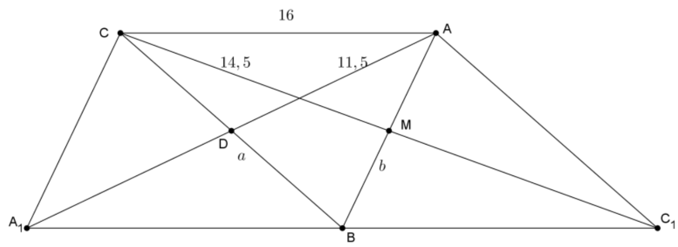
Ats.: 270.

211. **Duota:** $AC = 16$, $BD = DC$, $AD = 11{,}5$, $AM = MB$, $MC = 14{,}5$.

Raskite: *AB* (pažymime *b*), *BC* (pažymime *a*)

Pusiaukraštines *AD* ir *CM* pratęsiame jų ilgius.

ABA_1C ir CBC_1A lygiagretainiai, todėl:



$2 \cdot 16^2 + 2b^2 = a^2 + 23^2$,

$2 \cdot 16^2 + 2a^2 = b^2 + 29^2$.

Išsireiškiame b^2 ir sulyginame:

$$\frac{a^2 + 23^2 - 2 \cdot 16^2}{2} = 2 \cdot 16^2 + 2a^2 - 29^2,$$

$a = 15$,

$b = 11$.

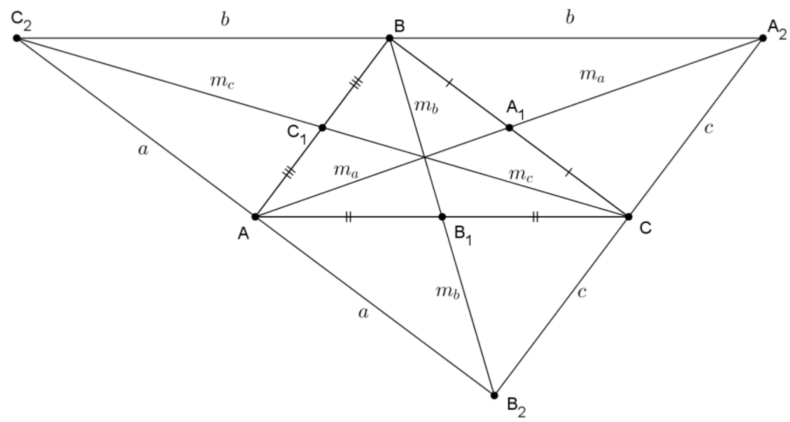
Ats.: 15, 11.

212. **Duota:** $AA_1 = m_a = \sqrt{52}$, $BB_1 = m_b = 5$, $CC_1 = m_c = \sqrt{73}$.

Įrodykite: trikampis *ABC* status.

Trikampio kraštines *AB*, *BC*, *AC* pažymime *c*, *a*, *b*.

Pusiaukraštinių tęsiniuose atidedame jų ilgius ir gauname, kad ABA_2C, $ABCB_2$, $ACBC_2$ yra lygiagretainiai, todėl:



$$+\begin{cases} (2m_a)^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2, \\ (2m_b)^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2, \\ (2m_c)^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2, \end{cases}$$

$a^2 + b^2 + c^2 = 200$.

$a^2 + b^2 = 200 - c^2$,

$a^2 + c^2 = 200 - b^2$,

$b^2 + c^2 = 200 - a^2$.

Įstatę į sistemos lygtis, gausime:

$a = 8$, $b = 10$, $c = 6$.

Kadangi m_a trumpiausia, tai kraštinė *b* ilgiausia.

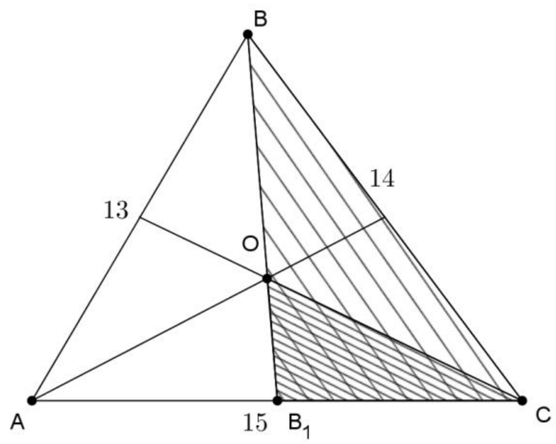
$b^2 = a^2 + c^2$.

Todėl trikampis *ABC* yra status.

213. **Duota:** $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$.

Raskite: S_{OB_1C}, S_{BOC}, S_{BB_1C}.

Trikampių, turinčių tą pačią aukštinę, plotai sutinka kaip pagrindai. Kadangi pusiaukraštinės susikirsdamos dalija viena kitą santykiu $2:1$, tai $S_{BB_1C} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.



$$\frac{S_{OB_1C}}{S_{BB_1C}} = \frac{1}{2},$$

$$S_{OB_1C} = \frac{1}{6} S_{ABC},$$

$$S_{OBC} = \frac{1}{3} S_{ABC}.$$

S_{ABC} skaičiuojame pagal Herono formulę:

$$S_{ABC} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84.$$

$$S_{OB_1C} = \frac{1}{6} \cdot 84 = 14,$$

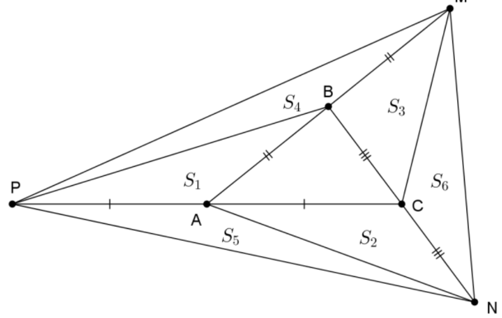
$$S_{BOC} = \frac{1}{3} \cdot 84 = 28,$$

$$S_{BB_1C} = \frac{1}{2} \cdot 84 = 42.$$

Ats.: 14, 28, 42.

214. **Duota:** $S_{ABC} = 4$, $BM = AB$, $CN = BC$, $AP = CA$.

Raskite: S_{MNP}.



$S_1 = S_{ABC} = 4$ (*AB* pusiaukraštinė trikampyje *PBC*),

$S_2 = S_{ABC} = 4$ (*AC* pusiaukraštinė trikampyje *ABN*),

$S_1 = S_4 = 4$ (*PB* pusiaukraštinė trikampyje *APM*),

$S_2 = S_5 = 4$ (*AN* pusiaukraštinė trikampyje *PNC*),

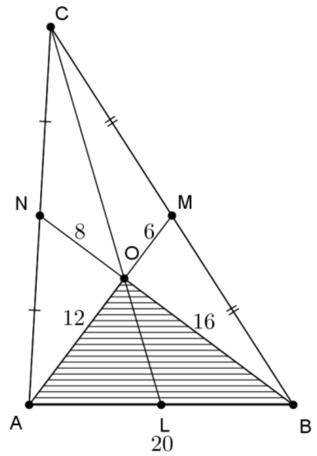
$S_3 = S_6 = 4$ (*MC* pusiaukraštinė trikampyje *BMN*).

$S_{MNP} = 7 \cdot 4 = 28$.

Ats.: 28.

215. **Duota:** $AB = 20$, $AM = 18$, $BN = 24$.

Raskite: S_{ABC}.



$AO : OM = BO : ON = 2 : 1$.

$AO = 12$, $BO = 16$.

$S_{AOB} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC}$ (Žr. 214 užd.)

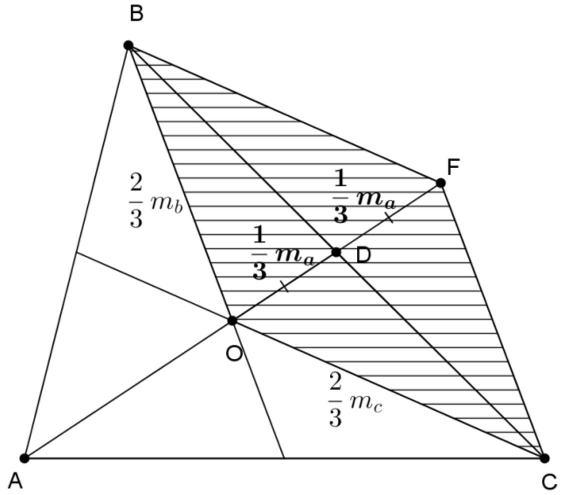
Pagal Herono formulę:

$S_{ABC} = 3S_{ADB} = 3\sqrt{24 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 4} = 288$.

Ats.: 288.

216. **Duota:** m_a, m_b, m_c.

Raskite: *BC* (pažymime *a*).



$AO : OD = 2 : 1$.

Pratęsiame *AD* ilgiu

$DF = OD = \frac{1}{3} \cdot m_a$.

OBFC – lygiagretainis, tai:

$2BO^2 + 2OC^2 = BC^2 + OF^2$,

$2\left(\frac{2}{3} \cdot m_b\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3} \cdot m_c\right)^2 = a^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot m_a\right)^2$,

$a = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2\left(m_b^2 + m_c^2\right) - m_a^2}$.

Ats.: $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{2\left(m_b^2 + m_c^2\right) - m_a^2}$.

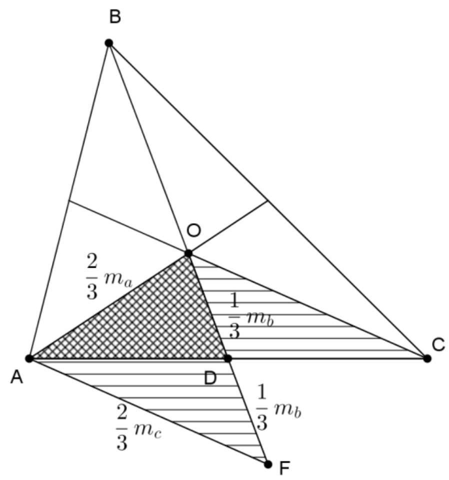
217. **Duota:** m_a, m_b, m_c.

Raskite: S_{ABC}.

Pratęsiame *BD* ilgiu $DF = OD = \frac{1}{3} \cdot m_b$.

$S_{AOF} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC}$,

$S_{ABC} = 3S_{AOF}$.



Trikampio *AOF* kraštinės yra $\frac{2}{3} \cdot m_a$, $\frac{2}{3} \cdot m_b$, $\frac{2}{3} \cdot m_c$, nes pusiaukraštinės susikirsdamos dalija viena kitą santykiu $2:1$.

Trikampio *AOF* plotą apskaičiuojame pagal Herono formulę:

$$S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_c + m_b - m_a)(m_a + m_c - m_b)(m_a + m_b - m_c)}.$$

Ats.: $S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_c + m_b - m_a)(m_a + m_c - m_b)(m_a + m_b - m_c)}$.

218. Žr. 217 uždavinį.

Ats.: 8.

219. Žr. 217 uždavinį.

Ats.: 16.

220. **Duota:** vieno trikampio pusiaukraštinės lygios kito trikampio kraštinėms.

Raskite: tų trikampių plotų santykį.

Žr. 217 uždavinio brėžinį.

Pratęsiam $OD = DF$.

Trikampio *AOF* kraštinės lygios $\frac{2}{3}$ kraštinių ilgių trikampio, sudaryto iš pusiaukraštinių.

$$S_{pusiaukraštinių} = \frac{9}{4} \cdot S_{AFO}.$$

Iš kitos pusės, trikampis *AOF* sudarytas iš dviejų, o trikampis *ABC* – iš šešių lygiapločių trikampių, kurių kiekvieno plotas lygus trikampio *AOD* plotui.

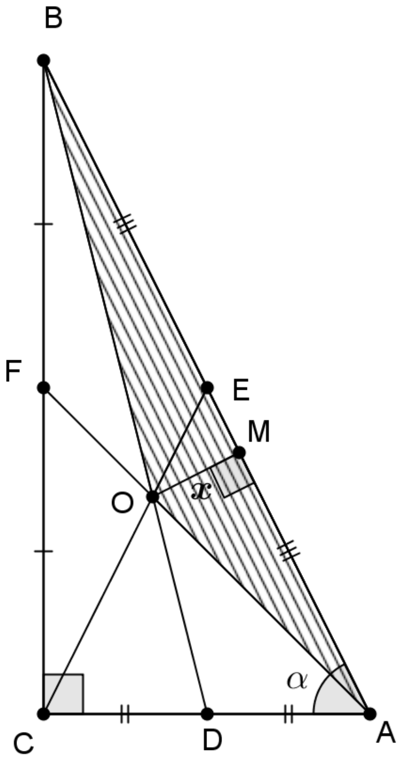
Todėl $S_{AOF} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABC}$.

Tuomet $\frac{S_{pusiaukraštinių}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}$.

Ats.: $\frac{3}{4}$.

221. **Duota:** $S_{ABC} = S$, $\angle A = \alpha$, $BE = EA$, $CD = DA$, $FC = FB$, OM statmena AB.

Raskite: OM (pažymime x).



Iš trikampio ABC:

$BC = AB \cdot \sin\alpha$,

$AC = AB \cdot \cos\alpha$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC = \frac{1}{4} \cdot AB^2 \cdot \sin 2\alpha$.

$AB = 2 \cdot \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}}$.

$S_{AOB} = \frac{AB \cdot OM}{2} = x\sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}}$.

Iš kitos pusės, $S_{AOB} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC}$ (žr. 214 užd.)

$S_{AOB} = \frac{S}{3}$.

Sulyginame S_{AOB} išraiškas:

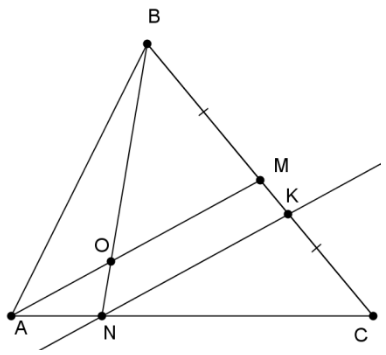
$\frac{S}{3} = x\sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}}$,

$x = \frac{\sqrt{S \cdot \sin 2\alpha}}{3}$.

Ats.: $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{S \cdot \sin 2\alpha}$.

222. **Duota:** $AN : NC = n$, $BM = MC$.

Raskite: $BO : ON$.



Brėžiame NK, lygiagrečią AM.

Trikampis BOM panašus į trikampį BNK ir trikampis NKC panašus į trikampį MCA, todėl:

$\frac{BO}{ON} = \frac{BM}{MK}$ ir $\frac{MC}{MK} = \frac{AC}{AN}$.

$MB = MC$, tai $\frac{AC}{AN} = \frac{1}{n}$.

