LIETUVOS MATEMATIKOS MOKYTOJŲ ASOCIACIJA

O. Jablonskienė

V. Sičiūnienė

Planimetrijos kurso sisteminimas

Metodikos etiudai

(5-asis sąsiuvinis)

Vilnius, 1995

UDK 514.1

Ja-16

Autorės

Onutė Jablonskienė, mokytoja ekspertė.

Viktorija Sičiūnienė, mokytoja ekspertė.

Recenzentai

Antanas Apynis, VU docentas.

Milda Vosylienė, PI docentė

ISBN 9986-467-19-5

ISBN 9986-467-20-9

Pratarmė

Leidinyje „Planimetrijos kurso sisteminimas“ (Metodikos etiudai, 5-asis sąsiuvinis) pateikiama 310–419 uždavinių sprendimo metodinės rekomendacijos, paaiškinimai ir nurodymai, kodėl pasirenkamas būtent toks sprendimo būdas. Šiame sąsiuvinyje rasite plotų santykiams bei trapecijoms skirtus uždavinius, kurie apims ir kitas planimetrijos kurso temas, kad kiekvienas suvoktų šio kurso visumą, sugebėtų įžvelgti ją bet kokiame kompleksinio turinio matematikos uždavinyje.

Autorės

Įvadas

2015 metais „Planimetrijos kurso sisteminimas“ (Metodikos etiudai, 5-asis sąsiuvinis) buvo atnaujintas elektroninėje formoje. Atnaujintame leidinyje ištaisytos klaidos, naujieji brėžiniai yra tikslesni, labiau atitinka uždavinių sąlygoje pateiktą informaciją.

matematikos mokytojas metodininkas A. Apynis

matematikos mokytoja ekspertė V. Bugailiškytė

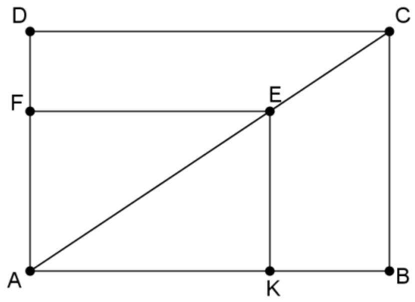
UŽDAVINIAI SU PLOTŲ SANTYKIU
Metodinės rekomendacijos

1. *Panašių daugiakampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui.*
   Žr. užd. 220, 309-328.
2. *Jei trikampiai turi bendrą kampą, tai jų plotų santykis lygus kampą sudarančių kraštinių sandaugų santykiui.*
   Žr. užd. 335-342.
   Dažnai patogu naudoti „išlankstymo metodą“, kuris remiasi liestinės teoremos išvada.
   Žr. užd. 85-91
3. *Jei dviejų trikampių aukštinės lygios, tai jų plotų santykis lygus pagrindų santykiui.*
   Žr. užd. 213-215, 217-219,224, 295, 329, 330-334, 343-351.

Uždavinių sprendimai

310. **Duota:** $AE : EC = 2:1$, *EF* statmena *AD*, *EK* statmena *AB*, $S_{ABCD} - S_{AKEF} = 20$.

Raskite: S_{ABCD}, S_{AKEF}.



$S_{ABCD} = S_1$,

$S_{AKEF} = S_2$.

$$\begin{cases} S_1 = S_2 + 20, \\ \dfrac{S_1}{S_2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2, \end{cases}$$ nes stačiakampiai panašūs.

$$\frac{S_2 + 20}{S_2} = \frac{9}{4},$$

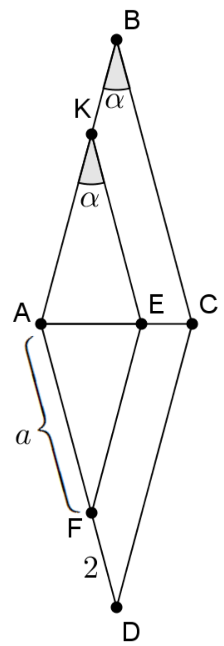
$S_2 = 16$, $S_1 = 36$.

Ats.: 36; 16.

311. **Duota:** *EF* lygiagreti *BC*, *EK* lygiagreti *AB*, $S_{ABCD} = 18$, $S_{AFEK} = 8$, $FB = 2$.

Raskite: α.

Rombo *AKEF* smailusis kampas lygus rombo *ABCD* smailiajam kampui α. Abu rombai panašūs.



Pažymime:

$S_{ABCD} = S_1$,

$S_{AFEK} = S_2$,

$AF = a$.

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{a+2}{a}\right)^2,$$

$$\frac{a+2}{a} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}},$$

$$\frac{a+2}{a} = \frac{3}{2},$$

$a = 4$.

$S_2 = a^2 \cdot \sin\alpha$,

$8 = 16 \cdot \sin\alpha$,

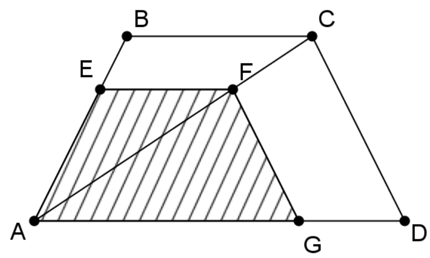
$$\sin\alpha = \frac{1}{2},$$

$\alpha = 30^\circ$.

Ats.: 30°.

312. **Duota:** $S_{ABCD} = 294$, *FK* lygiagreti *CD*, *EF* lygiagreti *BC*, $AE : BE = 5:2$.

Raskite: S_{AEFK}.



Abi trapecijos panašios, todėl:

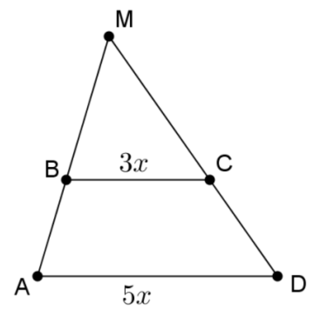
$$\frac{S_{AEFK}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2,$$

$$S_{AEFK} = 294 \cdot \frac{25}{49} = 150.$$

Ats.: 150.

313. **Duota:** *AD* lygiagreti *BC*, $AD : BC = 5:3$, $S_{ADM} = 50$.

Raskite: S_{ABCD}.



Trikampis *MBC* panašus į trikampį *AMD*:

$$\frac{S_{BMC}}{S_{AMD}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}.$$

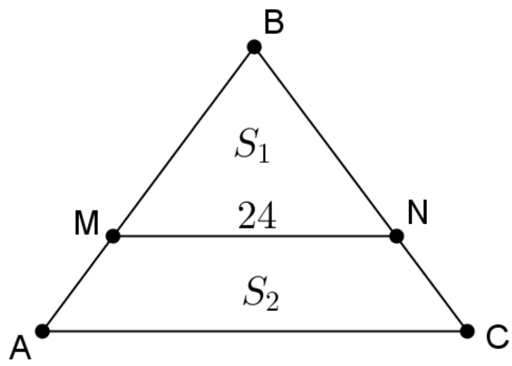
$$S_{BMC} = \frac{9}{25} \cdot S_{AMD} = \frac{9}{25} \cdot 50 = 18.$$

$$S_{ABCD} = 50 - 18 = 32.$$

Ats.: 32.

314. **Duota:** $AB = BC$, $MN = 24$, $S_{MBN} = S_1 = 192$, $S_{AMNC} = S_2 = 240$.

Raskite: *AB*.



Trikampis *BMN* panašus į trikampį *ABC*.

$$\frac{S_1}{S_1 + S_2} = k^2,$$

$$k^2 = \frac{4}{9},$$

$$k = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{AC}{MN} = \frac{2}{3},$$

$$AC = 36.$$

Trikampio aukštinė, nubrėžta į pagrindą *AC*, lygi $\sqrt{AB^2 - 18^2}$.

$$S_{ABC} = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} AC \cdot \sqrt{AB^2 - 18^2},$$

$$432 = 18 \cdot \sqrt{AB^2 - 18^2},$$

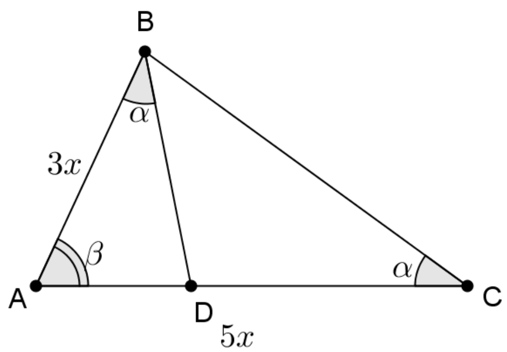
$$AB^2 = 900,$$

$$AB = 30.$$

Ats.: 30.

315. **Duota:** $AB : AC = 3:5$, $S_{ABC} = 300$, $\angle ABD = \angle C = \alpha$.

Raskite: S_{ABD}, S_{BCD}.



Trikampiai *ABD* ir *ABC* turi kampus α ir β, todėl jie panašūs.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2,$$

$$S_{ABD} = \frac{9}{25} \cdot 300 = 108.$$

$$S_{BDC} = 300 - 108 = 192.$$

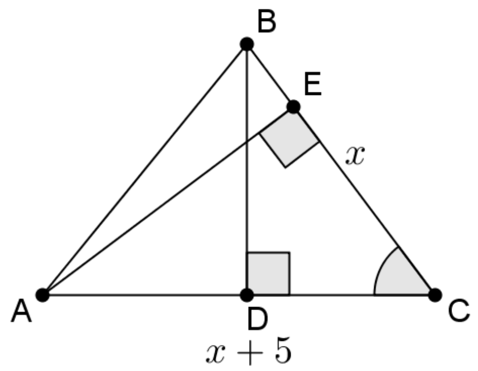
Ats.: 108; 192.

316. **Duota:** $AC - AB = 5$, $S_{BDC} = 96$, $S_{AEC} = 150$.

Raskite: *BC*, *AC*.

Pažymime: $BC = x$, $AC = x + 5$.

Trikampiai *BDC* ir *AEC* panašūs.



$$\frac{S_{BDC}}{S_{AEC}} = \left(\frac{x}{x+5}\right)^2,$$

$$\sqrt{96/150} = \frac{x}{x+5},$$

$$\frac{x}{x+5} = \frac{4}{5},$$

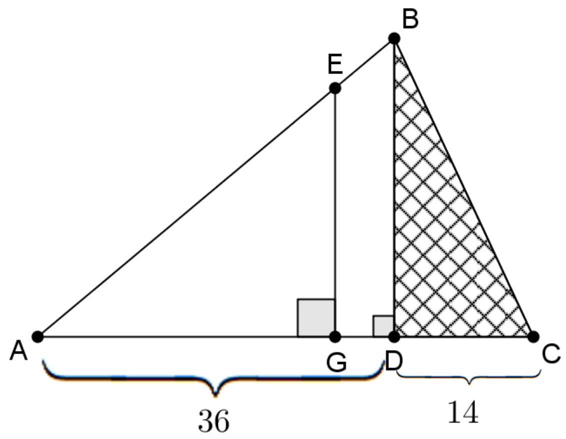
$x = 20$.