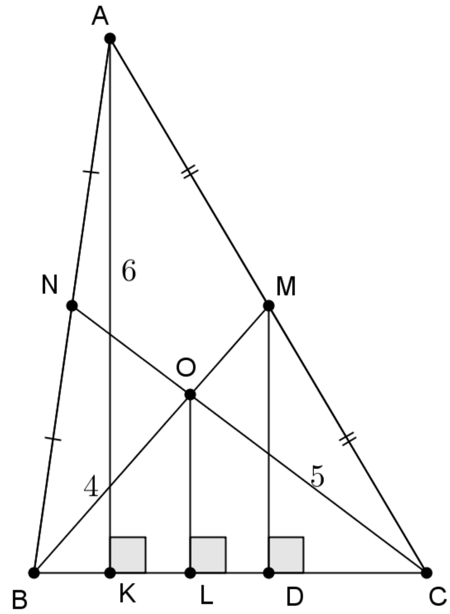
$\frac{BM}{MK} = \frac{MC}{MK} = \frac{1}{n}$.

$\frac{BO}{ON} = \frac{1}{n}$.

Ats.: $BO : ON = 1 : n$.

223. **Duota:** $AM = MC$, $BN = NA$, $BM = 4$, $CN = 5$, $AK = 6$.

Raskite: S_{ABC}.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AK.$$

Brėžiame *MD*, statmeną *BC*; ji lygiagreti *AK*.

Pagal Talio teoremą *MD* – trikampio *AKC* vidurio linija:

$$MD = \frac{1}{2} \cdot AK = 3.$$

Brėžiame *OL*, statmena *BC*. Ji lygiagreti *MD*. Trikampis *BOL* panašus į trikampį *BMD*, nes $\angle MBC$ bendras.

$$\frac{BO}{BM} = \frac{OL}{MD}.$$

Iš čia $OL = 2$, nes $OB = \frac{2}{3} \cdot BM = \frac{8}{3}$.

$$OC = \frac{2}{3} \cdot CN = \frac{10}{3}.$$

$$BC = BL + LC.$$

Trikampio *BOL* kraštinė *BL* lygi $\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

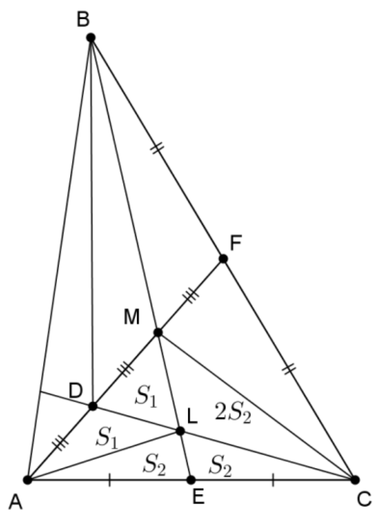
Trikampio *OLC* kraštinė $LC \frac{8}{3}$.

$$BC = \frac{8 + 2\sqrt{7}}{3}.$$

Ats.: $S_{ABC} = 8 + 2\sqrt{7}$.

224. **Duota:** $AE = EC$, $BF = FC$, $AD = DM$.

Raskite: $BL : LE$.



$AD = DM$, $S_{ALD} = S_{DLM} = S_1$,

$AE = EC$, $S_{ALE} = S_{LEC} = S_2$,

$AD = DM$, $S_{MCD} = S_{ADC} = S_1 + 2S_2$,

$$\left.\begin{aligned} S_{ABM} = S_{AMC} = 2S_1 + 4S_2 = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC}, \\ S_{AME} = 2S_1 + S_2 = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC}. \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_1 = S_2 = \frac{1}{18} \cdot S.$$

$$\frac{BL}{LE}=\frac{S_{ABC}}{S_{ALE}}=\frac{2S_1+4S_2+2S_1}{S_2}=\frac{8}{1}.$$

Ats.: $8:1$.

UŽDAVINIAI SU PUSIAUKAMPINĖMIS

Metodinės rekomendacijos

1. *Pusiaukampinė dalija kampą pusiau.*

Pusiaukampinės susikerta viename taške, kuris yra įbrėžto į trikampį apskritimo centras.

2. *Trikampio kampo pusiaukampinė dalija kraštinę į atkarpas, proporcingas kampą sudarančioms kraštinėms.* Žr. užd. 229-249, 250-295.
3. *Trikampio kampo pusiaukampinės kvadratas lygus kampą sudarančių kraštinių sandaugos ir atkarpų, į kurias pusiaukampinė dalija trečiąją trikampio kraštinę, sandaugų skirtumui.* Žr. užd. 250, 277-286.
4. *Sprendžiant uždavinius su pusiaukampinėmis, dažnai patogu naudoti trikampio ploto formulę* $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$. Žr. užd. 234-236, 291-293.

Uždavinių sprendimai

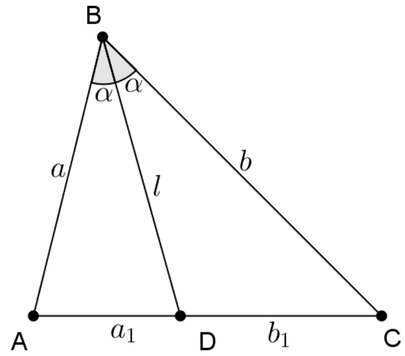
225. **Duota:** $AB = a$, $BC = b$, $AD = a_1$, $DC = b_1$, $BD = l$, $\angle ABD = \angle DBC = \alpha$.

Įrodykite: $l^2 = ab - a_1 b_1$.

Trikampiams *ABD* ir *BDC* pritaikę kosinusų teoremą, išreiškiame $\cos\alpha$ ir sulyginame:

$$\frac{a^2 + l^2 - a_1^2}{2al} = \frac{b^2 + l^2 - b_1^2}{2bl},$$

$$l^2(b-a) = ab(b-a) + \left(a_1^2 b - ab_1^2\right). \quad (1)$$



Taikome pusiaukampinės savybę:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}.$$

$$a = \frac{a_1 b}{b_1}, \; b = \frac{ab_1}{a_1}.$$

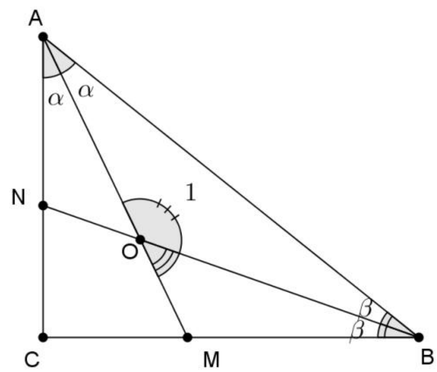
$$a^2 b - ab_1^2 = \frac{a_1^2 ab_1}{a_1} - \frac{a_1 bb_1^2}{b_1} = -a_1 b_1 (b-a).$$

Įstatome į (1) išraišką:

$$l^2 = ab - a_1 b_1.$$

226. **Duota:** $\angle CAM = \angle MAB$ (pažymime α), $\angle ABN = \angle NBC$ (pažymime β).

Raskite: $\angle MOB$ (pažymime *x*).



$\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 90^\circ - 2\alpha$.

$$\beta = \frac{90^\circ - 2\alpha}{2} = 45^\circ - \alpha.$$

Kampas *MOB* yra trikampio *AOB* priekampis:

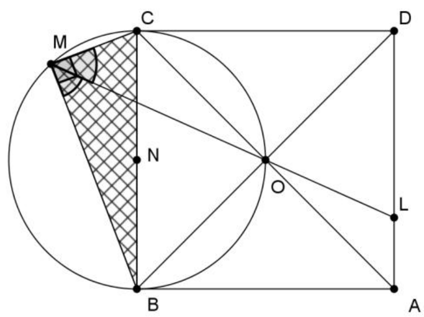
$$\angle MOB = \alpha + 45^\circ - \alpha = 45^\circ.$$

Ats.: 45°.

227. **Duota:** $\angle M$ status, $\angle BMO = \angle OMC$.

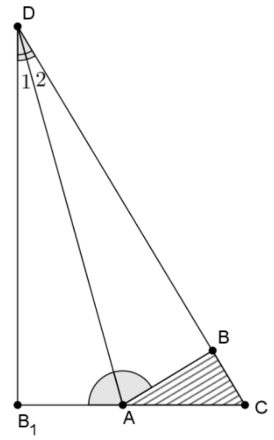
Įrodykite: $S_{ABNL} = S_{NCDL}$.

Apskritimas, apibrėžtas apie trikampį *BMC*, eina per tašką *O*. Kadangi kampai *BMO* ir *OMC* remiasi į lygius lankus *BO* ir *OC* ($BO = OC$), tai *MO* turi eiti per tašką *O*. Todėl jis padalys kvadrato plotą pusiau.



228. **Duota:** $\angle B_1AD = \angle DAB$.

Įrodykite: $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{DC}{AC}$.



Brėžiame $AB_1 = AB$.

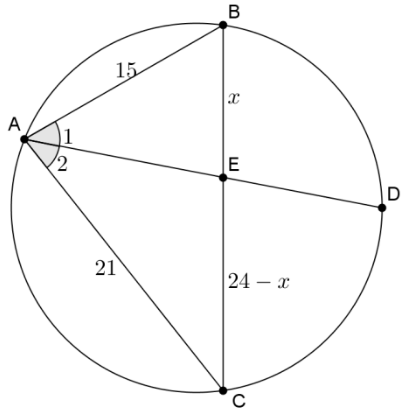
$\angle 1 = \angle 2$.

Taikome pusiaukampinės savybę:

$\dfrac{B_1D}{B_1A} = \dfrac{DC}{AC}$, $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{DC}{AC}$.

229. **Duota:** $AB = 15$, $AC = 21$, $BC = 24$. Lankas *BD* lygus lankui *CD*.

Raskite: *BE*, *EC*.



Kampai 1 ir 2 lygūs, nes jie įbrėžtiniai ir remiasi į lygius lankus.

AE yra trikampio *ABC* pusiaukampinė.

Pažymime: $BE = x$, $EC = 24 - x$.

Taikome pusiaukampinės savybę:

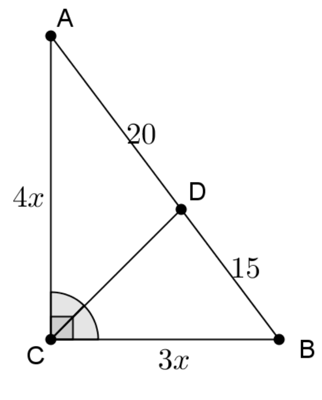
$\dfrac{x}{15} = \dfrac{24 - x}{21}$,

$x = 10$.

Ats.: 10; 14.

230. **Duota:** $AD = 20$, $BD = 15$.

Raskite: *AC*, *BC*.



Taikome pusiaukampinės savybę:

$\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{CB}{BD}$.

Pažymime:

$AC = 4x$,

$BC = 3x$.

Trikampiui *ABC* taikome Pitagoro teoremą:

$AC^2 + CB^2 = AB^2$,

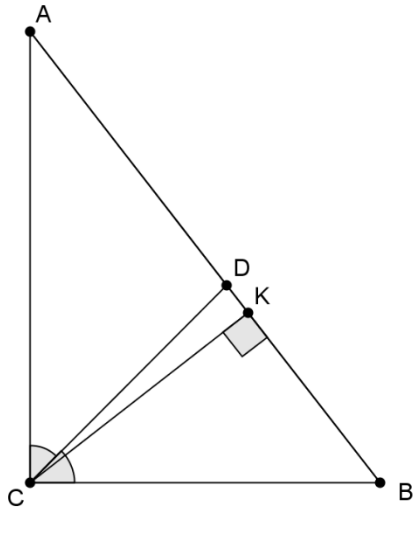
$16x^2 + 9x^2 = 35^2$,

$x = 7$.

Ats.: 28; 21.

231. **Duota:** $\angle ACD = \angle DCB$, $AD : BD = 9 : 7$

Raskite: $KB : KA$.



Taikome geometrinio vidurkio teoremą:

$AC^2 = AB \cdot AK$,

$BC^2 = AB \cdot BK$.

$\frac{BK}{AK} = \frac{BC^2}{AC^2}$ (1).

Taikome pusiaukampinės savybę:

$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD} = \frac{7}{9}$.

Įstatome į (1):

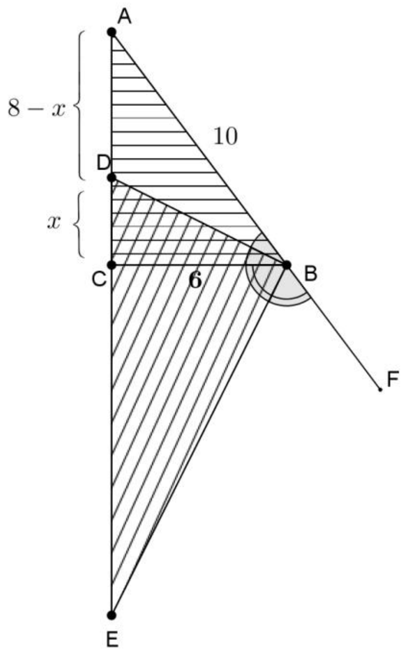
$\frac{BK}{AK} = \frac{7^2}{9^2} = \frac{49}{81}$.

Ats.: $\frac{49}{81}$.

232. **Duota:** $BC = 6$, $AB = 10$, BD, BE – pusiaukampinės.

Raskite: DE.

Trikampiui ABC taikome Pitagoro teoremą:



$AC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Pažymime: $DC = x$, $AD = 8 - x$.

Trikampiui ABC taikome pusiaukampinės savybę:

$\frac{6}{x} = \frac{10}{8 - x}$,

$x = 3$.

$\angle ABF = 80^\circ$, $\angle DBE = 90^\circ$.

Trikampiui DBE taikome geometrinio vidurkio teoremą:

$BC^2 = DC \cdot CE$,

$6^2 = 3 \cdot CE$,

$CE = 12$.

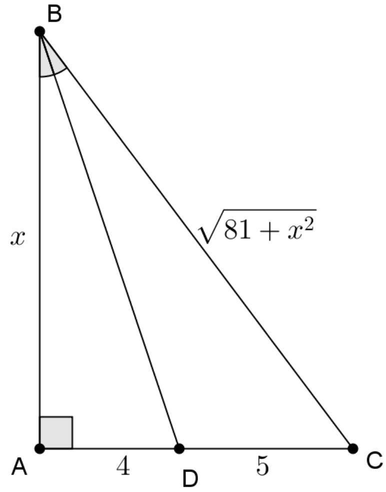
$DE = CD + CE$,

$DE = 15$.

Ats.: 15.

233. **Duota:** $AD = 4$, $DC = 5$, $\angle ABD = \angle DBC$.

Raskite: S_{ABC}.



Pažymime: $AB = x$.

$AC = 9$.

Pritaikę Pitagoro teoremą trikampiui *ABC*, gauname:

$CB = \sqrt{81 + x^2}$.