Ats.: 20, 25.

317. **Duota:** $AD = 36$, $DC = 14$, $S_{AEG} = S_{EGCB}$.

Raskite: *AG*, *GC*.

Trikampiai *ABD* ir *BCD* turi tą pačią aukštinę *BD*, todėl:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \frac{36}{14} = \frac{18}{7}.$$

$$S_{ABD} = \frac{18}{25} \cdot S_{ABC},$$

$$S_{AEG} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABC}.$$

Trikampiai *AEG* ir *ABD* panašūs, todėl

$$\frac{S_{ABD}}{S_{AGE}} = \frac{\frac{18}{25} \cdot S_{ABC}}{\frac{1}{2} \cdot S_{ABC}} = \frac{36}{25}.$$

Panašių trikampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui.

$$\frac{36}{25} = \frac{36^2}{AG^2},$$

$AG = 30$,

$GC = 36 + 14 - 30 = 20$.

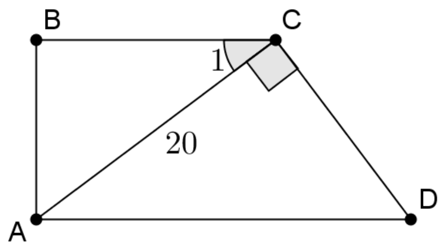
Ats.: 30, 20.

318. **Duota:** *AD* lygiagreti *BC*, $\angle A = \angle B = 90^\circ$, *AC* statmena *CD*, $AC = 20$, $S_{ABC} : S_{ACD} = 16 : 25$.

Raskite: P_{ABCD}.

Pažymime: $S_{ABC} = S_1$, $S_{ACD} = S_2$.

Kampai 1 ir 2 lygūs, todėl trikampiai *ABC* ir *ACD* panašūs.



$$\frac{S_1}{S_2} = k^2,$$

$$k = \sqrt{16/25} = \frac{4}{5},$$

$$\frac{AC}{AD} = k,$$

$\frac{20}{AD}=\frac{4}{5}$,

$AD=25$.

Trikampiui ADC taikome Pitagoro teoremą:

$CD=\sqrt{25^2-20^2}=15$.

$\frac{AB}{CD}=\frac{k}{15}$,

$AB=15\cdot\frac{4}{5}=12$.

Trikampiui ABC taikome Pitagoro teoremą:

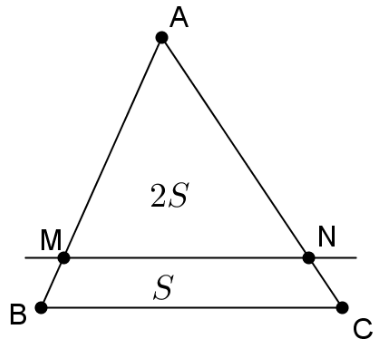
$BC=\sqrt{20^2-12^2}=16$.

$P_{ABCD}=25+15+12+16=68$.

Ats.: 68.

319. **Duota:** NM lygiagreti BC, $S_{AMN}:S_{BMNC}=2:1$.

Raskite: $AM:MB$.



$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=k^2$,

$\frac{2S}{3S}=k^2$,

$k=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

$\frac{AM}{AB}=\sqrt{\frac{2}{3}}$,

$\frac{\frac{AM}{MB}}{\frac{AM}{MB}+\frac{MB}{MB}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$,

$\frac{AM}{MB}=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{AM}{MB}+\sqrt{\frac{2}{3}}$,

$\frac{AM}{MB}=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2}=\frac{\sqrt{6}+2}{1}$.

Ats.: $\sqrt{6}+2:1$.

320. **Duota:** rombai $ABCD_1$ ir $BECF$ panašūs, $S_{ABCD_1}=1536$, $S_{BFCE}=600$.

Raskite: BF (pažymime x).

Rombai panašūs, todėl jų smailieji kampai lygūs 2α.

Iš trikampio BDF:

$BD=x\cdot\cos\alpha$, tai $BC=2x\cdot\cos\alpha$.

$S_{ABCD_1}=BC^2\cdot\sin 2\alpha$,

$S_{BFCE}=BF^2\cdot\sin 2\alpha$. (1)

$$\frac{S_{ABCD_1}}{S_{BFCE}} = \frac{BC}{BF},$$

$$\frac{1536}{600} = \frac{4x^2 \cdot \cos^2 x}{x^2},$$

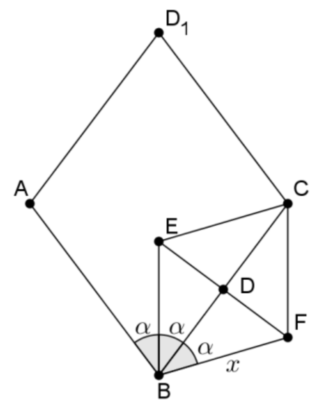
$\cos\alpha = 0{,}8$, $\sin\alpha = 0{,}6$.

$\sin 2\alpha = 0{,}96$.

Įrašome į (1) išraišką:

$600 = x^2 \cdot 0{,}96$,

$x = 25$.

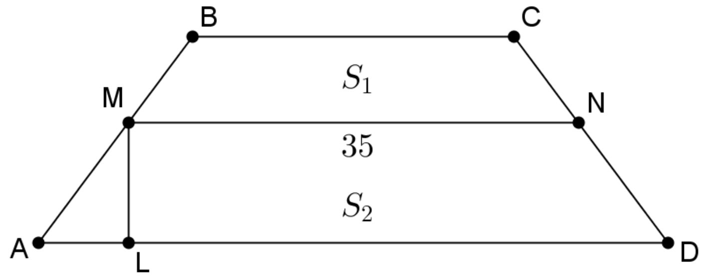


Ats.: 25.

321. **Duota:** $MN = 35$, $AB = CD$, $S_{BCNM} = S_1 = 200$, $S_{AMND} = S_2 = 392$.

Raskite: AB.

Kadangi trapecijos panašios, tai:



$$\frac{S_1}{S_2} = k^2,$$

$$k^2 = \frac{200}{392},$$

$$k = \frac{5}{7}.$$

$$\frac{MN}{AD} = k,$$

$$AD = 35 : \frac{5}{7} = 49.$$

$BM : AM = 5:7$, todėl $BM = 5x$, $AM = 7x$.

$$AL = \frac{AD - MN}{2},\ AL = \frac{49-35}{2} = 7.$$

Trikampiui AML taikome Pitagoro teoremą:

$$ML = \sqrt{49x^2 - 49}.$$

$$S_2 = \frac{AD + MN}{2} \cdot ML,$$

$$392 = \frac{49+35}{2} \cdot \sqrt{49x^2 - 49},$$

$$x = \frac{5}{3}.$$

$AB = 12x$,

$$AB = 12 \cdot \frac{5}{3} = 20.$$

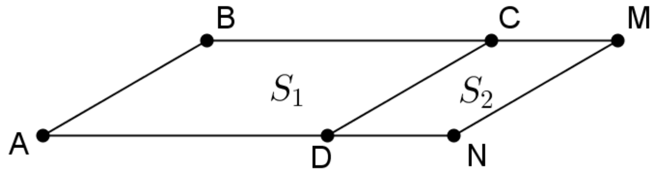
Ats.: 20.

322. **Duota:** $S_1 = 432$, $S_2 = 192$, $P_{ABCD} - P_{CMND} = 40$.

Raskite: lygiagretainių $ABCD$ ir $CMND$ aukštines.

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2,$$

$$\frac{432}{192} = k^2,$$



$k = \frac{3}{2}$.

$\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DN} = \frac{3}{2}$.

Pažymime: $AD = 3x$, $DC = 2x$, $DN = \frac{4}{3}x$.

$P_{ABCD} - P_{CMND} = 40$,

$10x - \frac{20}{3}x = 40$,

$x = 12$.

$AD = 36$, $DC = 24$, $DN = 16$.

$S_1 = AD \cdot H_1$ arba $S_1 = DC \cdot H_2$,

$H_1 = \frac{432}{36} = 12$ arba $H_2 = \frac{432}{24} = 18$.

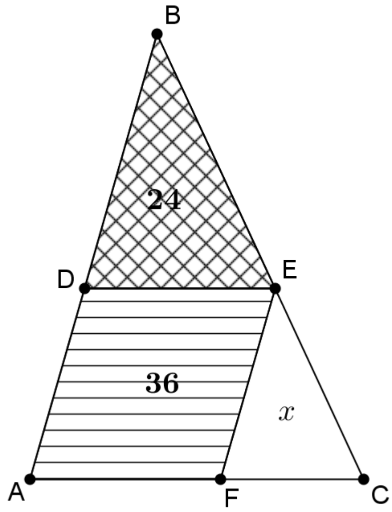
$S_2 = DC \cdot h_1$ arba $S_2 = DN \cdot h_2$,

$h_1 = \frac{192}{24} = 12$ arba $h_2 = \frac{192}{16} = 8$.

Ats.: 12; 18 arba 8; 12.

323. **Duota:** $S_{ADEF} = 36$, $S_{DBE} = 24$.

Raskite: S_{ABC}.



S_{EFC} pažymime *x*.

Trikampiai *BDE* ir *ABC* panašūs, trikampiai *EFC* ir *ABC* panašūs,

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{24}{60+x}} = \frac{DE}{AC}, \\ \sqrt{\frac{x}{60+x}} = \frac{FC}{AC}. \end{cases}$$

$\sqrt{\frac{24}{60+x}} + \sqrt{\frac{x}{60+x}} = \frac{DE+FC}{AC} = 1$,

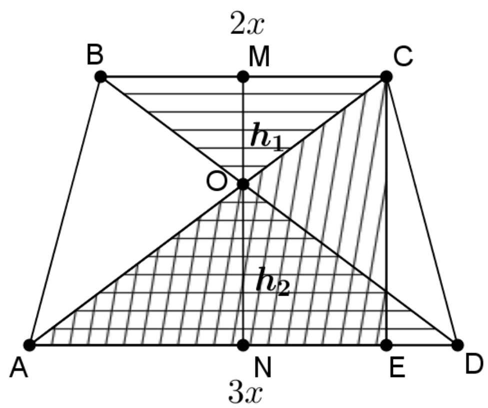
$\sqrt{24} + \sqrt{x} = \sqrt{60+x}$,

$x = 13{,}5$.

$S_{ABC} = 24 + 36 + 13{,}5 = 73{,}5$.

324. **Duota:** $AB = CD$, $S_{BOC} = 48$, $S_{AOD} = 108$, vidurio linija – 20.

Raskite: *BD*.



Trikampiai *BOC* ir *AOD* panašūs:

$\frac{S_{BOC}}{S_{AOD}} = k^2$,

$\frac{48}{108} = k^2$,

$k = \frac{2}{3}$.

$\frac{BC}{AD} = \frac{2}{3}$,

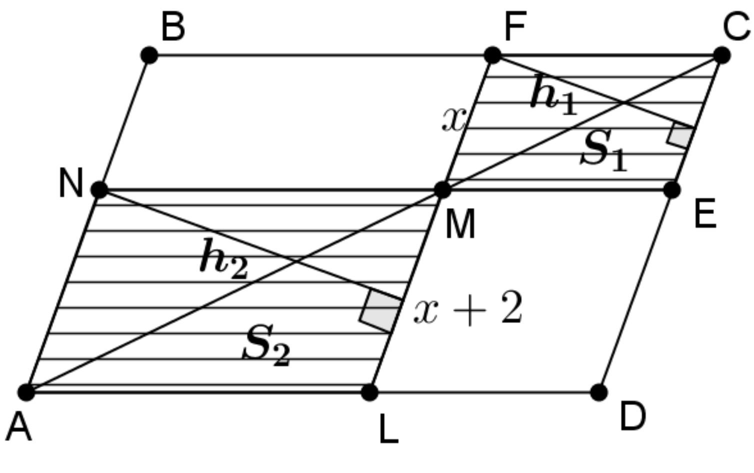
$BC = 2x$,
$AD = 3x$.
$20 = \dfrac{2x + 3x}{2}$,
$x = 8$.
$BC = 16$, $AD = 24$.
$S_{BOC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot h_1$,
$h_1 = \dfrac{2 \cdot 48}{16} = 6$.
$S_{AOD} = \dfrac{1}{2} AD \cdot h_2$,
$h_2 = \dfrac{2 \cdot 108}{24} = 9$.
$CE = MN = h_1 + h_2 = 15$.
$ED = \dfrac{AD - BC}{2}$,
$ED = \dfrac{24 - 16}{2} = 4$, $AE = 20$.
Trikampiui *ACE* taikome Pitagoro teoremą:
$AC = \sqrt{AE^2 + CE^2}$,
$BD = AC = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$.

Ats.: 25.

325. **Duota:** $S_{ALMN} = S_2 = 54$, $S_{MECF} = S_1 = 24$, $LM - MF = 2$.

Raskite: S_{ABCD}.

Pažymime: $MF = x$, $ML = x + 2$.



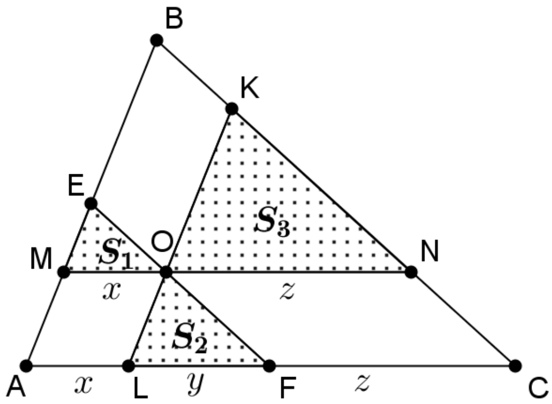
$\dfrac{S_1}{S_2} = k^2$,
$\dfrac{24}{54} = k^2$,
$k = \dfrac{2}{3}$.
$\dfrac{FM}{ML} = \dfrac{2}{3}$,
$\dfrac{x}{x+2} = \dfrac{2}{3}$,
$x = 4$.
$FM = 4$, $LM = 6$.
$S_2 = ML \cdot h_2$, $S_2 = MF \cdot h_1$,
$h_2 = \dfrac{54}{6} = 9$, $h_1 = \dfrac{24}{4} = 6$.
$CD = LF = 10$.
Aukštinė, nubrėžta į *CD*, lygi $h_1 + h_2$, ir lygi 15.
$S_{ABCD} = 10 \cdot 15 = 150$.

Ats.: 150.

326. **Duota:** *MN* lygiagreti *AC*, *LK* lygiagreti *AB*, *EF* lygiagreti *BC*. $S_{MOE}=S_1$, $S_{LOF}=S_2$, $S_{OKN}=S_3$.

Raskite: S_{ABC} (pažymime *S*).

Trikampiai *MEO*, *OKN*, *LOF* yra panašūs į trikampį *ABC*, todėl:



$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+y+z}=\dfrac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}, \\ \dfrac{y}{x+y+z}=\dfrac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}, \\ \dfrac{z}{x+y+z}=\dfrac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}, \end{cases}$$

$$1=\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}},$$

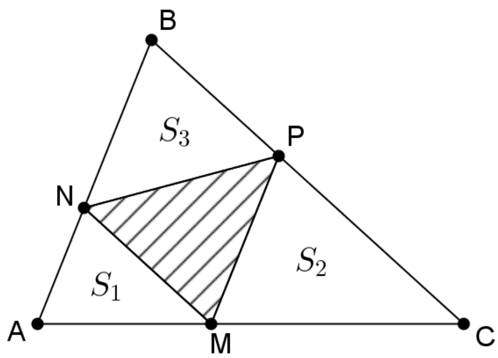
$$S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2.$$

Ats.: $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$.

327. **Duota:** *MP* lygiagreti *AB*, *MN* lygiagreti *BC*, $S_{ANM}=S_1$, $S_{MPC}=S_2$.

Raskite: $S_{NBP}=S_3$.

Trikampis *AMN* panašus į trikampi *ABC*, o trikampis *MPC* panašus į trikampį *ABC*:



$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\dfrac{x}{x+y}, \\ \dfrac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\dfrac{y}{x+y}, \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=1.$$

$$S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2.$$

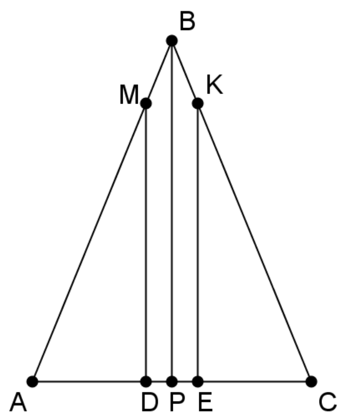
$$S_3=\frac{1}{2}S_{NMPB}=\frac{1}{2}\left(S-S_1-S_2\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2-S_1-S_2\right)=\sqrt{S_1\cdot S_2}.$$

Ats.: $\sqrt{S_1\cdot S_2}$.

328. **Duota:** Kampai *A* ir *C* smailieji, $S_{AMD}=S_{BKEDM}=S_{EKC}$, $MD=KE=AC$.

Raskite: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Kadangi $MD=KE$ ir kampai *A* ir *C* smailieji, tai $\angle A=\angle C$ ir $AB=BC$. Trikampiai *AMD* ir *ABD* panašūs.



$$S_{AMD}=\frac{2}{3}\cdot S_{ABP}.$$

$$BP=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot MD=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot AC=2\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot AP.$$

$$\operatorname{tg}A=\operatorname{tg}C=\frac{BP}{AP}=\sqrt{6}.$$

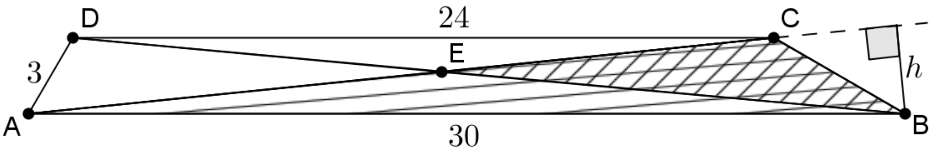
$$A=C=\operatorname{arctg}\sqrt{6},$$

$B = \pi - 2 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{6}$.

Ats.: $\operatorname{arctg} \sqrt{6}$; $\pi - 2 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{6}$; $\operatorname{arctg} \sqrt{6}$.

329. **Duota:** *AB* lygiagreti *DC*, $AB = 30$, $DC = 24$, $AD = 3$, $\angle DAB = 60^\circ$.

Raskite: S_{BCE}.



Iš viršūnės *B* brėžtą trikampio *ABC* aukštinę pažymime *h*. Ji yra ir trikampio *EBC* aukštinė.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot h$,

$S_{BCE} = \frac{1}{2} CE \cdot h$.

$\frac{S_{ABC}}{S_{BCE}} = \frac{AC}{CE} = 1 + \frac{AE}{CE}$ (1).

Kampas *AEB* lygus kampui *CED*, o kampas *ABE* – kampui *CDE*, todėl trikampiai *ABE* ir *CED* panašūs:

$\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CD}$,

$\frac{AE}{CE} = \frac{30}{24}$.

$\frac{AE}{CE} = \frac{5}{4}$ (2).

(2) išraišką įrašome į (1) lygybę:

$S_{BCE} = \frac{4}{9} S_{ABC}$.

Trikampiai *ABC* ir *ABD* turi bendrą kraštinę *AB*. Kadangi *AB* lygiagreti *CD*, tai šių trikampių aukštinės, nubrėžtos iš *C* ir *D*, yra lygios.

$S_{ABC} = S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin DAB$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\ 30 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{45\sqrt{3}}{2}$.

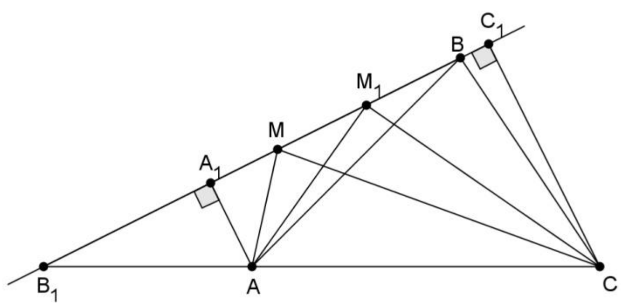
$S_{BCE} = \frac{4}{9} \cdot \frac{45\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

Ats.: $10\sqrt{3}$.

330. **Duota:** trikampis *ABC*, $M \in BB_1$.

Įrodykite: $\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = const$.

Iš *A* ir *C* brėžiame statmenis į BB_1.



$\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = \frac{\frac{1}{2} BM \cdot AA_1}{\frac{1}{2} BM \cdot CC_1} = \frac{AA_1}{CC_1}$.

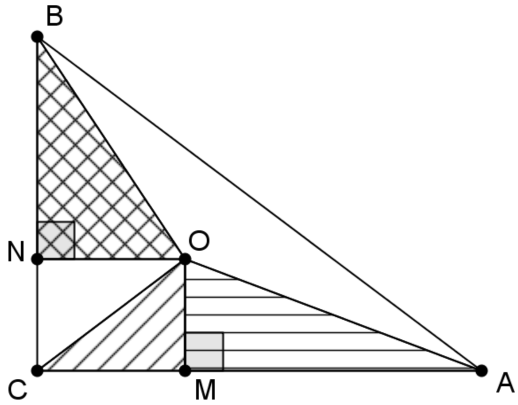
Tegul taškas M_1 nesutampa su tašku *M*.

$$\frac{S_{ABM_1}}{S_{CBM_1}} = \frac{\frac{1}{2} BM_1 \cdot AA_1}{\frac{1}{2} BM_1 \cdot CC_1} = \frac{AA_1}{CC_1}.$$

Taigi $\dfrac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = const$.

331. **Duota:** $S_{AOB} = S_{OAC} = S_{OBC}$.

Įrodykite: $OA^2 + OB^2 = 5 \cdot OC^2$.



Trikampiai *ABC* ir *OCA* turi tą pačią kraštinę *AC*, todėl

$\dfrac{S_{ABC}}{S_{OCA}} = \dfrac{BC}{OM}$,

$\dfrac{3S}{S} = \dfrac{BC}{OM}$,

$BC = 3 \cdot OM$.