BD – pusiaukampinė, todėl:

$$\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{5},$$

$x = 12$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54.$$

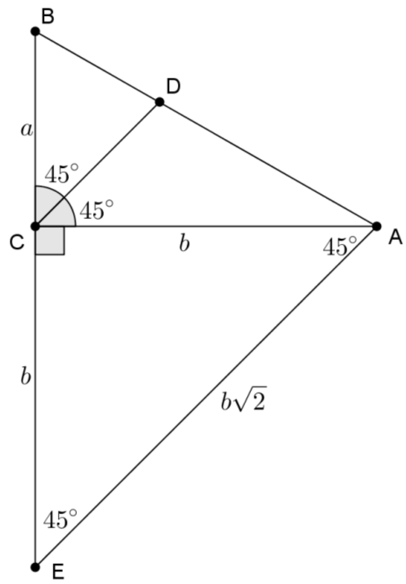
Ats.: 54.

234. **Duota:** $BC = a$, $AC = b$, $\angle BCD = \angle ACD$.

Raskite: *CD*.

I būdas.

BC, pratęsiame atstumu *CE*, lygiu *b*. Trikampis *CAE* yra status ir lygiašonis. *CD* lygiagreti *AE*. Trikampis *BCD* panašus į trikampį *BEA*:



$$\frac{CD}{AE} = \frac{BC}{BE},$$

$$\frac{CD}{b\sqrt{2}} = \frac{a}{a+b},$$

$$CD = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$

II būdas.

$$S_{ABC} = S_{BCD} + S_{DCA},$$

$$\frac{ab}{2} = \frac{1}{2} a \cdot CD \cdot \sin 45^\circ + \frac{1}{2} b \cdot CD \cdot \sin 45^\circ,$$

$$CD = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$

Ats.: $\dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

235. **Duota:** $BC = a$, $AC = b$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle ACD = \angle DCB$.

Raskite: *CD* (pažymime *x*).

I būdas.

Brėžiame *AE*, lygiagrečią *DC*.

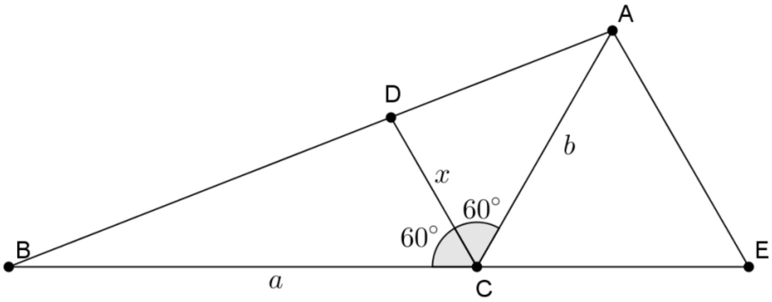
Trikampis *ACE* lygiakraštis.

Trikampis *BCD* panašus į trikampį *BEA*:

$$\frac{CD}{AE} = \frac{BC}{BE},$$

$$\frac{x}{b} = \frac{a}{a+b},$$

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$



II būdas.

$$S_{ABC} = S_{BCD} + S_{ACD},$$

$$\frac{1}{2}ab \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2}a \cdot CD \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2}b \cdot CD \cdot \sin 60^\circ,$$

$$CD = \frac{ab}{a+b}.$$

Ats.: $\dfrac{ab}{a+b}$.

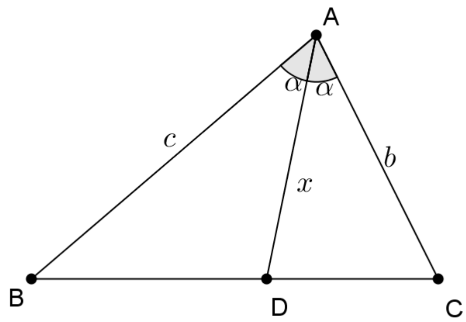
236. **Duota:** $BA = c$, $AC = b$, $\angle BAC = \angle A$.

Raskite: *AD* (pažymime *x*).

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC},$$

$$\frac{1}{2}cb \cdot \sin A = \frac{1}{2}cx \cdot \sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bx \cdot \sin\frac{A}{2},$$

$$x = \frac{2cb \cdot \cos\frac{A}{2}}{c+b}.$$



Ats.: $\dfrac{2cb \cdot \cos\frac{A}{2}}{c+b}$.

237. **Duota:** $BC = 12$, $AC = 20$, *CK* statmena *AB*, *CM*, *CN* – pusiaukampinės.

Raskite: *MN*.

Pagal Pitagoro teoremą $AB = 25$.

$2S_{ABC} = AB \cdot CK = AC \cdot CB$,

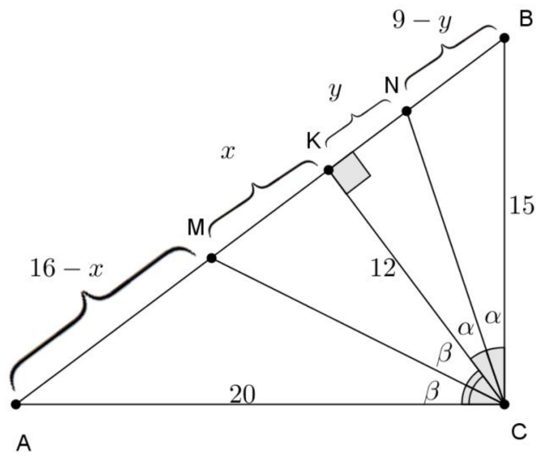
$25 \cdot CK = 20 \cdot 15$,

$CK = 12$.

Trikampiams ACK ir CKB pritaikę Pitagoro teoremą, gauname:

$AK = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$, $KB = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.

Pažymime: $MK = x$, $KN = y$, $AM = 16 - x$, $NB = 9 - y$.



Trikampiams ACK ir CBK taikome pusiaukampinės savybę:

$$\frac{16 - x}{20} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 6.$$

$$\frac{y}{12} = \frac{9 - y}{15} \Rightarrow y = 4.$$

$MN = 4 + 6 = 10$.

Ats.: 10.

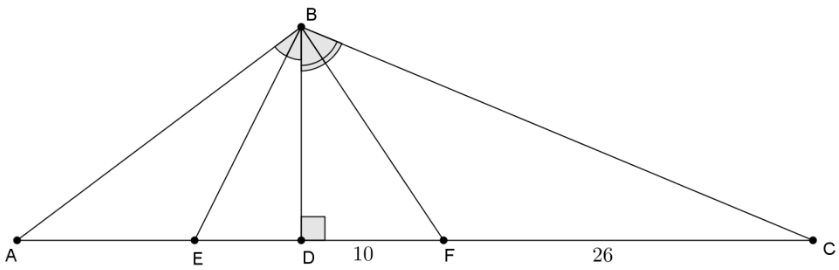
238. **Duota:** BE ir BF – pusiaukampinės, $AE : ED = 5 : 3$, $DF = 10$, $FC = 26$.

Raskite: P_{ABC}.

Trikampiams ABD ir BDC taikome pusiaukampinės savybę:

$$\frac{h}{AB} = \frac{3}{5}, \quad \frac{h}{BC} = \frac{5}{13}.$$

$$h = \frac{3}{5} AB, \quad h = \frac{5}{13} BC.$$



Sulyginame:

$$\frac{3}{5} AB = \frac{5}{13} BC,$$

$$AB = \frac{25}{39} BC.$$

Iš trikampio BDC:

$$BC^2 = BD^2 + 36^2,$$

$$BC^2 - \frac{25}{169} BC^2 = 36^2,$$

$BC = 39$.

$BD = 15$, $AB = 25$, $AD = 20$, $AC = 56$.

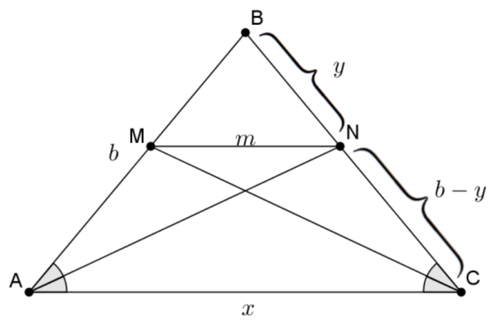
$P_{ABC} = 25 + 39 + 56 = 120$.

Ats.: 120.

239. **Duota:** $AB = BC = b$, $MN = m$.

Raskite: *AC* (pažymime *x*).

Pažymime $BN = y$, $NC = b - y$.



Trikampis *MNB* panašus į trikampį *ABC*:

$$\frac{m}{y} = \frac{x}{b} \Rightarrow mb = xy \ \ (1).$$

Trikampiui *ABC* taikome pusiaukampinės savybę:

$$\frac{AB}{BN} = \frac{AC}{CN},$$

$$\frac{b}{y} = \frac{x}{b - y},$$

$$b^2 - by = xy \ \ (2).$$

Sulyginame (1) ir (2) *xy* reikšmes:

$$mb = b^2 - by,$$

$$y = b - m.$$

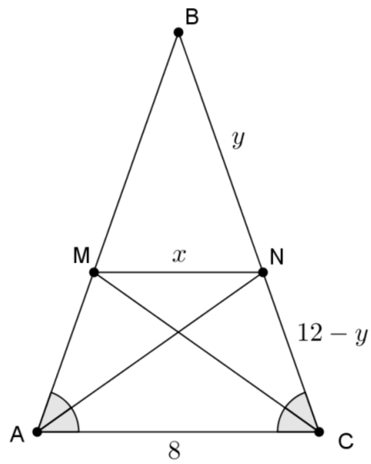
$$x = \frac{mb}{y} = \frac{mb}{b - m}.$$

Ats.: $\frac{mb}{b - m}$.

240. **Duota:** $AC = 8$, $AB = BC = 12$.

Raskite: *MN* (pažymime *x*).

Pažymime $BN = y$, $NC = 12 - y$.



Trikampis *BNM* panašus į trikampį *ABC*:

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{12},$$

$$x = \frac{2}{3} y.$$

Remiamės pusiaukampinės savybe:

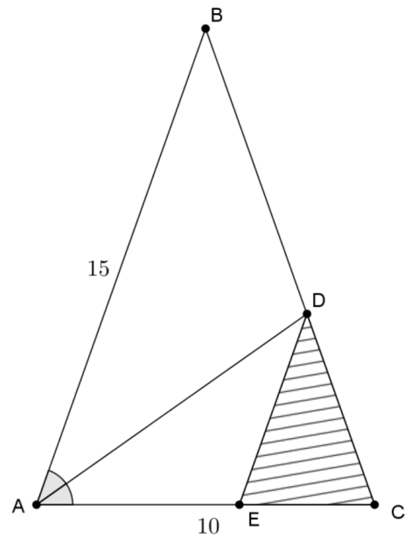
$$\frac{12}{y} = \frac{8}{12 - y} \Rightarrow y = 7{,}2.$$

$$x = 4{,}8.$$

Ats.: 4,8.

241. **Duota:** $AB = 15$, $AC = 10$, $\angle BAD = \angle DAC$, *DE* lygiagreti *AB*.

Raskite: *AE*, *EC*, *DE*.



Remiamės pusiaukampinės savybe:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$$

Trikampis *EDC* panašus į trikampį *ABC*:

$$\frac{DC}{BC} = \frac{DE}{AB},$$

$$\frac{2}{5} = \frac{DE}{15},$$

$$DE = 6.$$

Taikome Talio teoremą:

$$\frac{EC}{AE} = \frac{DC}{BD},$$

$$EC = 2x,$$

$$AE = 3x.$$

$$2x + 3x = 10,$$

$$x = 2.$$

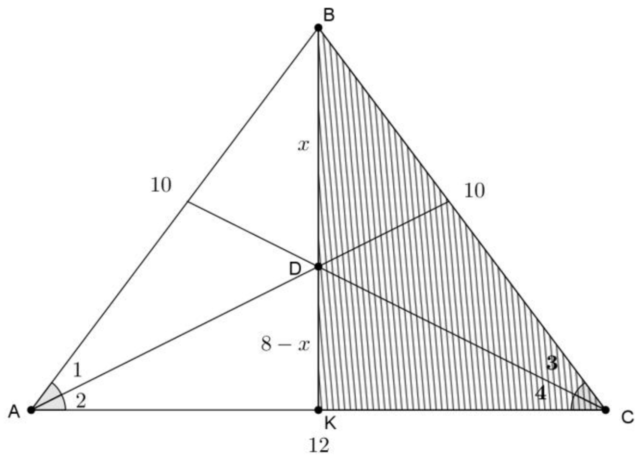
$$EC = 4,$$

$$AE = 6.$$

Ats.: 6; 4; 6.

242. **Duota:** $AB = BC = 10$, $AE = 12$. Kampai 1, 2, 3 ir 4 lygūs.

Raskite: *BD*



$$AK = KC = 6.$$

$$BK = \sqrt{BC^2 - KC^2},$$

$$BK = 8.$$

BD pažymime *x*.

$$KD = 8 - x.$$

Trikampiui *BCK* taikome pusiaukampinės savybę:

$$\frac{x}{10} = \frac{8-x}{6},$$

$$x = 5.$$

Ats.: 5.

243. Žr. 242 uždavinį.

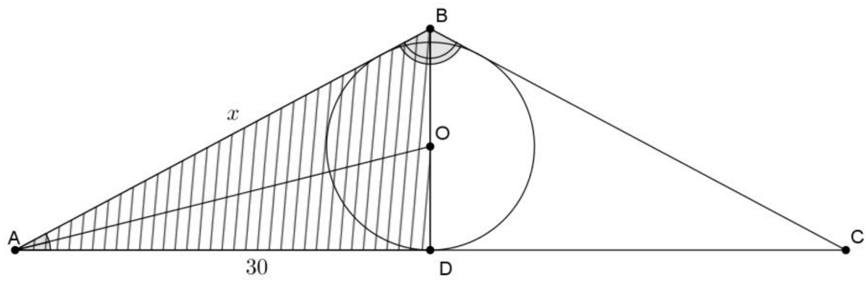
244. **Duota:** $AB = BC$, $AC = 60$, $BO : OD = 17 : 15$.

Raskite: *OD*.

$AB = x$.

Trikampiui *ABD* taikome pusiaukampinės savybę:

$\frac{x}{17} = \frac{30}{15}$,



$x = 34$.

$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2}$;

$BD = 16$.

$OD = 15a$, $OB = 17a$.

$15a + 17a = 16$.

$a = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

$OD = 15 \cdot \frac{1}{2} = 7{,}5$.

Ats.: 7,5.

245. Žr. 244 uždavinio brėžinį.

Pusperimetris lygus 28.

$AB = x$,

$AD = 28 - x$,

$\frac{x}{5} = \frac{28 - x}{2}$,

$x = 20$.

Ats.: 20; 20; 16.

246. Žr. 245 uždavinio brėžinį.

$AD = DC = x$, $BA = 20 - x$.

$BD = h$, $r = 0{,}4 \cdot h$, $OB = 0{,}6 \cdot h$.

$\frac{20 - x}{0{,}6h} = \frac{x}{0{,}4h} \Rightarrow x = 8$.

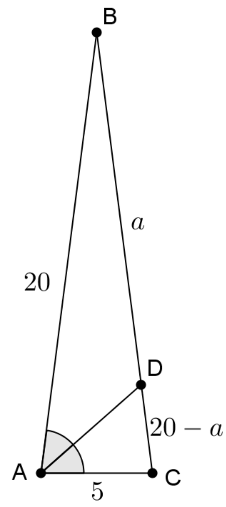
$AC = 16$.

Ats.: 16.

247.-249. Žr. 244 uždavinį (trikampiui *ABD* taikome pusiaukampinės savybę).

250. **Duota:** $AB = BC = 20$, $AC = 5$.

Raskite: pusiaukampinę *AD*.



Pažymime $BD = a$, $DC = 20 - a$,

$\frac{20}{a} = \frac{5}{20-a}$,

$a = 16$.

Taikome pusiaukampinės savybę:

$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$,

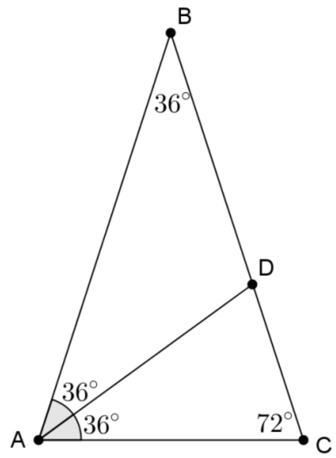
$AD^2 = 20 \cdot 5 - 16 \cdot 4 = 36$.

$AD = 6$.

Ats.: 6.

251. **Duota:** $AD = \sqrt{20}$, $\angle ABC = 36^\circ$, $AB = BC$.

Raskite: *AB*, *BC*, *AC*.



$\angle C = \angle A = 72^\circ$.

$\angle BAD = \angle DAC = 36^\circ$.

$\angle ADC = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$.

$AC = AD = BD = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Taikome pusiaukampinės savybę:

$\frac{AB}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}}{AB - \sqrt{20}}$,

$AB^2 - \sqrt{20} \cdot AB - 20 = 0$,

$AB = 5 + \sqrt{5}$.

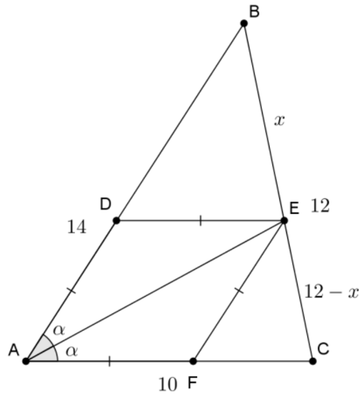
Ats.: $5 + \sqrt{5}$, $5 + \sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$.

252. Žr. 251 uždavinį.

253. **Duota:** *ADEF* – rombas, $AB = 14$, $BC = 12$, $AC = 10$.

Raskite: *BE*, *EC*.

Rombo įstrižainė yra kampo *A* pusiaukampinė, todėl:



$$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{EC},$$

$$\frac{14}{x} = \frac{10}{12 - x},$$

$x = 7$.

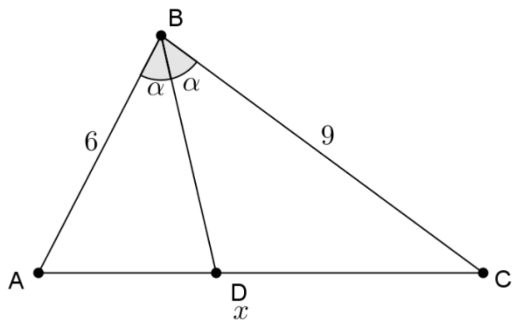
Ats.: 7; 5.

254. **Duota:** $AB = 6$, $BC = 9$, $\angle ABD = \angle DBC$, *AD* arba *DC* lygi 6 arba 9.

Raskite: *AC* (pažymime *x*).

AD nelygi 6 ir *DC* nelygi 9, nes neegzistuoja toks trikampis, remiantis pusiaukampinės savybe.

Jei $AD = 9$, tai



$\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DC}$, t. y. $\dfrac{6}{9} = \dfrac{9}{9 - x}$,

$x < 0$, taigi *AD* negali būti lygi 9.

Todėl $DC = 6$.

$$\frac{6}{x - 6} = \frac{9}{6},$$

$x = 10$.

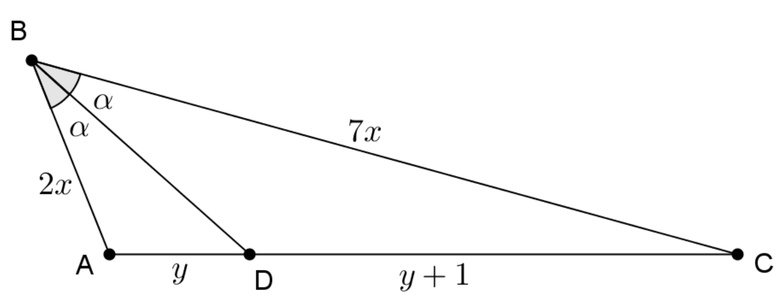
Ats.: 10.

255. **Duota:** $\angle ABD = \angle DBC$, $AB : BC = 2 : 7$, $DC - AD = 1$.

Raskite: *AC*.

Pažymime: $AD = y$, $DC = y + 1$.

Taikome pusiaukampinės savybę:



$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC},$$

$$\frac{y}{2} = \frac{y + 1}{7},$$

$y = 0{,}4$.

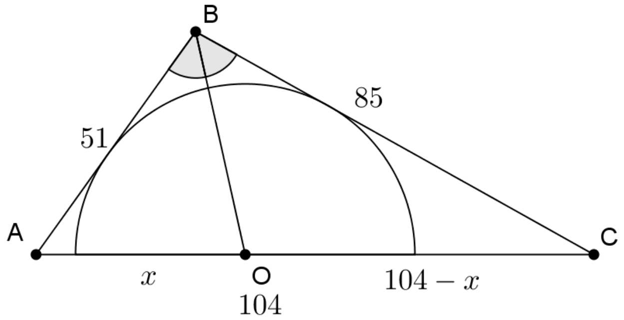
$AC = 2y + 1$, $AC = 1{,}8$.

Ats.: 1,8.

256. Žr. 255 uždavinį.

257. **Duota:** $AB = 51$, $BC = 85$, $AC = 104$.

Raskite: AO, OC



Pažymime: $AO = x$, $OC = 104 - x$.

OB – pusiaukampinė, todėl:

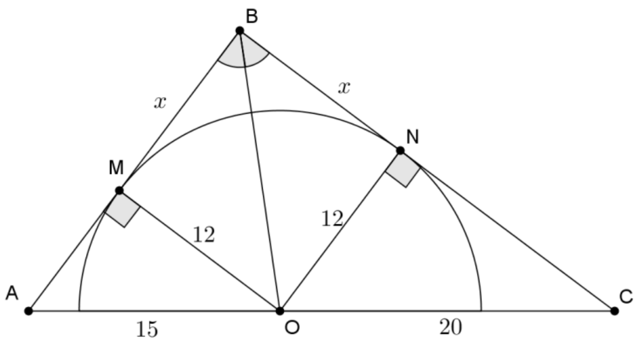
$$\frac{x}{51} = \frac{104 - x}{85},$$

$$x = 39.$$

Ats.: 39; 65.

258. **Duota:** $ON = 12$, $AO = 15$, $OC = 20$.

Raskite: AB, BC, AC.



Brėžiame BO.

Pažymime: $BM = BN = x$.

Trikampiams AOM ir ONC taikome Pitagoro teoremą:

$$AM = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9,$$

$$NC = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16.$$

Trikampiui ABO taikome pusiaukampinės savybę:

$$\frac{AB}{AO} = \frac{BC}{OC},$$

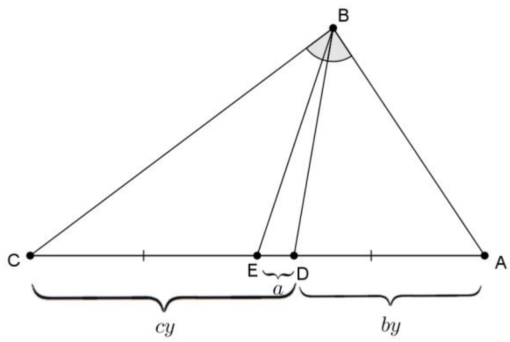
$$\frac{9 + x}{15} = \frac{x + 16}{20},$$

$$x = 12.$$

Ats.: 21; 28; 35.

259. **Duota:** BD – pusiaukampinė, BE – pusiaukraštinė, $DE = a$, $AB : BC = b : c$ ($AB < BC$).

Raskite: AC.



Kadangi $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DC}$ (pusiaukampinės savybė), tai

$AD = y$, $DC = cy$.

$AE = EC$,

$by + a = cy - a$,

$y = \frac{2a}{c - b}$.

$AC = y \cdot (b + c) = \frac{2a \cdot (c + b)}{c - b}$.

Ats.: $\frac{2a \cdot (c + b)}{c - b}$.

260. **Duota:** *AD*, *DE*, *DF* – pusiaukampinės.

Įrodykite: $FA \cdot BD \cdot CE = BF \cdot DC \cdot AE$.

Pažymim: $AF = x$, $BD = y$, $CE = z$, $AE = b$, $DC = a$, $BF = c$.

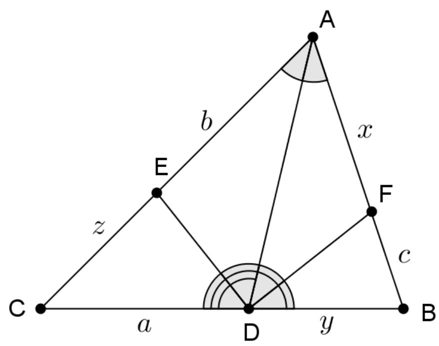
Įrodysime: $xyz = abc$.

Trikampiams *ACD* ir *ADB* taikome pusiaukampinės savybę:

$$\begin{cases} \frac{a}{z} = \frac{AD}{b}, \\ \frac{c}{x} = \frac{y}{AD}, \end{cases}$$

$\frac{ac}{xz} = \frac{y}{b}$,

$acb = xyz$.



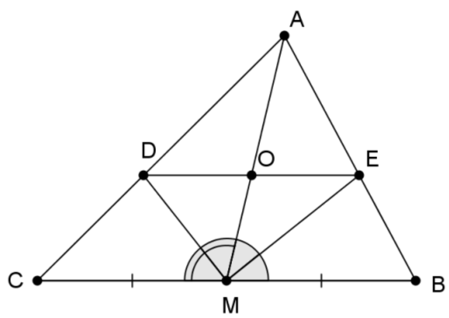
261. **Duota:** $CM = MB$, $\angle CMD = \angle DMO$, $\angle OME = \angle EMB$.

Įrodykite: *ED* lygiagreti *BC*.

Trikampiams *AMB* ir *ACM* taikome pusiaukampinės savybę:

$\frac{AE}{EB} = \frac{AM}{MB}$, $\frac{AD}{CD} = \frac{AM}{CM}$.

$MB = CM$, todėl $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow DE$ lygiagreti *BC*.

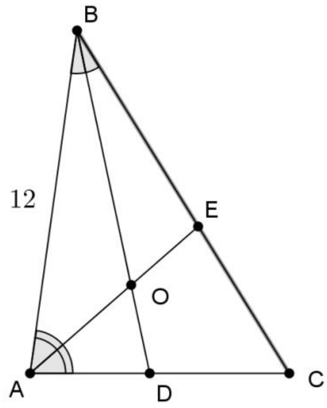


262. **Duota:** $\angle ABD = \angle DBC$, $\angle BAE = \angle EAC$, $AB = 12$, $AO : OE = 3 : 2$, $AD : DC = 6 : 7$.

Raskite: *AC*.

Trikampiams *ABE* ir *ABC* taikome pusiaukampinės savybę:

$\frac{12}{3} = \frac{BE}{2} \Rightarrow BE = 8$,



$$\frac{BC}{7} = \frac{12}{6} \Rightarrow BC = 14.$$

$EC = 14 - 8 = 6$.

Iš trikampio *ABC*:

$$\frac{AC}{6} = \frac{12}{8},$$

$AC = 9$.

Ats.: 9.

263. **Duota:** $\angle ABD = \angle DBC$, $\angle BAE = \angle EAC$, $BO = 7{,}5$, $OD = 4{,}5$, $BE : EC = 5 : 7$.

Raskite: *AC*.

Žr. 262 uždavinio brėžinį

Trikampiams *ABD* ir *ABC* taikome pusiaukampinės savybę:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{5}{7} \Rightarrow AB = \frac{5}{7}AC,$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{4{,}5}{7{,}5AC} \Rightarrow AD = \frac{5}{7}AC \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{7}AC.$$

Trikampiui *ABD* taikome Pitagoro teoremą:

$$AB^2 - AD^2 = BD^2,$$

$$\left(\frac{5}{7}AC\right)^2 - \left(\frac{3}{7}AC\right)^2 = 12^2,$$

$AC = 21$.

Ats.: 21.

264. **Duota:** $\angle ABD = \angle DBC$, $\angle BAE = \angle EAC$, $EC = 12$, $BO : OD = 4 : 3$.

Raskite: *AC*.

Žr. 262 uždavinio brėžinį.

Trikampiui *ABD* taikome pusiaukampinės savybę:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BO}{OD} = \frac{4}{3},$$

$AB = 4a$, $AD = 3a$,

$DC = AD = 3a$,

$BC = AB = 4a$.

$BE = 4a - 12$.

Trikampiui *ABC* taikome pusiaukampinės savybę:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{EC},$$

$$\frac{4a}{4a-12} = \frac{6a}{12},$$

$a = 5$.

$AC = 6a = 30$.

Ats.: 30.

265. **Duota:** $\angle ABD = \angle DBC$, $\angle BAE = \angle EAC$, $AD = 8$, $DC = 12$, $EC = 10$.

Raskite: $AO : OE$.

Žr. 262 uždavinio brėžinį.

Trikampiams *ABD* ir *ABC* taikome pusiaukampinės savybę:

$$\frac{BO}{OD} = \frac{AB}{AD}, \ \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}.$$

$$\frac{BC}{DC} = \frac{20}{10}, \ \frac{AB}{AD} = \frac{2}{1}.$$

$BO : OD = 2 : 1$.