$NC = OM$, $BN = 2 \cdot OM$.

Analogiškai $ON = \dfrac{1}{3} AC$, $AM = 2 \cdot NO$.

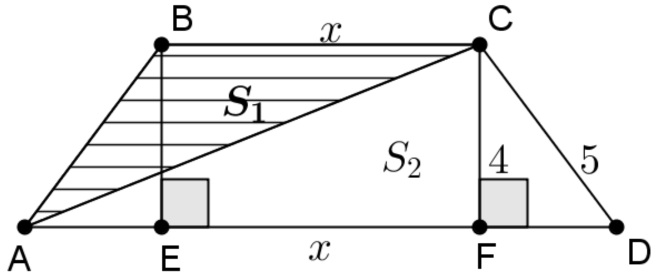
Trikampiams *BNO* ir *OMA* taikome Pitagoro teoremą:

$$\begin{cases} BO^2 = BN^2 + NO^2, \\ AO^2 = OM^2 + MA^2. \end{cases}$$

$$AO^2 + BO^2 = \left(BN^2 + MA^2\right) + NO^2 + OM^2 = \left(4 \cdot OM^2 + 4 \cdot ON^2\right) + \left(CM^2 + OM^2\right) =$$
$$= 4 \cdot OC^2 + OC^2 = 5 \cdot OC^2.$$

332. **Duota:** $CF = 4$, $AB = CD = 5$, $S_1 : S_2 = 7 : 13$.

Raskite: P_{ABCD}.



Remiamės Pitagoro teorema:

$AE = FD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Trikampių *ABC* ir *ACD* aukštinės, nubrėžtos į kraštines *BC* ir *AD* sutampa su trapecijos aukštine, todėl:

$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{BC}{AD}$.

Pažymime: $BC = x$, $AD = x + 6$;

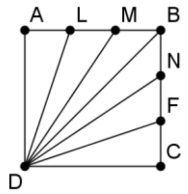
$\dfrac{7}{13} = \dfrac{x}{x+6}$,

$x = 7$.

$P_{ABCD} = 5 + 5 + 7 + 7 + 6 = 30$.

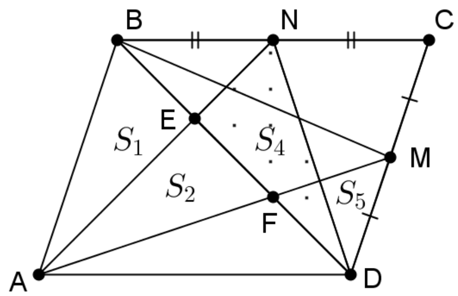
Ats. 30.

333. Jei AB ir BC padalysime į tris lygias dalis, tai susidariusių šešių trikampių plotai bus lygūs, nes aukštinės sutaps su kvadrato kraštinėmis.



Todėl $S_{AMD} = S_{DMN} = S_{DNC}$, jei $MB = BN = \frac{1}{3} AB$.

334. **Duota:** $BN = NC$, $DM = MC$.
Įrodykite: $BE = EF = FD$.



$BE = EF = FD$, jeigu $S_{ABE} = S_{AEF} = S_{AFD}$ (trikampiai ABE, AEF ir AFD turi tą pačią aukštinę).

Pažymime: $S_{ABE} = S_1$, $S_{AEF} = S_2$, $S_{AFD} = S_3$,

$S_{END} = S_4$, $S_{BDM} = S_5$,.

$S_1 = S_4$.

$S_4 = \frac{1}{2}(S_2 + S_3)$, tai ir $S_1 = \frac{1}{2}(S_2 + S_3)$.

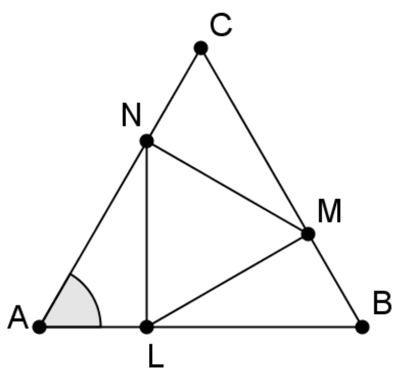
$S_5 = S_3$, tai $S_3 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$.

Tuomet $S_1 - S_3 = \frac{1}{2}(S_3 - S_1)$.

$S_1 = S_2 = S_3$.

Taigi $BE = EF = FD$.

335. **Duota:** $AC = BC = AB = a$, $CN : NA = BM : MC = AL : LB = 1:2$.
Raskite: S_{LMN}.



$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$AL = \frac{1}{3}a,\ AN = \frac{2}{3}a.$$

Kampas A bendras trikampiams ABC ir ANL, todėl taikome plotų santykio teoremą:

$$\frac{S_{ANL}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{3}a \cdot \frac{2}{3}a}{a \cdot a} = \frac{2}{9}.$$

$$S_{ANL} = \frac{2}{9} S_{ABC}.$$

$$S_{NLM} = S_{ABC} - 3 \cdot S_{ANL} = \frac{1}{3} S_{ABC}.$$

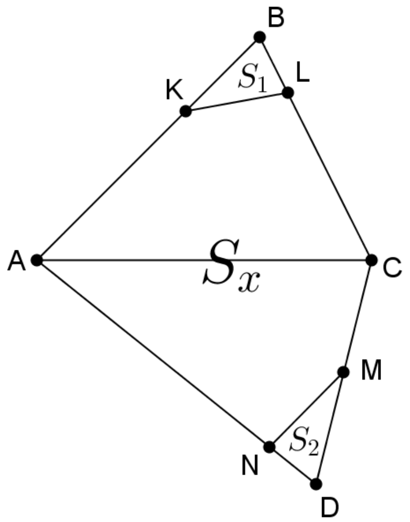
$$S_{NLM} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{12}.$$

Ats.: $\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{12}$.

336. **Duota:** $S_{ABC}=1,\ AK:KB=2:1,\ BL:LC=1:3,\ CM:MD=1:1,$ $DN:NA=1:5$.

Raskite: S_{AKLCMN}.

Brėžiame AC.



$$\frac{S_1}{S_{ABC}}=\frac{BK\cdot BL}{AB\cdot BC}=\frac{\frac{1}{3}AB\cdot\frac{1}{4}BC}{AB\cdot BC}=\frac{1}{12}.$$

$$S_1=\frac{1}{12}S_{ABC}.$$

$$\frac{S_2}{S_{ACD}}=\frac{ND\cdot DM}{AD\cdot DC}=\frac{\frac{1}{6}AD\cdot\frac{1}{2}DC}{AD\cdot DC}=\frac{1}{12}.$$

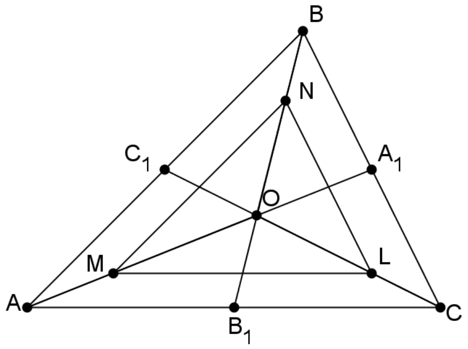
$$S_2=\frac{1}{12}S_{ACD}.$$

$$S_{AKLCMN}=1-(S_1+S_2)=1-\frac{1}{12}(S_{ABC}+S_{ACD})=\frac{11}{12}.$$

Ats.: $\frac{11}{12}$.

337. **Duota:** $OB_1:OB=A_1O:OA=OC_1:OC=1:3$.

Raskite: $\frac{S_{ABC}}{S_{MNL}}$.



$$\frac{S_{ONL}}{S_{BOC}}=\frac{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot BB_1\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot CC_1}{\frac{2}{3}BB_1\cdot\frac{2}{3}CC_1}=\frac{25\cdot 9}{144\cdot 4}=\frac{25}{64}.$$

$$\frac{S_{OML}}{S_{AOC}}=\frac{S_{ONM}}{S_{AOB}}=\frac{25}{64}.$$

$$S_{MNL}=S_{ONL}+S_{OML}+S_{ONM}=\frac{25}{64}(S_{BOC}+S_{AOC}+S_{AOB})=\frac{25}{64}S_{ABC}.$$

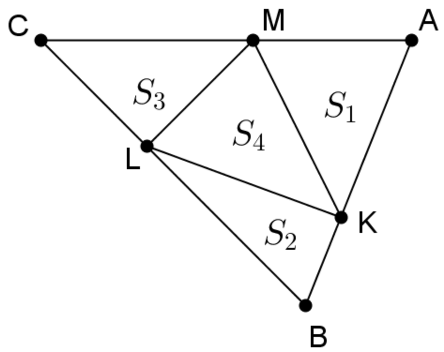
$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNL}}=\frac{64}{25}=2{,}56.$$

Ats.: 2,56.

338. **Duota:** $AK=2KB,\ 2BL=3LC,\ 3CM=4MA,\ S_{ABC}=1$.

Raskite: $S_{AKM}=S_1,\ S_{BKL}=S_2,\ S_{CLM}=S_3,\ S_{KLM}=S_4$.

$AK:KB=2:1,\ BL:LC=3:2,\ CM:MA=4:3$.



$$\frac{S_1}{S_{ABC}}=\frac{AK\cdot AM}{AB\cdot AC}=\frac{\frac{2}{3}AB\cdot\frac{3}{7}AC}{AB\cdot AC}=\frac{2}{7};\qquad S_1=\frac{2}{7}.$$

$$\frac{S_2}{S_{ABC}}=\frac{BL\cdot BK}{BC\cdot AB}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5};\qquad S_2=\frac{1}{5}.$$

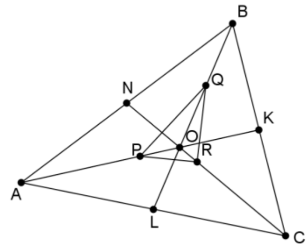
$$\frac{S_3}{S_{ABC}}=\frac{LC\cdot MC}{BC\cdot AC}=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{8}{35};\qquad S_3=\frac{8}{35}.$$

$$S_4 = 1 - \frac{2}{7} - \frac{1}{5} - \frac{8}{35} = \frac{2}{7}.$$

Ats.: $\frac{2}{7}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{8}{35}$; $\frac{2}{7}$.

339. **Duota:** $S_{ABC} = 1$, $BK = KC$, $AL = LC$, $AN = NB$, $\frac{AP}{PK} = 1$, $\frac{BQ}{QL} = \frac{1}{2}$, $\frac{CR}{RN} = \frac{5}{4}$.