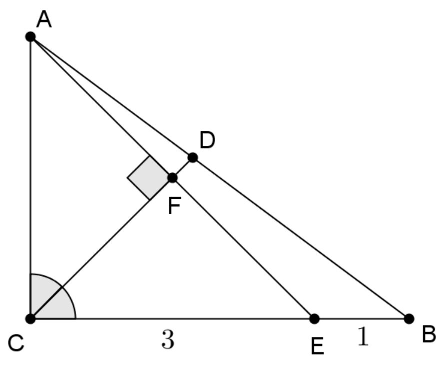
Ats.: $2 : 1$.

266. **Duota:** $\angle ACD = \angle DCB$, *AE* statmena *CD*, $BE = 1$, $EC = 3$.

Raskite: *AD*, *BD*.

CF yra pusiaukampinė ir aukštinė, todėl trikampis *ACE* lygiašonis:

$AC = CE = 3$, $CB = 4$.



Pagal Pitagoro teoremą $AB = 5$.

$AD + BD = 5$.

Taikome pusiaukampinės savybę:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC},$$

$$\frac{AD}{3} = \frac{BD}{4},$$

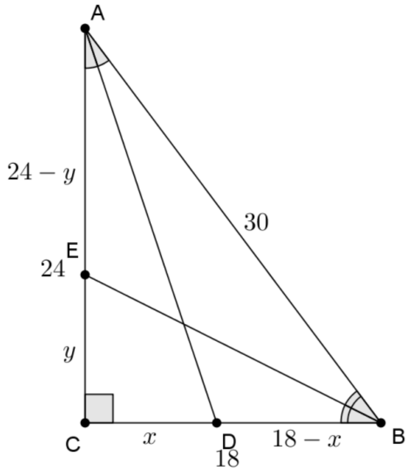
$$\frac{AD}{3} = \frac{5-AD}{4},$$

$AD = 2\frac{1}{7}$, $BD = 2\frac{6}{7}$.

Ats.: $2\frac{1}{7}$; $2\frac{6}{7}$.

267. **Duota:** $AC = 24$, $BC = 18$, $\angle ABE = \angle CBE$, $\angle CAD = \angle DAB$.

Raskite: *AD*, *BE*.



Pažymime: $CD = x$, $BD = 18 - x$, $EC = y$, $24 - y$.

Remiantis Pitagoro teorema, $AB = 30$.

AD – pusiaukampinė, todėl

$$\frac{x}{24} = \frac{18 - x}{30},$$

$x = 8$.

Trikampiui *ACD* taikome Pitagoro teoremą:

$$AD = \sqrt{24^2 + 8^2} = 8\sqrt{10}.$$

BE – pusiaukampinė, todėl

$$\frac{y}{18} = \frac{24 - y}{30},$$

$y = 9$.

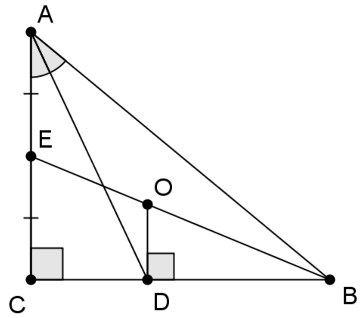
Trikampiui *ECB* taikome Pitagoro teoremą:

$$EB = \sqrt{18^2 + 9^2} = 9\sqrt{5}.$$

Ats.: $8\sqrt{10}$, $9\sqrt{5}$.

268. **Duota:** $EC = EA$, $\angle CAD = \angle BAD$, Taškas *O* dalija *EB* santykiu $2:1$, skaičiuojant nuo viršūnės *B*, *OD* statmena *BC*.

Raskite: $\angle A$, $\angle B$.



DO lygiagreti *EC*, todėl remiantis Talio teorema:

$$\frac{CD}{DB} = \frac{EO}{OB} = \frac{1}{2}.$$

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}.$$

$\angle B = 30^\circ$, $\angle A = 60^\circ$.

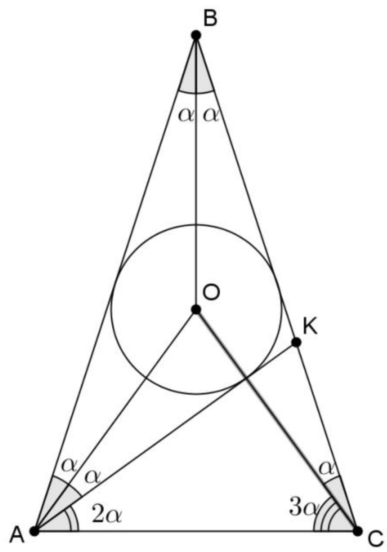
Ats.: 60°; 30°.

269. **Duota:** $\angle BAK = \angle KAC$. Įbrėžto į trikampį *ABK* ir apibrėžto apie trikampį *ABC* apskritimų centrai sutampa.

Raskite: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Taškas *O* yra pusiaukampinių susikirtimo taškas, todėl:

$\angle BAO = \angle OAK = \alpha$.



AK yra kampo *BAC* pusiaukampinė, todėl kampas *KAC* lygus 2α. *OA, OB* ir *OC* lygios *R*, todėl trikampis *AOB* yra lygiašonis.

$\angle ABO = \angle BAO = \alpha$.

OB yra kampo *ABC* pusiaukampinė, todėl kampas *OBC* lygus α.

Analogiškai:

$\angle OBC = \angle OCB = \alpha$,

$\angle OAC = \angle OCA = 3\alpha$.

$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 4\alpha + 2\alpha + 4\alpha = 10\alpha = 180^\circ$.

$\alpha = 18^\circ$.

$\angle C = \angle A = 4\alpha = 72^\circ$.

$\angle B = 2\alpha = 36^\circ$.

Ats.: 72°; 72°; 36°.

270. **Duota:** *AM*, *BN* – pusiaukampinės, $AO = \sqrt{3} \cdot MO$, $NO = \left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot BO$.

Raskite: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Pažymėkime: $AB = z$, $BC = x$, $AC = y$, $AN = t$.

AM yra pusiaukampinė, todėl:

$$\frac{x - BM}{y} = \frac{BM}{z} \Rightarrow BM = \frac{xz}{y + z},$$

$$\frac{MC}{y} = \frac{x - MC}{z} \Rightarrow MC = \frac{xy}{z + y}.$$

Trikampiams *ABM* ir *ABN* taikome pusiaukampinės savybę:

$$\frac{AO}{OM} = \frac{AB}{BM}; \ \frac{BO}{ON} = \frac{AB}{AN}.$$

$$\frac{AO}{OM} = \frac{z(z + y)}{zx} = \frac{z + y}{x}; \ \frac{BO}{ON} = \frac{z(x + z)}{zy} = \frac{x + z}{y}.$$

$$\frac{t}{z} = \frac{y - t}{x} \Rightarrow t = \frac{zy}{x + z}.$$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot MO}{MO} = \frac{z + y}{x}, \ \frac{BO}{\left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot BO} = \frac{x + z}{y},$$

$\sqrt{3}x = z + y$,

$y = x\sqrt{3} - z$.

$(x+z)\cdot(\sqrt{3}-1) = y$,

$(x+y)\cdot(\sqrt{3}-1) = x\sqrt{3} - z$,

$x = \sqrt{3}\cdot z$.

$z + y = 3z$,

$y = 2z$.

Taikome kosinusų teoremą:

$x^2 = y^2 + z^2 - 2zy\cdot\cos A$,

$3z^2 = z^2 + 4z^2 - 2z\cdot 2z\cdot\cos A$,

$\cos A = \dfrac{1}{2}$, $\angle A = 60^\circ$.

$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cdot\cos C$,

$z^2 = 3z^2 + 4z^2 - 2z\sqrt{3}\cdot 2z\cdot\cos C$,

$\cos C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\angle C = 30^\circ$.

$\angle B = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$.

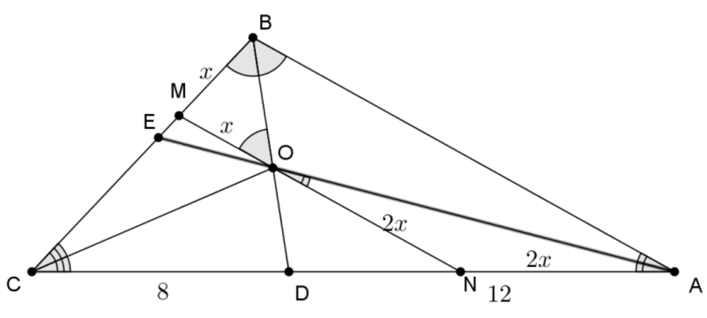
Ats.: 30°; 60°; 90°.

271. **Duota:** $AD = 12$, $CD = 8$, *MN* lygiagreti *AB*, $MO : ON = 1 : 2$.

Raskite: *AB*, *BC*.

Pažymėkime: $MO = x$, $ON = 2x$.

MN lygiagreti *AB*, tai kampai *MOB* ir *MBO* lygūs.



$MB = MO = x$.

$\angle AON = \angle BAO = \angle OAD$,

$ON = NA = 2x$.

$DN = 12 - 2x$, $CN = 20 - 2x$.

Trikampiui *MCN* taikome pusiaukampinės savybę:

$\dfrac{CM}{CN} = \dfrac{MO}{ON}$,

$$\frac{CM}{20-2x}=\frac{1}{2},$$

$CM=10-x$,

$CB=CM+MB=10-x+x=10$.

Trikampiui *ABC* taikome pusiaukampinės savybę:

$$\frac{CB}{CD}=\frac{AB}{DA},$$

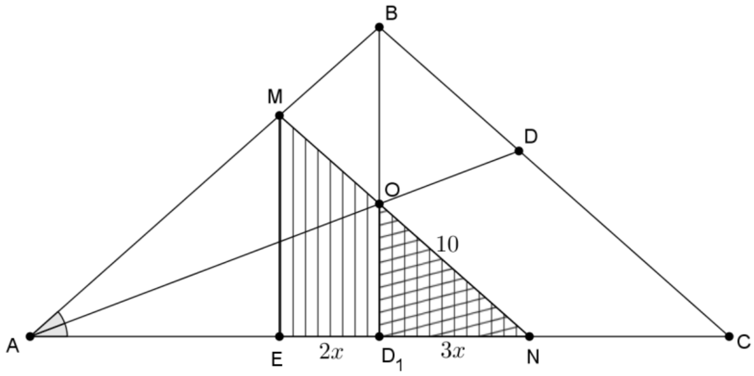
$$\frac{10}{8}=\frac{AB}{12},$$

$AB=15$.

Ats.: 10; 15.

272. **Duota:** $AB=BC$, $\angle BAD=\angle DAC$, $BD:DC=2:3$, MN lygiagreti BC, $MN=10$.

Raskite: *AC*.



Brėžiame *ME*, lygiagrečią BD_1.

AB lygi *BC*, o *MN* lygiagreti *BC*, todėl:

$AM=MN=10$.

Trikampis *AMN* yra lygiašonis. Trikampis *AMN* panašus į trikampį *ABC*, o trikampis *MEN* panašus į trikampį D_1ON:

$$\frac{MO}{ON}=\frac{BD}{DC}=\frac{2}{3},\ \frac{MO}{ON}=\frac{ED_1}{D_1N}=\frac{2}{3}.$$

$ED_1=2x$, $D_1N=3x$, $AE=EN=5x$, $AN=10x$.

$$MO=\frac{2}{5}\cdot 10=4,\ ON=\frac{3}{5}\cdot 10=6.$$

Trikampiui *AMN* taikome pusiaukampinės savybę:

$$\frac{AM}{MO}=\frac{AN}{ON},$$

$$\frac{10}{4}=\frac{10x}{6},$$

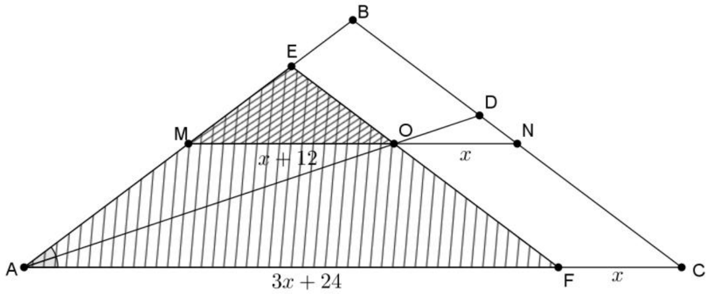
$x=1{,}5$.

$AC=14x=14\cdot 1{,}5=21$.

Ats.: 21.

273. **Duota:** $AB = BC$, $\angle BAD = \angle DAC$, $BD : DC = 5 : 8$, $AM = MB$, $BN = NC$, $MO - ON = 12$.

Raskite: P_{ABC}.



Pažymime: $ON = x$, $MO = x + 12$.

Brėžiame *EF*, lygiagrečią *BC*.

$AE = EF$, $FC = ON = x$,

$AC = 2MN = 4x + 24$.

Trikampiai *AEF* ir *ABC* panašūs:

$$\frac{EO}{OF} = \frac{5}{8},$$

Trikampiai *MEO* ir *AEF* panašūs:

$$\frac{MO}{AF} = \frac{EO}{EF},$$

$$\frac{x+12}{3x+24} = \frac{5}{13},$$

$x = 18$.

$AC = 4 \cdot 18 + 24 = 96$.

AD – pusiaukampinė, todėl:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{5}{8},$$

$$AB = 96 \cdot \frac{5}{8} = 60.$$

$P_{ABC} = 60 \cdot 2 + 96 = 216$.

Ats.: 216.

274. **Duota:** $AB = CD$, $\angle A = 60^\circ$, $BO : OD = 4 : 11$, $BE - EC = 6$.

Raskite: vidurio liniją.

Pažymime: $EC = a$, $BE = a + b$. Trikampis *AEB* lygiašonis:

$AB = BE$.

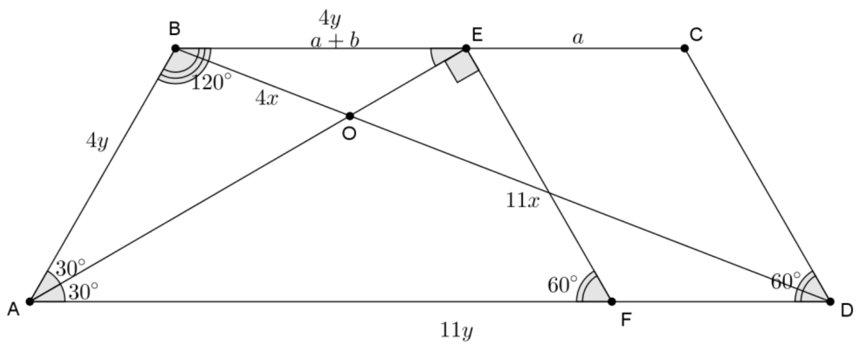
Trikampiui *ABD* taikome pusiaukampinės savybę:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BO}{OD} = \frac{4}{11},$$

$AB = 4y$,

$AD = 11y$.

$AB = BE = 4y$,



$4y = a + 6$.

Brėžiame *EF* lygiagrečią *DC*,

$FD = a$.

Kampas *EFA* lygus 60°, tai trikampis *AEF* status.

$EF = AB = 4y$.

$AF = 2 \cdot 4y = 8y$.

$FD = 3y$.

$$\begin{cases} 3y = a, \\ 4y = a + b; \end{cases}$$

$y = 6$, $a = 18$.

$BC = 42$,

$AD = 66$.

Vidurio linija lygi: $\dfrac{42 + 66}{2} = 54$.

Ats.: 54.

275. **Duota:** $AB = CD$, $\angle ADE = \angle CDE$, $\angle ABF = \angle FBC$, $AE : EC = 3 : 2$, $AF : FC = 6 : 5$, Vidurio linija – 28.

Raskite: *AB*.

Trikampiams *ABC* ir *ADC* taikome pusiaukampinės savybę:

$\dfrac{AB}{AF} = \dfrac{BC}{EC} = \dfrac{6}{5} \Rightarrow AB = 6a$, $BC = 5a$.

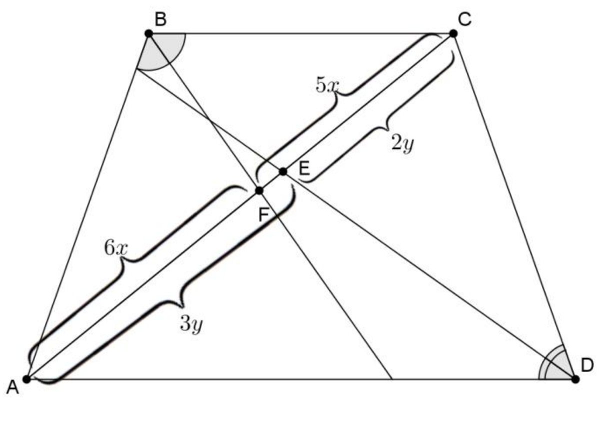
$\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{DC}{EC} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow AD = 3b$, $CD = 2b$.

$$\begin{cases} BC + AD = 2 \cdot 28, \\ AB = CD. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a + 3b = 56, \\ 6a = 2b \end{cases}$$

Iš čia $a = 4$.

$AB = 24$.



Ats.: 24.

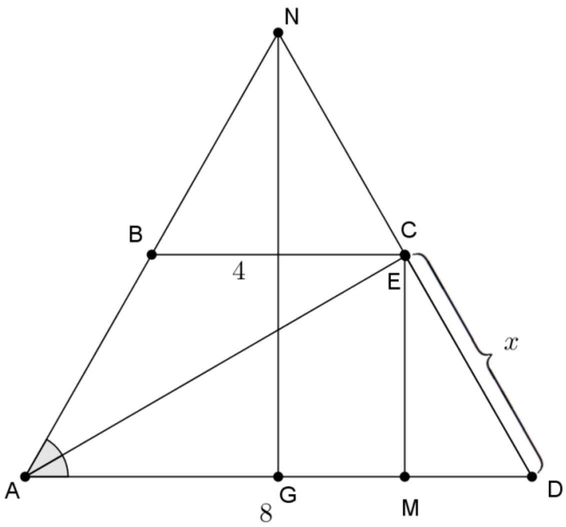
276. **Duota:** $BC = 4$, $AD = 8$, $S = 21$. $\angle BAE = \angle EAD$.

Raskite: *AE* kerta *CD* ar *BC*?

Pratęsiame *AB* ir *CD* iki susikirtimo taško *N*.

BC lygiagreti *AD* ir lygi jos pusei, tai *BC* yra trikampio *AND* vidurio linija.

$S_{trap.} = \frac{4+8}{2} \cdot FG = 21$, $FG = 3{,}5$.



Trikampiai *BNC* ir *AND* panašūs:

$\frac{NG}{FG} = \frac{1}{2}$,

$NG = 7$.

$AG = 4$.

Trikampiui *ANG* taikome Pitagoro teoremą:

$AN = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$.

$ND = AN$

$ED = x$, $\quad EN = \sqrt{65} - x$.

AE yra pusiaukampinė, todėl:

$\frac{x}{8} = \frac{\sqrt{65} - x}{\sqrt{65}}$,

$x = 8 \cdot 65 - 64 \cdot \sqrt{65}$.

$MD = 4 - 2 = 2$, $CM = FG = 3{,}5$.

Trikampiui *CMD* taikome Pitagoro teoremą:

$CD = \sqrt{3{,}5^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

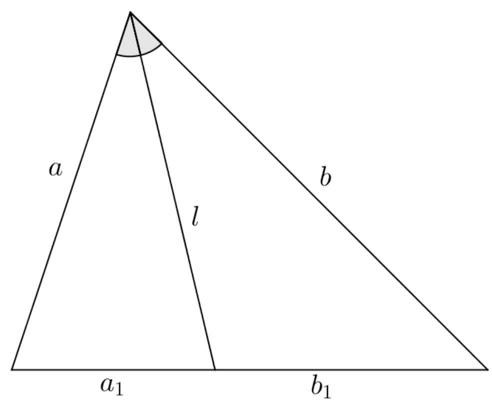
$CD - x = \frac{\sqrt{65}}{2} - \left(8 \cdot 65 - 64 \cdot \sqrt{65}\right) \approx 4{,}03 - 520 + 515{,}98 > 0$.

Vadinasi, pusiaukampinė kerta šoninę kraštinę.

277. **Duota:** *a, b, c.*

Raskite: pusiaukampinę l_c.

Taikome abi pusiaukampinės savybes:



$$\begin{cases} l_c^2 = ab - a_1 b_1 = ab - a_1(c - a_1), \\ \frac{a}{b} = \frac{a_1}{c - a_1} \Rightarrow a_1 = \frac{ac}{a+b}. \end{cases}$$

$$l_c^2 = ab - \frac{ac}{a+b}\left(c - \frac{ac}{a+b}\right),$$

$$l_c = \frac{\sqrt{ab\cdot(a+b+c)\cdot(a+b-c)}}{a+b}.$$

Ats.: $l_c = \dfrac{\sqrt{ab\cdot(a+b+c)\cdot(a+b-c)}}{a+b}$.

278. **Duota:** $AB = 12$, $BC = 15$, $AC = 18$.

Raskite: BD.

Pažymime $AD = x$, $DC = 18 - x$.

Taikome pusiaukampinės savybes:

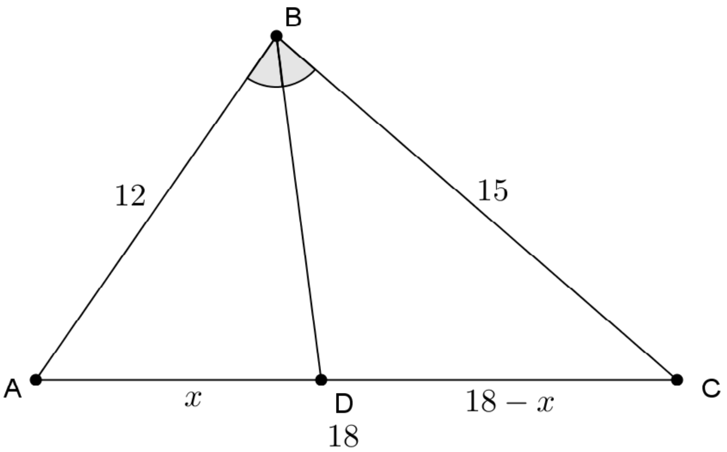
$$\frac{x}{12} = \frac{18-x}{15},$$

$x = 8$.

$BD^2 = AB\cdot BC - AD\cdot DC$,

$BD^2 = 12\cdot 15 - 8\cdot 10 = 100$,

$BD = 10$.



Ats.: 10.

279. **Duota:** $AC = b$, $AB = c$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle A = 2\angle B$.

Raskite: BC (pažymime a).

Kampai 1, 2 ir 3 lygūs, tai pažymime:

$AD = BD = l$, $CD = a - l$.

Taikome pusiaukampinės savybes:

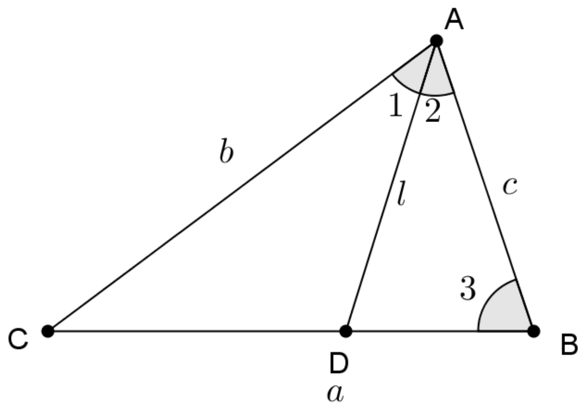
$$\frac{b}{a-l} = \frac{c}{l} \Rightarrow a = \frac{l\cdot(c+b)}{c}.$$

$l^2 = bc - (a-l)\cdot l$,

$$l = \frac{bc}{a}.$$

$$a = \frac{bc(c+b)}{ac}.$$

$a = \sqrt{b\cdot(b+c)}$.



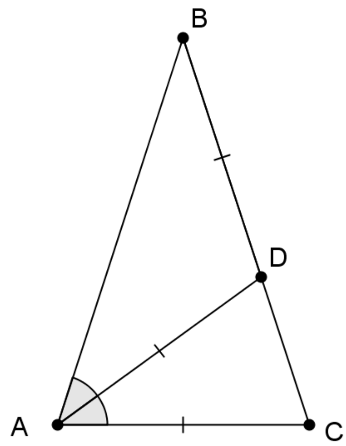
Ats.: $\sqrt{b\cdot(b+c)}$.

280. Žr. 279 uždavinį.

281. Žr. 279 uždavinį.

282. **Duota:** $AB = BC$, $\angle BAD = \angle DAC$, $BD = AC$.

Įrodykite: $AD = AC$.



$BD = AC$,

$AB = BC$,

$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$,

$AD^2 = (BD + DC) \cdot BD - BD \cdot DC$,

$AD^2 = BD^2$,

$AD = BD$.

$BD = AC$, todėl $AD = AC$.

283. **Duota:** $BE = 2$, $\angle ABE : \angle EBC = 1:2$, $AE = 1$.

Raskite: S_{ABC}.

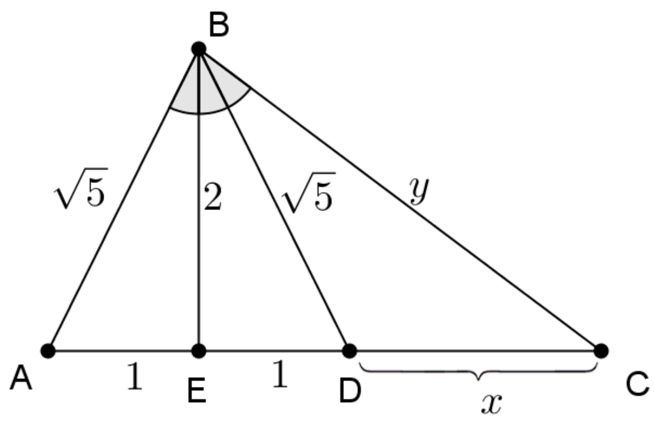
Pažymime: $BC = y$, $DC = x$.

Nubrėžiame kampo *EBC* pusiaukampinę *BD*.

$ED = AE = 1$, $BE = 2$, $BD = AB = \sqrt{5}$.

Trikampiui *BEC* taikome pusiaukampinės savybes:

$$\begin{cases} BD^2 = 2 \cdot 1 - 1 \cdot x, \\ \dfrac{2}{1} = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$



$y = 2x$, $x = \dfrac{5}{3}$.

$AC = 2 + \dfrac{5}{3} = \dfrac{11}{3}$.

$S_{ABC} = \dfrac{11 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \dfrac{11}{3}$.

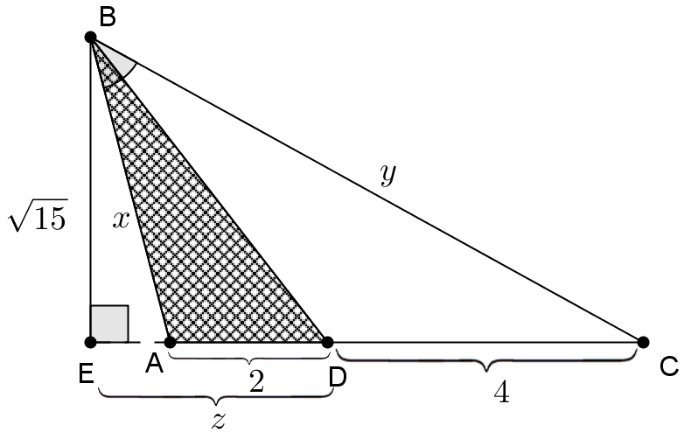
Ats.: $\dfrac{11}{3}$.

284. Žr. 283 uždavinį.

285. **Duota:** $AD = 2$, $DC = 4$, $BE = \sqrt{15}$.

Raskite: $AB(x)$, $BC(y)$, AC.

Pažymime: $ED = z$, $AE = 2 - z$.



Taikome pusiaukampinės savybę:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC},$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{4}.$$

$y = 2x$ (1).

Trikampiams AEB ir BEC taikome Pitagoro teoremą:

$x^2 - 15 = 4 - 4z + z^2$,

$y^2 - 15 = 16 + 8z + z^2$.

1-ą lygtį padauginame iš 4, o į 2-ą įstatome $y = 2x$ (1):

$$\begin{cases} 4x^2 - 60 = 16 - 16z + 4z^2, \\ 4x^2 - 15 = 16 + 8z + z^2, \end{cases}$$

$z^2 - 8z + 15 = 0$.

$z = 5$, $z = 3$,

$x = 16$, $x = 4$,

$x^2 = 24$ (netinka)

$y = 8$, $AC = 6$.

Ats.: 4; 6; 8.

286. **Duota:** $BC = 15$, $AB = 13$, $AC = 14$. BE statmena AC, $\angle ABD = \angle DBC$.

Raskite: S_{EBD}.

Pažymime: $AD = x$, $DC = 14 - x$.