Raskite: S_{PQR}.



$$\frac{S_{POQ}}{S_{AOB}} = \frac{PO \cdot OQ}{AO \cdot OB} = \frac{\frac{1}{4}AO \cdot \frac{1}{2}OB}{AO \cdot OB} = \frac{1}{8},$$

$$\frac{S_{QOR}}{S_{BOC}} = \frac{QO \cdot OR}{OB \cdot OC} = \frac{\frac{1}{2}OB \cdot \frac{1}{6}OC}{OB \cdot OC} = \frac{1}{12},$$

$$\frac{S_{OPR}}{S_{AOC}} = \frac{OR \cdot OP}{OB \cdot OC} = \frac{\frac{1}{4}AO \cdot \frac{1}{6}OC}{AO \cdot OC} = \frac{1}{24},$$

$$S_{AOB} = S_{BOC} = S_{AOC} = \frac{1}{3} S_{ABC}.$$

$$S_{PQR} = \frac{1}{8} S_{AOB} + \frac{1}{12} S_{BOC} + \frac{1}{24} S_{AOC} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right) = \frac{1}{12}.$$

Ats.: $\frac{1}{12}$.

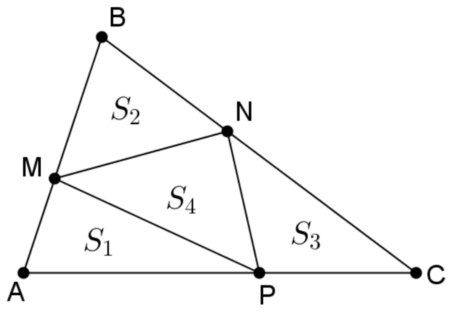
340. **Duota:** $S_{ABC} = S$, $S_{MNP} = 0{,}28 \cdot S_{ABC}$, $AM : MB = BN : NC = CP : PA$ (šį santykį pažymime $m : n = k$).

Raskite: k.

$AM = mx$, $MB = nx$, $AB = (m+n) \cdot y$.

$$\frac{S_1}{S_{ABC}} = \frac{AM \cdot AP}{AB \cdot AC} = \frac{mx \cdot ny}{(m+n) \cdot x \cdot (m+n) \cdot y} = \frac{mn}{(m+n)^2} = \frac{k}{(1+k)^2}.$$

Analogiškai



$$\frac{S_2}{S_{ABC}} = \frac{S_3}{S_{ABC}} = \frac{k}{(1+k)^2}.$$

Kadangi $S_4 = 0{,}28 \cdot S_{ABC}$ arba $\frac{S_4}{S_{ABC}} = \frac{7}{25}$, tai

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{S_{ABC}} = \frac{3k}{(1+k)^2} + \frac{7}{25},$$

$$\frac{3k}{(1+k)^2} + \frac{7}{25} = 1,$$

$$6k^2 - 13k + 6 = 0,$$

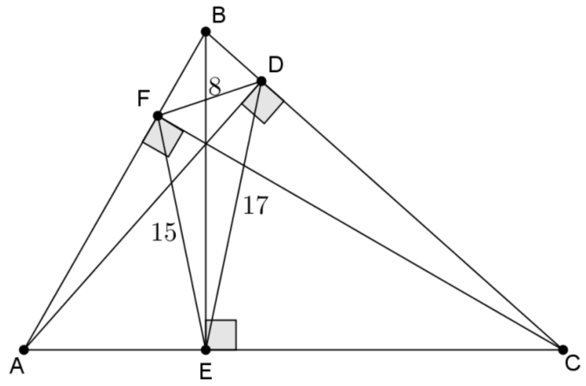
$$k_1 = \frac{3}{2},$$

$$k_2 = \frac{2}{3}.$$

Ats.: $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$.

341. **Duota:** $FD=8$, $FE=15$, $DE=17$.

Raskite: S_{ABC}.



Trikampis *ABE* panašus į trikampį *AFC*,
trikampis *DAB* panašus į trikampį *FBC*,
trikampis *DAC* panašus į trikampį *BEC*, todėl:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\cos A,$$

$$\frac{FB}{BC}=\frac{BD}{AB}=\cos B,$$

$$\frac{DC}{AC}=\frac{EC}{BC}=\cos C.$$

Taikome plotų santykio teoremą:

$$\frac{S_{AFE}}{S_{ABC}}=\frac{AE\cdot AF}{AB\cdot AC}=\cos^2 A,$$

$$\frac{S_{BFD}}{S_{ABC}}=\frac{BF\cdot BD}{BC\cdot AB}=\cos^2 B,$$

$$\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}=\frac{DC\cdot EC}{AC\cdot BC}=\cos^2 C,$$

$$S_{ABC}=S_{EFD}+S_{AFE}+S_{BFD}+S_{DCE},$$

$$S_{ABC}=60+S_{ABC}\cdot\left(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\right),$$

$$S_{ABC}=\frac{60}{1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C}=\frac{60}{1-\frac{1}{2}\left(1+\cos 2A+1+\cos 2B+1+\cos 2C\right)}$$

$$S_{ABC}=\frac{60\cdot 2}{-1-\cos 2A-\cos 2B-\cos 2C}=\frac{120}{\cos D+\cos E+\cos F-1}=\frac{120}{\frac{8}{17}+\frac{15}{17}+0-1}=340.$$

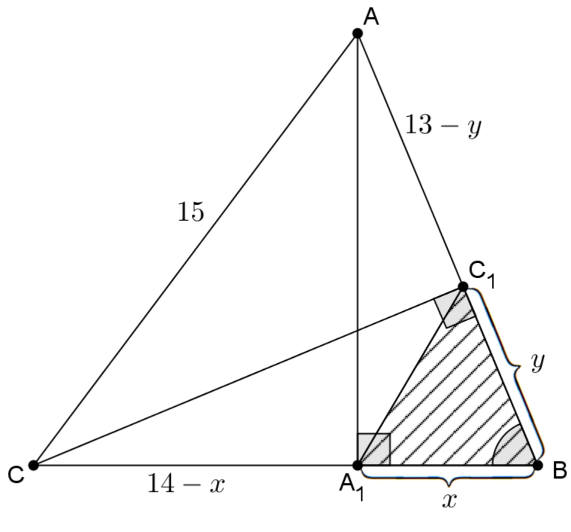
Ats.: 340.

342. **Duota:** $AB=13$, $BC=14$, $AC=15$.

Raskite: $S_{BC_1A_1}$.

Pažymime $A_1B=x$, $CA_1=14-x$, $BC_1=y$, $AC_1=13-y$.

Trikampiams ACA_1 ir ABA_1, o vėliau ACC_1 ir CC_1B taikome Pitagoro teoremą:



$$AC^2-CA_1^2=AB^2-A_1B^2,$$

$$15^2-(14-x)^2=13^2-x^2,$$

$$x=5.$$

$$AC^2-AC_1^2=CB^2-BC_1^2,$$

$$15^2-(13-y)^2=14^2-y^2,$$

$$y=\frac{70}{13}.$$

Taikome plotų santykio teoremą:

$$S_{BC_1A_1}=S_{ABC}\cdot\frac{\frac{70}{13}\cdot 5}{13\cdot 14}.$$

Iš trikampio AA_1B:

$$AA_1=\sqrt{13^2-5^2}=12.$$

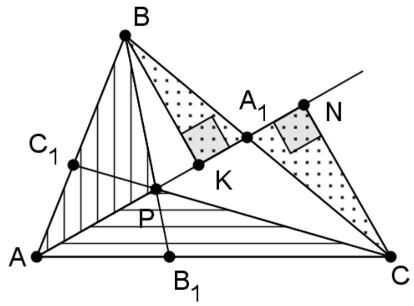
$$S_{ABC} = \frac{14 \cdot 12}{2} = 84,$$

$$S_{BC_1A_1} = \frac{84 \cdot 70 \cdot 5}{13 \cdot 13 \cdot 14} = 12\frac{72}{169}.$$

Ats.: $12\frac{72}{169}$.

343. **Duota:** AA_1, BB_1, CC_1 susikerta viename taške *P*.

Įrodykite: $\dfrac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \dfrac{A_1B}{A_1C}$.



Brėžiame *BK*, statmeną AA_1 ir *NC*, statmeną AA_1.
Trikampiai *ABP* ir *APC* turi bendrą kraštinę *AP*, todėl:

$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{BK}{CN}.$$

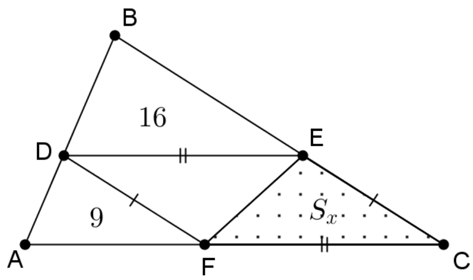
Trikampiai BKA_1 ir NCA_1 panašūs, todėl:

$$\frac{BK}{CN} = \frac{BA_1}{A_1C},$$

$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{A_1B}{A_1C}.$$

344. **Duota:** *DE* lygiagreti *AC*, *DF* lygiagreti *BC*, $S_{ADE} = 9$, $S_{BDE} = 16$.

Raskite: S_{CEF} (pažymime S_x).



Trikampiai *DFA* ir *ABC* panašūs:

$$\frac{AC}{AF} = \frac{BC}{DF} = \frac{BC}{EC}.$$

$$\frac{S_x}{9} = \frac{FC}{AF} = \frac{AC - AF}{AF} = \frac{AC}{AF} - 1.$$

$$\frac{16}{S_x} = \frac{BE}{EC} = \frac{BC - EC}{EC} = \frac{BC}{EC} - 1.$$

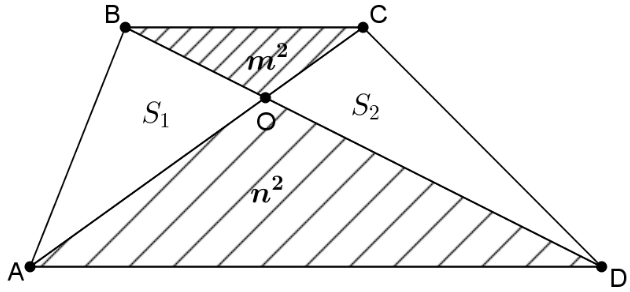
$$\frac{S_x}{9} = \frac{16}{S_x},$$

$$S_x = 12.$$

Ats.: 12.

345. **Duota:** $S_{BOC} = m^2$, $S_{AOD} = n^2$, $m + n = p$.

Raskite: S_{ABCD}.



$$S_{ABC} = S_{BCD}$$

$$-\;\underline{\;m^2 = m^2\;}$$

$$S_1 = S_2.$$

$$\frac{S_1}{m^2} = \frac{AO}{OC} = \frac{n^2}{S_1},$$

$$S_1^2 = m^2 \cdot n^2,$$

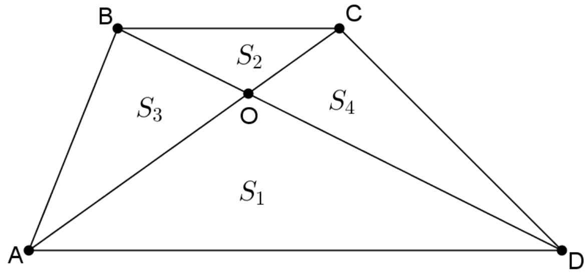
$$S_1 = m \cdot n.$$

$S_{ABCD} = n^2 + m^2 + 2S_1 = (n+m)^2 = p^2$.

Ats.: p^2.

346. **Duota:** $S_{BOC} = S_2$, $S_{AOD} = S_1$.

Raskite: S_{ABCD}.



I būdas.

$\dfrac{S_3}{S_2} = \dfrac{AO}{OC} = \dfrac{S_1}{S_4}$,

$S_3 S_4 = S_1 S_2$.

$S_3 + S_1 = S_4 + S_1$,

$S_3 = S_4 = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

II būdas.

$S_{ABC} = S_{BCD}$.

$$\begin{array}{l} -\\ \quad S_2 = S_2, \\ \hline \quad S_3 = S_4, \end{array}$$

$\dfrac{S_3}{S_2} = \dfrac{S_1}{S_4}$,

$S_3 = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

Ats.: $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

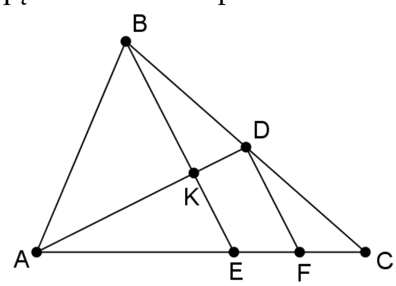
347. **Duota:** $BD = DC$, $AK : KD = 3:1$.

Raskite: $\dfrac{S_{ABE}}{S_{CBE}}$.

Trikampiai *ABE* ir *CBE* turi tą pačią aukštinę.

$\dfrac{S_{ABE}}{S_{CBE}} = \dfrac{AE}{EC}$.

Brėžiame *DF*, lygiagrečią *BE*. Trikampis *AKE* panašus į trikampį *ADF* ir trikampis *DFC* panašus į trikampį *BEC*, todėl:



$\dfrac{AE}{EF} = \dfrac{AK}{KD} = \dfrac{3}{1}$,

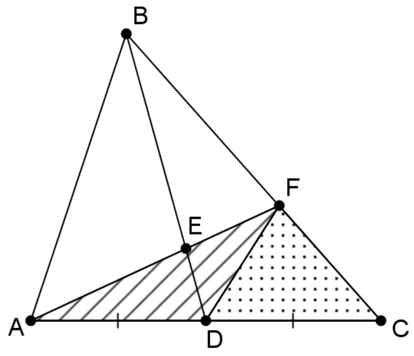
$\dfrac{EF}{FC} = \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{1}{1}$,

$\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AE}{2EF} = \dfrac{3}{2}$.

Ats.: $\dfrac{3}{2}$.

348. **Duota:** $S_{ABC} = S$, $AD = DC$, $ED = \frac{1}{4} BD$.

Raskite: S_{AFC}.



$$+\begin{cases} S_{AED} = \frac{1}{4} S_{ABD}, \\ S_{EFD} = \frac{1}{4} S_{BFD}, \end{cases}$$

$$S_{AFD} = \frac{1}{4} S_{ABFD}.$$

$$+\begin{cases} 4S_{ADF} = S_{ABFD}, \\ S_{ADF} = S_{FDC}. \end{cases}$$

$$5S_{ADE} = S_{ABC},$$

$$S_{ADE} = \frac{1}{5} S.$$

$$S_{AFC} = \frac{2}{5} S.$$

Ats.: $\frac{2}{5} S$.

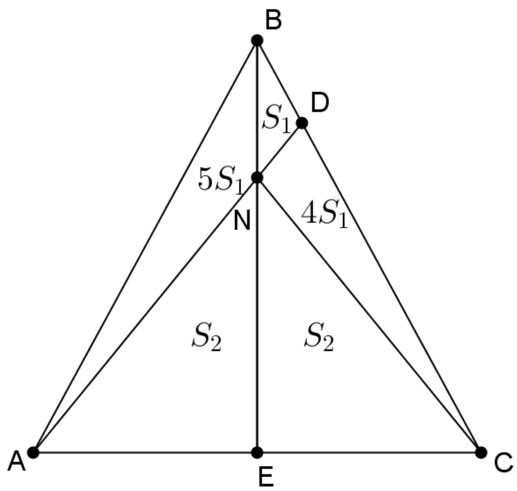
349. Žr. 348 uždavinį.

350. **Duota:** $AB = BC$, $BD : DC = 1 : 4$.

Raskite: $BN : NE$.

Brėžiame *NC*.

Pažymime:



$S_{BND} = S_1$,

$S_{DCN} = 4S_1$,

$S_{BNC} = S_{ANB} = 5S_1$.

$S_{ANC} = 2S_2$.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{6S_1}{2S_2 + 4S_1} = \frac{1}{4},$$

$$S_2 = 10 \cdot S_1.$$

$$\frac{BN}{NE} = \frac{S_{BCN}}{S_{NCE}} = \frac{5 \cdot S_1}{10 \cdot S_1} = \frac{1}{2}.$$

Ats.: $\frac{1}{2}$.

351. **Duota:** $AB = AC$, $AO = OK$, $S_{ABC} = S$.

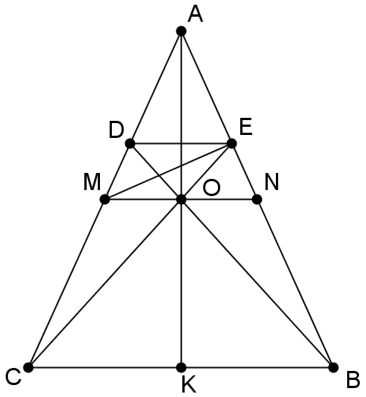
Raskite: S_{AEOD}.

Brėžiame *MN*, lygiagrečią *BC*.

$S_{DOE} = S_{DME}$, todėl:

$S_{AEOD} = S_{AEM} = S_1$.

Trikampių MEC bei MAE aukštinė bendra ir $CM = AM$, todėl:



$S_{MEC} = S_{MAE}$,

$S_{ACE} = 2S_1$.

$S_{AOD} = S_{AOE}$, tai

$S_{AOC} = 2S_1 - \frac{1}{2}S_1 = \frac{3}{2}S_1$.

Iš kitos pusės, $S_{AOC} = \frac{AO \cdot CK}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AK \cdot \frac{1}{2}CB = \frac{1}{8}AK \cdot CB$.

$S_{AOC} = \frac{1}{8} \cdot 2S = \frac{1}{4}S$.

$\frac{3}{2}S_1 = \frac{1}{4}S$,

$S_1 = \frac{1}{6}S$.

Ats.: $\frac{S}{6}$.

UŽDAVINIAI SU TRAPECIJOMIS
Metodinės rekomendacijos

1. *Trapecijos vidurio linija lygiagreti pagrindams ir lygi pagrindų sumos pusei.*
2. *Atkarpa, jungianti trapecijos įstrižainių vidurio taškus yra lygiagreti pagrindams ir lygi jų skirtumo pusei.*
   Žr. užd. 359-363.
3. *Trapecijos plotas lygus:*

a) *pagrindų sumos pusės ir aukštinės sandaugai:*

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h;$$

b) *vidurio linijos ir aukštinės sandaugai:*

$$S = m \cdot h;$$

c) *įstrižainių ir sinuso kampo tarp jų sandaugos pusei:*

$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin\alpha .$$

4. *Trapecijos įstrižainė dalija trapeciją į du trikampius, kurių plotų santykis lygus pagrindų santykiui.*
   Žr. užd. 410, 414-417, 318, 324, 329, 332.

1 Pastaba: Sprendžiant uždavinius su trapecijomis, dažnai tenka pildyti brėžinį: per mažesniojo pagrindo viršūnę brėžti atkarpą, lygiagrečią trapecijos įstrižainei.

Žr. užd. 365, 367-378, 382-383.

2 Pastaba: Sprendžiant uždavinius (ne tik šiame skyriuje), dažnai susiduriame su stačiaisiais trikampiais. Pastariesiems tenka taikyti ne tik Pitagoro teoremą: „statinių kvadratų suma lygi įžambinės kvadratui", bet ir geometrinio vidurkio teoremą: „jeigu iš stačiojo kampo viršūnės nubrėžiame statmenį į įžambinę, tai šis statmuo yra geometrinis vidurkis atkarpų, į kurias statmuo dalija įžambinę, o kiekvienas statinis yra geometrinis vidurkis įžambinės ir to statinio projekcijos įžambinėje".

Žr. užd. 135, 171, 174, 231, 386-390.

Labai dažnai reikalingi stačiojo trikampio kraštinių ir kampų sąryšiai.

Žr. užd. 76, 78, 116, 123, 127, 148, 163, 167, 221, 268, 302, 306, 320, 328, 341, 408.

3 Pastaba: Įbrėžta ir apibrėžta trapecija nagrinėjama skyriuje „Įbrėžti ir apibrėžti keturkampiai".

Uždavinių sprendimai

352.
Pagrindus pažymėję x ir $x+6$, taikome trapecijos ploto formulę:

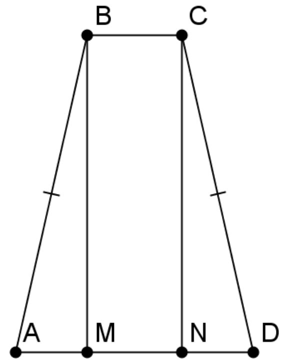
$$S=\frac{x+x+6}{2}\cdot 22=594,$$

$x=24$.
$x+6=30$.

Ats.: 24, 30.

353. **Duota:** $AB=CD=41$, $AD-BC=18$, $S_{ABCD}=840$.

Raskite: P_{ABCD}.



$AD-BC=18$, $AM=ND=9$.
Trikampiui CND taikome Pitagoro teoremą:

$$CN=\sqrt{41^2-9^2}=40.$$

$$S_{ABCD}=\frac{BC+BC+18}{2}\cdot CN,$$

$$840=\frac{2BC+18}{2}\cdot 40,$$

$2BC+18=42$.
$P_{ABCD}=2\cdot 41+42=124$.

Ats.: 124.

354. **Duota:** $AB=CD$, $BC:AD=3:7$, $CN=24$, $AB=CD=26$.

Raskite: S_{ABCD}.

Žr. 353 uždavinio brėžinį.
Trikampiui CND taikome Pitagoro teoremą:

$$ND=\sqrt{26^2-24^2}=10.$$

$$\frac{BC}{BC+20}=\frac{3}{7},$$

$BC=15$.

$$S=\frac{2\cdot 15+2\cdot 10}{2}\cdot 24=600.$$

Ats.: 600.

355. **Duota:** $BC:AD=3:11$, $AB=CD$, $P_{ABCD}=48$, $CN=BC$.

Raskite: S_{ABC}.

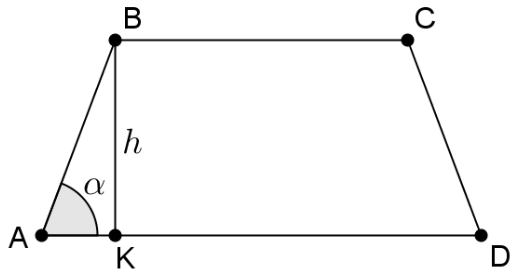
Žr. 353 uždavinio brėžinį.
Pažymime: $MN=BC=3x$,
$AM=ND=4x$.
Remiantis Pitagoro teorema, trikampio ABM kraštinė AB lygi $5x$.
Pagal sąlygą:
$5x+5x+3x+11x=48$,
$x=2$.

$$S_{ABCD}=\frac{14\cdot x}{2}\cdot 3x=21\cdot 4=84.$$

Ats.: 84.