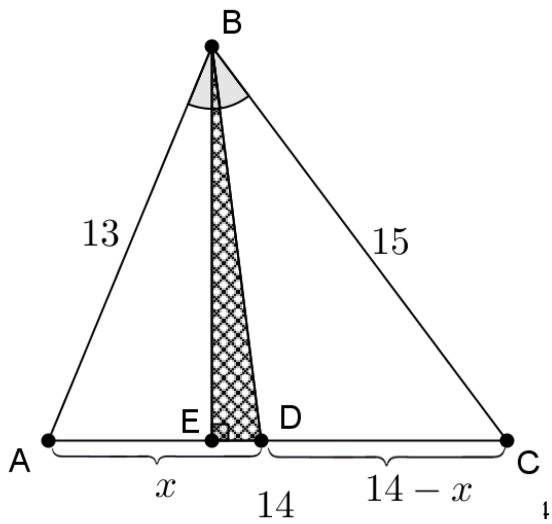
Taikome pusiaukampinės savybes:

$$\frac{x}{13} = \frac{14 - x}{15},$$

$x = 6{,}5$.

$BD^2 = 13 \cdot 15 - 6{,}5 \cdot 7{,}5 = 146{,}25$.

Iš trikampių ABE ir BED išreiškiame BE^2 ir sulyginame:



$146{,}25 - ED^2 = 169 - (6{,}5 - ED)^2$,

$ED = 1{,}5$.

$BD = \sqrt{146{,}25 - 2{,}25} = 12$.

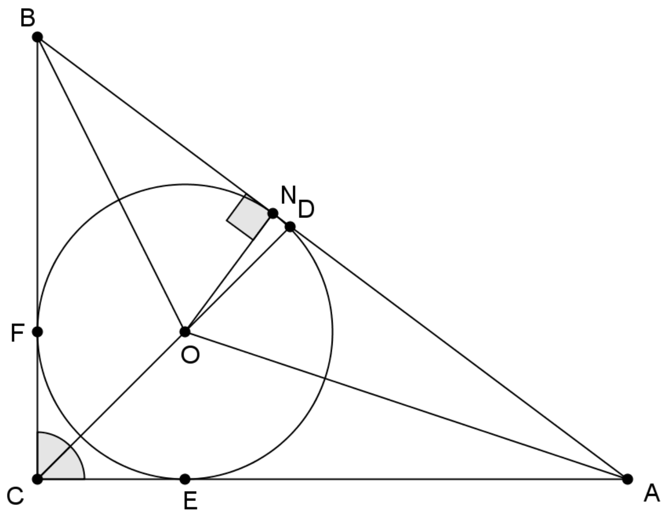
$S_{BED} = \dfrac{1{,}5 \cdot 12}{2} = 9$.

Ats.: 9.

287. **Duota:** $ON = r = 7$. $CO : OD = 7 : 5$. $\angle BCD = \angle DCA$.

Raskite: *AB*.

Trikampiams *ACD* ir *CDB* taikome pusiaukampinės savybę:



$\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{CO}{OD} = \dfrac{7}{5}$, $AC = 7x$, $AD = 5x$.

$\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{CO}{OD} = \dfrac{7}{5}$, $BC = 7y$, $BD = 5y$.

Taikome liestinės teoremą ir išvadą:

$AD = AE = 7x - 7$,

$BN = BF = 7y - 7$.

$AB = BD + DA = BF + EA$,

$5y + 5x = 7y - 7 + 7x - 7$,

$x + y = 7$.

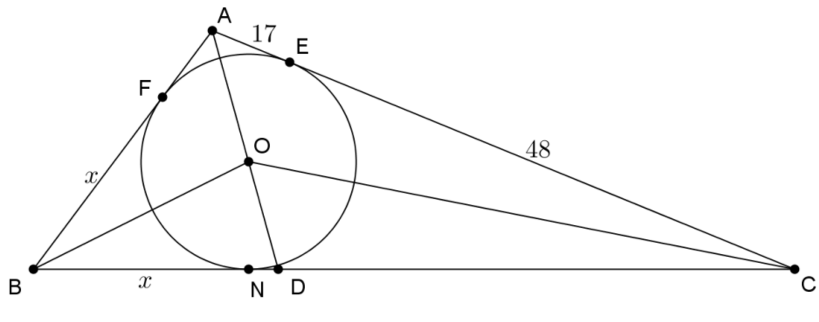
$AB = 5(x + y) = 35$.

Ats.: 35.

288. **Duota:** $AE = 17$, $EC = 48$, $AO : OD = 5 : 3$.

Raskite: *AB*, *BC*.

Taikome liestinės teoremą ir išvadą:



$AF = AE = 17$,

$NC = EC = 48$,

$FB = BN = x$.

Trikampiui *ACD* taikome pusiaukampinės teoremą:

$\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{AO}{OD} = \dfrac{5}{3}$,

$AC = 65$, $DC = 39$.

$ND = NC - DC = 48 - 39 = 9$.

Trikampiui *ABD* taikome pusiaukampinės teoremą:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AO}{OD};$$

$$\frac{17+x}{x+9} = \frac{5}{3};$$

$x = 3$.

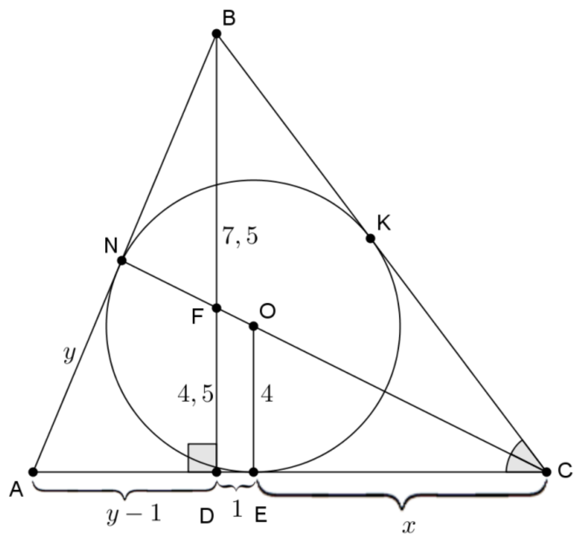
$AB = 17 + 3 = 20$,

$BC = 48 + 3 = 51$.

Ats.: 20, 51.

289. **Duota:** $OE = 4$, $BF = 7{,}5$, $FD = 4{,}5$.

Raskite: *AB*, *BC*, *AC*.



Trikampiai *OEC* ir *FDC* panašūs:

$$\frac{EC}{OE} = \frac{DC}{FD},$$

$$\frac{x}{4} = \frac{DC}{4{,}5},$$

$$DC = \frac{9}{8}x.$$

Trikampiui *BDC* taikome pusiaukampinės savybę:

$BC : BF = CD : FD$,

$$BC : 7{,}5 = \frac{9}{8}x : 4{,}5 \Rightarrow BC = \frac{15}{8}x.$$

Trikampiui *BDC* taikome Pitagoro teoremą:

$$12^2 = \left(\frac{15}{8}x\right)^2 - \left(\frac{9}{8}x\right)^2,$$

$x = 8$,

$CB = 15$, $CD = 9$.

$DE = DC - EC = 1$, $EC = EK = 8$, $BK = BN = 7$.

Taikome liestinės teoremos išvadą:

$AN = AE = y$,

$AD = y - 1$.

Trikampiui *ADB* taikome Pitagoro teoremą:

$AD = y - 1$, $BD = 12$, $AB = y + 7$.

$(y+7)^2 - (y-1)^2 = 12^2$,

$y = 6$.

$AB = 13$, $AC = 14$.

Ats.: 13; 14; 15.

290. **Duota:** $P_{ABC} = 80$, $ED = 4$, $AD : DC = 3 : 5$, $\angle ABD = \angle CBD$.

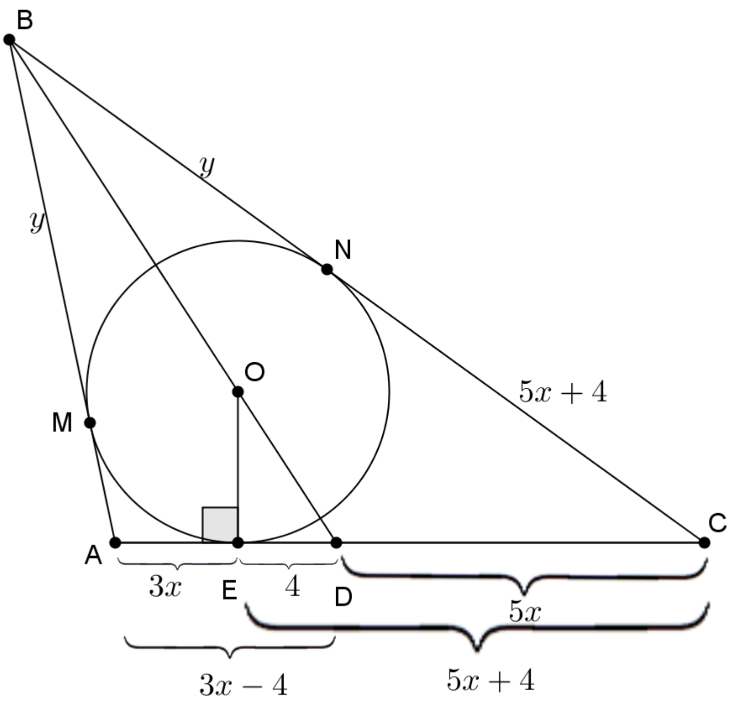
Raskite: *AB*, *BC*, *AC*.

Pažymime: $AD = 3x$, $DC = 5x$,

$AM = AE = 3x - 4$,

$NC = CE = 5x + 4$,

$MB = BN = y$.



$$\begin{cases} AB + BC + AC = P_{ABC}, \\ \dfrac{BA}{AD} = \dfrac{BC}{DC}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + 16x = 80, \\ \dfrac{3x - 4 + y}{3} = \dfrac{y + 5x + 4}{5}. \end{cases}$$

$x = 3$, $y = 16$.

$AC = 8x = 24$,

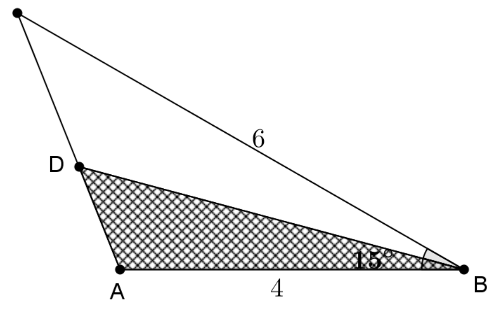
$AB = 3 \cdot 3 - 4 + 16 = 21$,

$BC = 80 - 24 - 21 = 35$.

Ats.: 21; 35;24.

291. **Duota:** $\angle B = 30^\circ$, $AB = 4$, $BC = 6$, $\angle CBD = \angle ABD$.

Raskite: S_{ABD}.



$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{DCB}$,

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot 4 \cdot \sin 15^\circ + \frac{BD}{2} \cdot 6 \cdot \sin 15^\circ,$$

$$BD = \frac{1{,}2}{\sin 15^\circ}.$$

$$S_{ABD} = \frac{1{,}2 \cdot 4 \cdot \sin 15^\circ}{2 \cdot \sin 15^\circ} = 2{,}4.$$

Ats.: 2,4.

292. Žr. 236 uždavinį.

293. **Duota:** $AB = 14$, $BC = 35$, $\angle ABD = \angle CBD$, $BD = 12$.

Raskite: S_{ABC}.

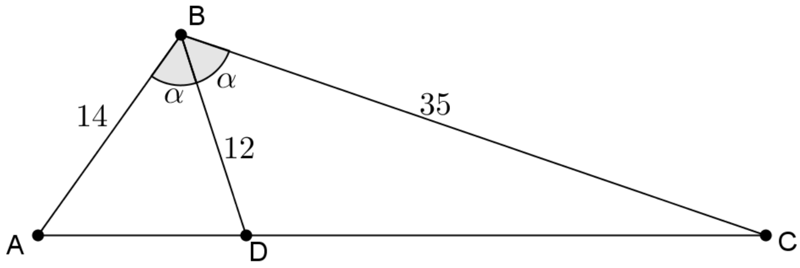
$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BDC}$.

$\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 35 \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 12 \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 35 \cdot \sin\alpha$,

$\cos a = \frac{3}{5}$;

$\sin a = \frac{4}{5}$.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{24}{25}$.



$S_{ABC} = \frac{14 \cdot 35 \cdot 25}{2 \cdot 25} = 235{,}2$.

Ats.: 235,2.

294. Žr. 293 uždavinį.

295. **Duota:** $S_{ABC} = 5$, $AB = 3$, $BC = 4$, $\angle ABD = \angle DBC$.

Raskite: $S_{ABD} = S_1$, $S_{BDC} = S_2$.

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AD}{DC}$, o pagal pusiaukampinės savybę

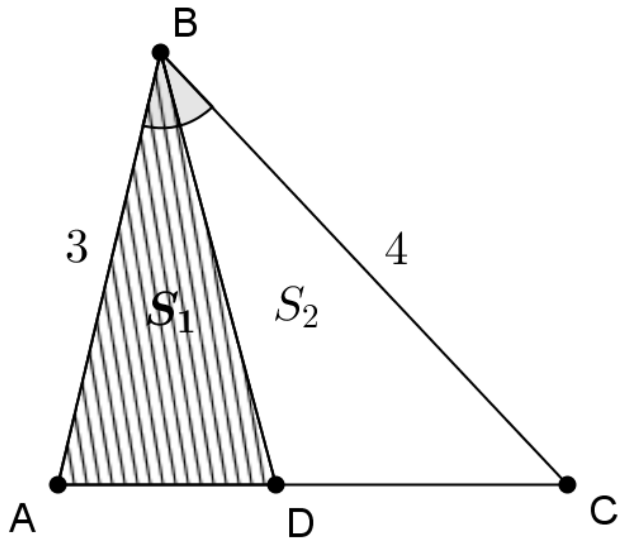
$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Tuomet: $\frac{S_1}{5 - S_1} = \frac{3}{4}$,

$S_1 = 2\frac{1}{7}$,

$S_2 = 5 - 2\frac{1}{7} = 2\frac{6}{7}$.

Ats.: $2\frac{1}{7}$; $2\frac{6}{7}$.



UŽDAVINIAI SU TRIKAMPIO AUKŠTINE

Trikampio aukštinės susikerta viename taške, kuris dažnai vadinamas ortocentru.
Stataus trikampio aukštinė, nubrėžta į įžambinę, yra geometrinis vidurkis atkarpų, į kurias aukštinė dalija įžambinę.

Uždavinių sprendimai

296. **Duota:** *a*, *b*, *c*.

Raskite: h_a, h_b, h_c.

Trikampio plotas $S = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$.

Iš kitos pusės, $S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c$, todėl:

$$h_b = \frac{2S}{b} = \frac{2\sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}}{b},$$

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}}{a},$$

$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2\sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}}{c}.$$

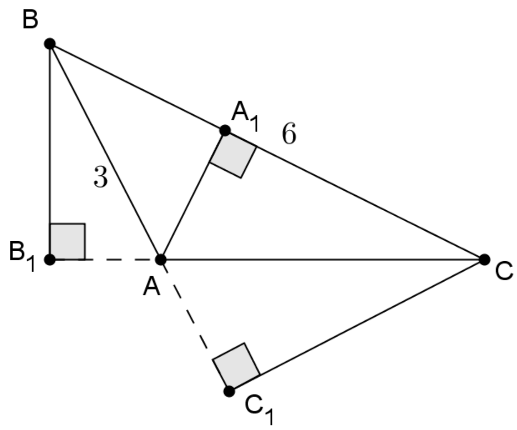
Ats.: $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$,

$h_b = \frac{2S}{b} = \frac{2\sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}}{b}$,

$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2\sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$.