356. **Duota:** $AB = CD$, $BC = 12$, $AD = 18$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{8}$.

Raskite: S_{ABCD}.



$AK = \frac{18-12}{2} = 3$.

Iš stačiojo trikampio *ABK*:

$\frac{3}{h} = \operatorname{ctg}\alpha$,

$\frac{3}{h} = \frac{3}{8}$,

$h = 8$.

$S_{ABCD} = \frac{12+18}{2} \cdot 8 = 120$.

Ats.: 120.

357. **Duota:** $AB = CD$, $P_{ABCD} = 50$, $BK = 2$, $\sin\alpha = 0{,}4$.

Raskite: S_{ABCD}.

Žr. 356 uždavinio brėžinį.

Iš stačiojo trikampio *ABK*:

$\frac{BK}{AB} = \sin\alpha$,

$AB = \frac{2}{0{,}4} = 5$.

$BC + AD = P - 2 \cdot AB$,

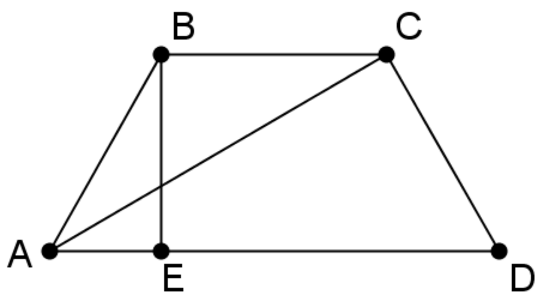
$BC + AD = 50 - 10 = 40$.

$S_{ABCD} = \frac{40}{2} \cdot 2 = 40$.

Ats.: 40.

358. **Duota:** $AB = CD$, $BC = 4$, $AD = 8$, $S_{ABCD} = 21$.

Raskite: kampo *A* pusiaukampinė kerta *BC* ar *CD*?



$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BE$,

$21 = \frac{8+4}{2} \cdot BE$,

$BE = 3{,}5$.

Trikampiui *ABE* taikome Pitagoro teoremą:

$AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{(AD-BC)^2/4 + BE^2}$,

$AB = \sqrt{4 + 12{,}25} = \sqrt{16{,}25} > 4 = BC$.

$AB > BC$, todėl $\angle BAC < \angle BCA = \angle CAD$.

Taigi kampo *BAD* pusiaukampinė yra žemiau nei *AC*, t. y. kerta *CD*.

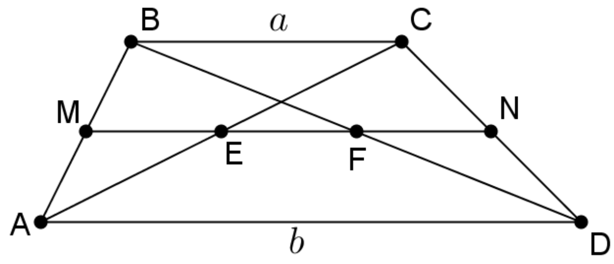
359. **Duota:** $BC = a$, $AD = b$, $AE = EC$, $BF = FD$.

Raskite: *EF*.

EF yra trapecijos vidurio linijoje *MN*.

ME yra trikampio *BAC* vidurio linija, todėl

$ME = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$.



FN yra trikampio *BDC* vidurio linija, todėl

$FN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$.

Taigi $EF = MN - ME - FN$,

$EF = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$.

Ats.: $\frac{b-a}{2}$.

360. Žr. 359 užd.

361. Žr. 359 užd.

362. Žr. 359 užd. brėžinį.

$ME = FN = 3$,

$S = MN \cdot H$, čia H yra trapecijos aukštinė.

$H = \frac{S}{MN}$,

$H = \frac{120}{2 \cdot 3 + 9} = 8$.

Ats.: 8.

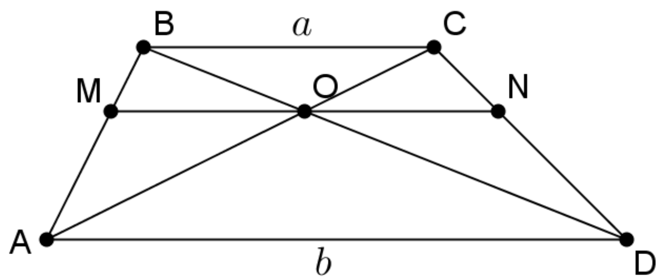
363. Žr. 362 užd.

364. **Duota:** $DC = b$, $AB = a$, *MN* lygiagreti *AB* ir *DC*.

Raskite: *MN*.

Trikampiai *DOC* ir *AOB* panašūs, todėl

$\frac{OC}{AO} = \frac{b}{a}$.



Pridėję prie abiejų pusių po 1, gauname:

$\frac{OC + AO}{AO} = \frac{b+a}{a}$,

$\frac{AC}{AO} = \frac{a+b}{a}$.

Trikampiai *AMO* ir *DAC* panašūs, todėl:

$\frac{CD}{MO} = \frac{AC}{AO}$,

$MO = \frac{ab}{a+b}$.

Analogiškai $ON = \frac{ab}{a+b}$.

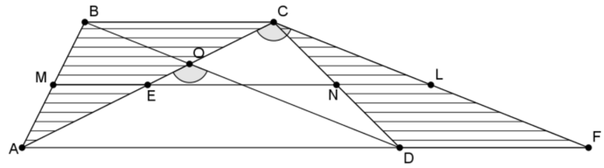
$MN = \frac{2ab}{a+b}$.

Ats.: $\frac{2ab}{a+b}$.

365. **Duota:** CF lygiagreti BD.

Įrodykite:

1. $S_{ABC} = S_{CDF}$,
2. $S_{ABCD} = S_{ACF}$,
3. $MN = EL$,
4. $\angle AOD = \angle ACF$.



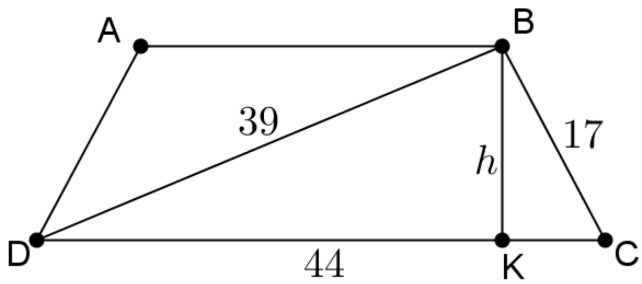
1. $S_{ABC} = S_{CDF}$, nes $BC = DF$, o trikampių ABC ir CDF aukštinės, nubrėžtos į lygias kraštines, sutampa su trapecijos aukštine;
2. $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ACD} + S_{DCF} = S_{ACF}$;
3. $ME = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}DF = NL$;
4. Kampai AOD ir ACF lygūs kaip atitinkami kampai prie lygiagrečių tiesių BD bei CF ir kirstinės EC.

366. **Duota:** $AD = BC$, $BD = 39$, $BC = 17$, $DC = 44$.

Raskite: BK.

Trikampio BCD plotą apskaičiuojame pagal Herono formulę:

$S_{BCD} = \sqrt{50 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 33} = 330$.



Iš kitos pusės, $S_{BCD} = \frac{1}{2} DC \cdot BK$,

$S_{BCD} = 22 \cdot BK$.

Sulyginame:

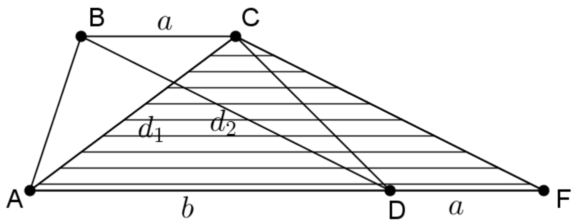
$330 = 22 \cdot BK$,

$BK = 15$.

Ats.: 15.

367. **Duota:** $BC = a$, $AD = b$, $AD = d_1$, $BD = d_2$.

Raskite: S_{ABCD}.



Brėžiame CF, lygiagrečią BD.

$S_{ABCD} = S_{ACF}$.

Šį plotą apskaičiuojame pagal Herono formulę:

$S_{ACF} = \sqrt{p \cdot (p-a-b) \cdot (p-d_1) \cdot (p-d_2)}$,

čia $p = \frac{d_1 + d_2 + a + b}{2}$.

Ats.: $\sqrt{p \cdot (p-a-b) \cdot (p-d_1) \cdot (p-d_2)}$, čia $p = \frac{d_1 + d_2 + a + b}{2}$.

368. Žr. 367 užd.

369. Žr. 367 užd.

370. Žr. 367 užd.

$$S_{ABCD} = S_{ACE} = \sqrt{\frac{45+5\sqrt{17}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{17}-19}{2} \cdot \frac{45-5\sqrt{17}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{17}+19}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(2025 - 25 \cdot 17) \cdot (25 \cdot 17 - 361)} = \frac{1}{4}\sqrt{64^2 \cdot 25} = 80.$$

Ats.: 80.

371. Žr. 365 ir 367 užd.

$S_{ABCD} = S_{ACE}$.

Trikampio *ACE* vidurio linija lygi *m*, o *AE* lygi $2m$.

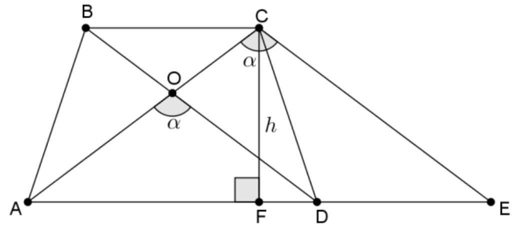
Trikampio kraštinės lygios $2m$, q_2, q_1.

Trikampio plotas apskaičiuojamas pagal Herono formulę.

372. Žr. 365 ir 367 užd.

Trikampio *ACE* plotas apskaičiuojamas pagal formulę $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$.

373. **Duota:** $CF = h$, $AB = CD$, $\angle AOD = \alpha$.
Raskite: *ABCD* vidurio liniją.



Brėžiame *CE*, lygiagrečią *BD*.

Žr. 366 uždavinį.

$AC = CE$.

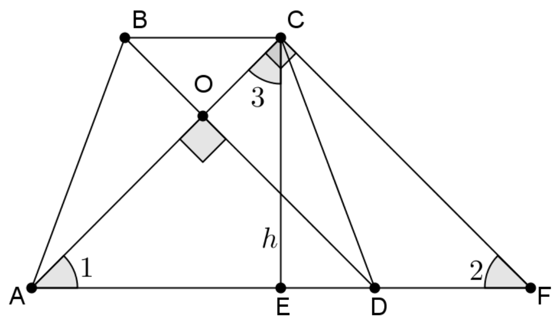
Iš trikampio *ACF*:

$AF = CF \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Trapecijos vidurio linija lygi trikampio *ACE* vidurio linijai ir lygi $\frac{1}{2}AE$, t. y. $h \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Ats.: $h \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

374. **Duota:** $AB = CD$, *BD* statmena *AC*, *c* – trapecijos vidurio linija, *h* trapecijos aukštinė.
Įrodykite:
1. $c = h$,
2. $S = c^2 = h^2$.