297. **Duota:** $AB = 3$, $BC = 6$, $BB_1 = \frac{CC_1 + AA_1}{2}$.

Raskite: *AC*.



$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot AA_1 \Rightarrow AA_1 = \frac{S}{3},$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot CC_1 \Rightarrow CC_1 = \frac{2S}{3}.$$

$$AA_1 + CC_1 = S.$$

$$BB_1 = \frac{AA_1 + CC_1}{2} = \frac{S}{2}.$$

$$S = \frac{AC \cdot BB_1}{2},$$

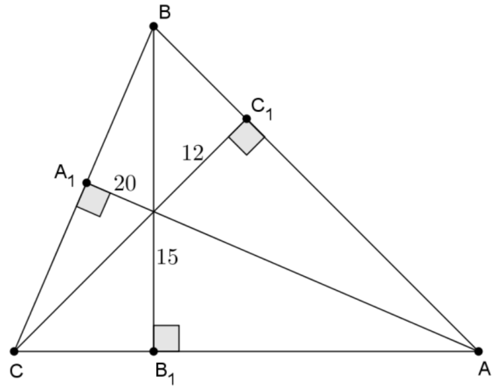
$$S = \frac{AC \cdot S}{4},$$

$$AC = 4.$$

Ats.: 4.

298. **Duota:** $AA_1 = 20$, $BB_1 = 15$, $CC_1 = 12$.

Įrodykite: ABC – status trikampis.



$$2S_{ABC} = 20 \cdot BC = 12 \cdot AB = 15 \cdot AC,$$

$$CB = \frac{12 \cdot BA}{20} = \frac{6}{10} BA,$$

$$CA = \frac{12 \cdot BA}{15} = \frac{8}{10} BA.$$

$$CB^2 + CA^2 = \frac{36+64}{100} BA^2 = BA^2.$$

Taigi trikampis status.

299. Žr. 298 uždavinį.

Kadangi trikampis yra status, tai 15 ir 20 yra jo statiniai, todėl trikampio plotas lygus:

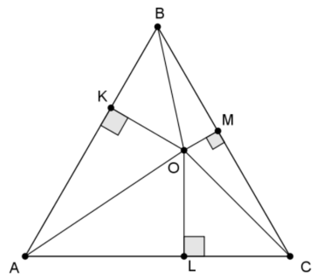
$$\frac{15 \cdot 20}{2} = 150.$$

Ats.: 150.

300. **Duota:** $AB = BC = AC$, OM statmena BC, OL statmena AC, OK statmena AB.

Įrodykite: $OM + OL + KO = h$, čia h – trikampio aukštinė.

Tegul trikampio kraštinė – a.



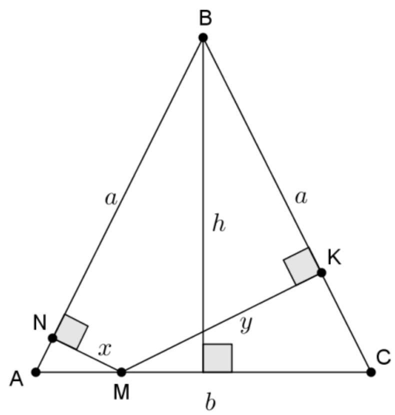
$$S_{ABC} = S_{ABO} + S_{BOC} + S_{AOC},$$

$$\frac{ah}{2} = (OK + OL + OM) \cdot \frac{a}{2},$$

$$h = OK + OL + OM.$$

301. **Duota:** $AB = BC$ (pažymime a), $M \in AC$, MN statmena AB, MK statmena BC.

Įrodykite: $MN + MK = x + y = const$.



$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{BMC},$$

$$S_{ABC} = \frac{ax}{2} + \frac{ay}{2} = \frac{bh}{2},$$

$$x + y = \frac{bh}{a} = const.$$

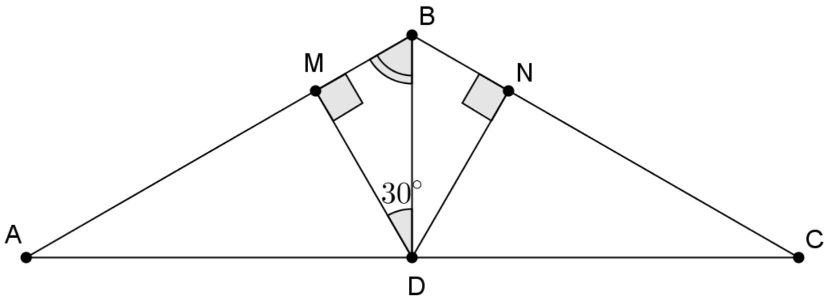
Ats.: $x + y = \dfrac{bh}{a} = const$.

302. **Duota:** $AB = BC$, $BD = h$, $BD = 2BM$.

Raskite: S_{ABC}.

$BM = \frac{1}{2} \cdot BD$, tai $\angle BDM = 30^\circ$, $\angle ABD = 60^\circ$.

Iš trikampio ABD:



$AD = BD \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$,

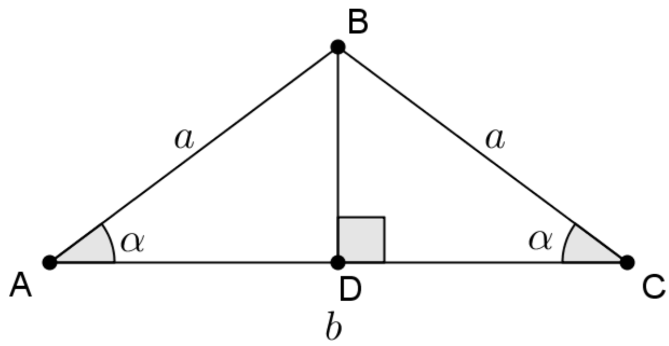
$AD = h \cdot \sqrt{3}$.

$S_{ABC} = AD \cdot BD = h^2\sqrt{3}$.

Ats.: $h^2\sqrt{3}$.

303. **Duota:** $AB = BC$ (pažymime a), $P_{ABC} = 27$, $\angle BAC = \alpha$, $\sin\alpha = 0{,}6$.

Raskite: S_{ABC}.



Pažymime: $AC = b$.

Iš trikampio ABD:

$\frac{b}{2} = a \cdot \cos\alpha$,

$b = 2a \cdot \sqrt{1 - 0{,}36} = 1{,}6 \cdot a$

$P_{ABC} = a + a + 1{,}6 \cdot a$,

$3{,}6 \cdot a = 27$,

$a = 7{,}5$,

$b = 12$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin\alpha$,

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 7{,}5 \cdot 12 \cdot 0{,}6 = 27$.

Ats.: 27.

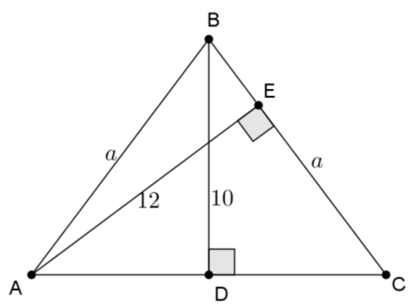
304. **Duota:** $AB = BC$ (pažymime a), $BD = 10$, $AE = 12$.

Raskite: S_{ABC}.

Iš trikampio BCD:

$DC = \sqrt{a^2 - 100}$.

$S_{ABC} = DC \cdot BD$,



$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE$.

$10 \cdot \sqrt{a^2 - 100} = 6a$,

$a = 12{,}5$.

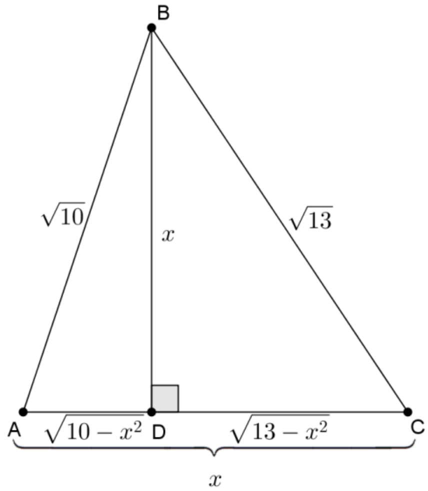
$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12{,}5 = 75$.

Ats.: 75.

305. **Duota:** $AB = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{13}$, $BD = AC$ (pažymime *x*).

Raskite: *AC*.

Trikampiams *ABD* ir *DBC* taikome Pitagoro teoremą:



$AD = \sqrt{10 - x^2}$, $DC = \sqrt{13 - x^2}$.

$AC = AD + AC$,

$x = \sqrt{10 - x^2} + \sqrt{13 - x^2}$,

$x - \sqrt{10 - x^2} = \sqrt{13 - x^2}$.

Lygtį keliame kvadratu:

$3 - x^2 = 2x \cdot \sqrt{10 - x^2}$,

$5x^4 - 46 \cdot x^2 + 9 = 0$.

$a = 9$, $a = 0{,}2$ (netinka, nes neegzistuoja toks trikampis, t. y. $\sqrt{10} + \sqrt{0{,}2} < \sqrt{13}$)

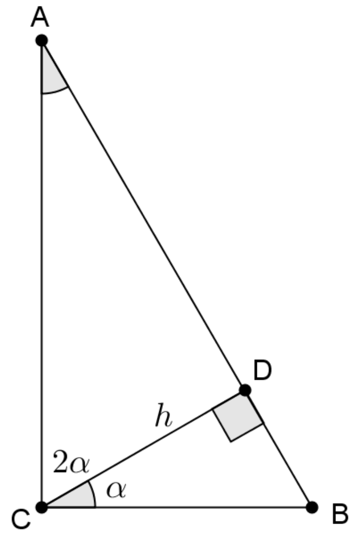
$x = 3$.

Ats.: 3.

306. **Duota:** $S_{ABC} = 2\sqrt{3}$, $\angle BCD : \angle DCA = 1 : 2$.

Raskite: *CD*.

Trikampiai *ACD* ir *CBD* panašūs:



$\alpha = 30^\circ$,

$\angle A = 30^\circ$.

Iš trikampio *ACD*:

$AD = h \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = h \cdot \sqrt{3}$,

$\angle B = 60^\circ$.

Iš trikampio *CBD*:

$$BD = h \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{h \cdot \sqrt{3}}{3}.$$

$$AB = h\sqrt{3} + \frac{h\sqrt{3}}{3},$$

$$AB = \frac{4}{3} \cdot h\sqrt{3}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h,$$

$$2\sqrt{3} = \frac{4}{3} h\sqrt{3} \cdot \frac{h}{2},$$

$$h = \sqrt{3}.$$

Ats.: $\sqrt{3}$.

307. **Duota:** h_a, h_b, h_c.

Raskite: a, b, c.

Trikampio plotas $S = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$.

$$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c,$$

$$a = \frac{2S}{h_a}\ b = \frac{2S}{h_b},\ c = \frac{2S}{h_c}.$$

$$S = S^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}.$$

Visą šaknį pažymime A:

$$S = S^2 \cdot A,$$

$$S = \frac{1}{A}.$$

$$a = \frac{2}{h_a \cdot A},$$

$$b = \frac{2}{h_b \cdot A},$$

$$c = \frac{2}{h_c \cdot A}.$$

Ats.: $a = \frac{2}{h_a \cdot A}$, $b = \frac{2}{h_b \cdot A}$, $c = \frac{2}{h_c \cdot A}$.

308. **Duota:** h_a, h_b, h_c, r.

Įrodykite: $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$.

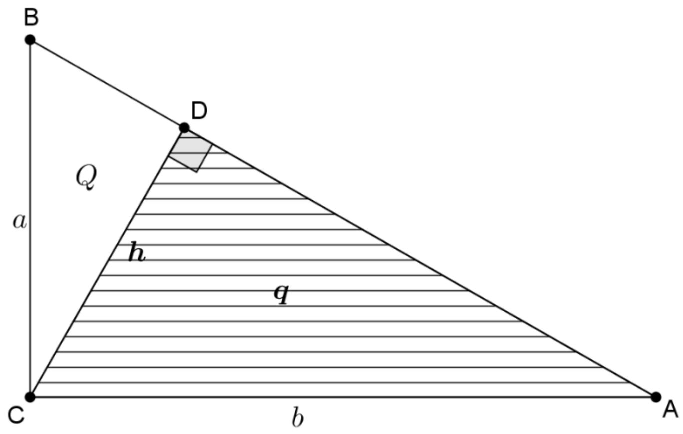
$S=rp$

$2S=ah_a=bh_b=ch_c$.

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{1}{S}=p\cdot\frac{1}{S}=\frac{1}{r}.$$

309. **Duota:** $S_{BCD}=Q$, $S_{CDA}=q$.

Raskite: BC, AC.



Pažymime $BC=a$, $AC=b$.

$S_{ABC}=S_{CBD}+S_{ACD}$,

$\frac{ab}{2}=Q+q$ (1)

Trikampiai BCD ir CAD panašūs, tai:

$\frac{Q}{q}=\frac{a^2}{b^2}$ (2).

Iš (1):

$$a=\frac{2\cdot(Q+q)}{b}.$$

Įrašome į (2):

$$\frac{Q}{q}=\frac{4\cdot(Q+q)^2}{b^4},$$

$$b=\sqrt{2\cdot(Q+q)\cdot\sqrt{\frac{q}{Q}}},$$

$$a=\frac{2(Q+q)}{\sqrt{2\cdot(Q+q)\cdot\sqrt{\frac{q}{Q}}}}=\sqrt{2\cdot(Q+q)\cdot\sqrt{\frac{Q}{q}}}$$

Ats.: $\sqrt{2\cdot(Q+q)\cdot\sqrt{\frac{Q}{q}}}$, $\sqrt{2\cdot(Q+q)\cdot\sqrt{\frac{q}{Q}}}$.

Onutė JABLONSKIENĖ
Viktorija SIČIŪNIENĖ

Planimetrijos kurso sisteminimas
4-asis sąsiuvinis

Atsakingoji redaktorė *S. Tauraitė*
Redaktorė *I. Šiugždinytė*

SL. 580. 1995 10 16. 4 1. 1. Tiražas 1000 egz. Užsak. Nr. 326
Išleido Lietuvos matematikos mokytojų asociacija.
Spaudė „Matricos“ spaustuvė, Žalgirio 108, 2645 Vilnius.
Kaina sutartinė