1. Brėžiame *CF*, lygiagrečią *BD*.

BCFD yra lygiagretainis.

$\angle ACF = \angle AOD$ (žr.366 užd.) $= 90^\circ$.

$AC = BD = CF$.

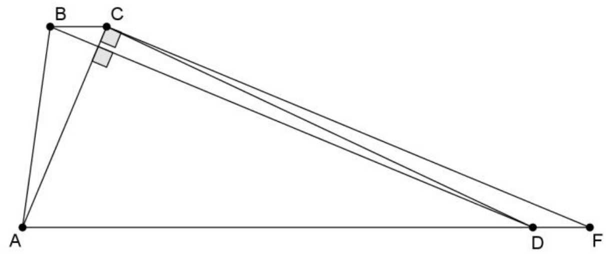
Kampai 1, 2 ir 3 lygūs 45°.

$h = \frac{1}{2}AF = c$.

2. $S_{ABCD} = S_{ACF} = \frac{1}{2}AF \cdot h = h^2 = c^2$.

375. Žr. 374 užd.

376. **Duota:** *BD* statmena *AC*, $AC = 5$, $BD = 12$.
Raskite: vidurio liniją *c* ir S_{ABCD}.



Brėžiame *CF*, lygiagrečią *BD*. Žr. 366 užd.

Remiamės Pitagoro teorema:

$AF = \sqrt{AC^2 + CF^2}$,

$AF = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

Trapecijos vidurio linija lygi trikampio

ACF vidurio linijai, o ši lygi $\frac{1}{2}AF$, t. y. 6,5.

$S_{ABCD} = S_{ACF} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$.

Ats.: 6,5; 30.

377. **Duota:** $AC = 8$, trapecijos vidurio linija lygi 5, *AC* statmena *BD*.

Raskite: S_{ABCD}, *BD*.

Žr. 376 užd. brėžinį.

Jei trapecijos vidurio linija – 5, tai pagrindų suma lygi 10.

Trikampis status, todėl:

$CF = \sqrt{100 - 64} = 6$.

Trapecijos plotas lygus trikampio *ACF* plotui, o šis lygus $\frac{1}{2}AC \cdot CF$, t. y.

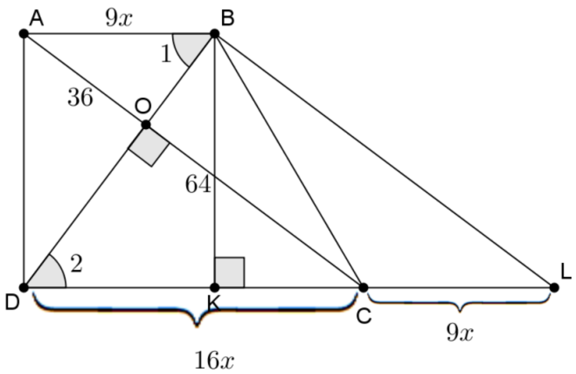
$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$.

Ats.: 24.

378. **Duota:** *AC* statmena *BD*, $AO = 36$, $OC = 64$.

Raskite: *AB*, *DC*.

Kampai 1 ir 2 lygūs kaip priešiniai kampai prie lygiagrečių tiesių ir jų kirstinės.



Trikampiai *AOB* ir *DOC* panašūs:

$\frac{AB}{DC} = \frac{AO}{OC} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$.

Pažymime: $AB = 9x$, $CD = 16x$, $DK = 9x$, $KC = 7x$.

Trikampiui *ADC* taikome Pitagoro teoremą:

$AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{100^2 - (16x)^2}$. (1)

Brėžiame *BL*, lygiagrečią *AC*.

$CL = AB = 9x$, $\angle DBL = \angle DOC = 90^\circ$.

Trikampis *DBL* status. Taikome geometrinio vidurkio teoremą:

$BK^2 = DK \cdot KL$,

$BK^2 = 9x \cdot 16x$,

$BK = 12x$. (2)

$BK = AD$, todėl sulyginame (1) ir (2) išraiškas:

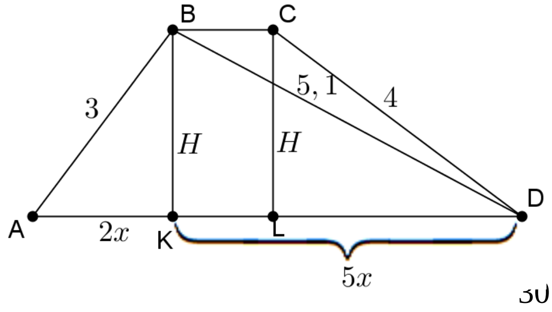
$100^2 - 256 \cdot x^2 = 144 \cdot x^2$,

$x = 5$.

Ats.: 45; 80.

379. **Duota:** $AB = 3$, $CD = 4$, $BD = 5{,}1$, $AK : KD = 2 : 5$.

Raskite: *BC*.



Pažymime: $AK = 2x$, $KD = 5x$.

Iš trikampių *BKD* ir *ABK*, remdamiesi Pitagoro teorema, išreiškiame H^2 ir sulyginame:

$9 - 4x^2 = 5{,}1^2 - 25 \cdot x^2$,

$x = 0{,}9$.

$H = \sqrt{9 - 1{,}8^2} = 2{,}4$.

Trikampiui *CLD* taikome Pitagoro teoremą:

$LD=\sqrt{4^2-2{,}4^2}=3{,}2$.

$BC=KL=AD-AK-LD$,

$BC=6{,}3-(1{,}8+3{,}2)=1{,}3$.

Ats.: 1,3.

380. Žr. 379 uždavinį.

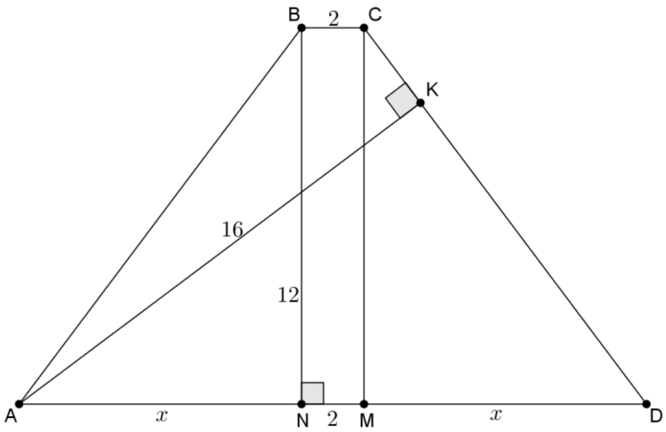
381. **Duota:** $AB=CD$, *AK* statmena *CD*, $AK=16$, $BC=2$.

Raskite: *AD*.

Pažymime: $AN=MD=x$.

Trikampiui *CMD* taikome Pitagoro teoremą:

$CD=\sqrt{144+x^2}$.



Trikampio *ACD* plotą išreiškiame dviem būdais ir sulyginame:

$\frac{1}{2}CD\cdot AK=\frac{1}{2}AD\cdot CM$.

$\sqrt{144+x^2}\cdot 16=(2+2x)\cdot 12$,

$5x^2+18x-567=0$,

$x=\frac{54-9}{5}=9$.

$AD=2+18=20$.

Ats.: 20.

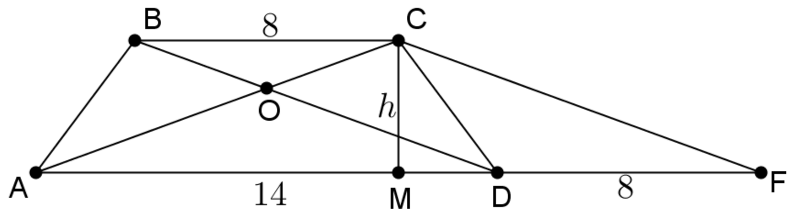
382. Žr. 376 uždavinį.

383. **Duota:** $AB=CD$, $BC=8$, $AD=14$, $S_{ABCD}=44$.

Raskite: *AB*, *CD*.

Brėžiame *CE*, lygiagrečią *BD*.

Žr. 366 užd.



$AE=22$.

$S_{ABCD}=S_{ACE}=\frac{1}{2}AE\cdot CM$,

$44=\frac{1}{2}\cdot 22\cdot CM$,

$CM=4$.

$MD=\frac{AD-BC}{2}$,

$MD=\frac{14-8}{2}=3$.

Trikampiui *MCD* taikome Pitagoro teoremą:

$CD=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Ats.: 5.

384. **Duota:** $AB=CD=c$, $BC=a$, $AD=b$, $AC=BD=d$.

Įrodykite: $d^2=ab+c^2$.

$AD_1=\frac{b-a}{2}$, $DD_1=\frac{a+b}{2}$.

Iš trikampių ABD_1 ir BDD_1 remdamiesi Pitagoro teorema, išreiškiame BD_1^2 ir sulyginame:

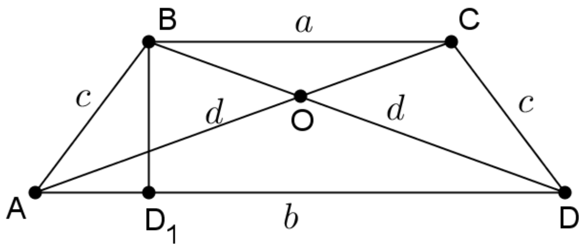
$AB^2 - AD_1^2 = BD^2 - DD_1^2$,

$d^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = c^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$,

$4d^2 - a^2 - 2ab - b^2 = 4c^2 - b^2 - 2ab - a^2$,

$4d^2 = 4ab + 4c^2$,

$d^2 = ab + c^2$.



385. **Duota:** $AB = CD$, $AC = 16$, $\angle CAD = 45^\circ$.

Raskite: S_{ABCD}.

Brėžiame *CE*, statmeną *AD*.

$\angle ACE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

$AE = \frac{a+b}{2}$,

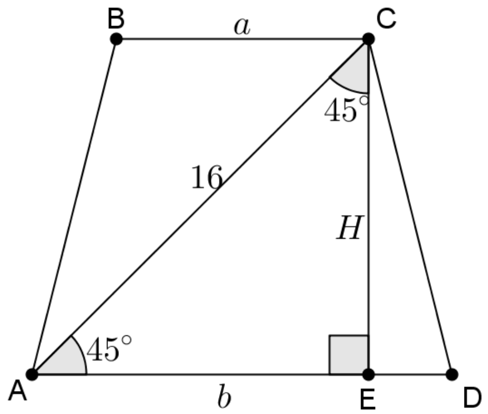
$CE = AE = H$,

$H = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$.

$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot H = H^2$,

$S_{ABCD} = 64 \cdot 2 = 128$.

Ats.: 128.



386. **Duota:** $BC = 16$, $AD = 25$, *AC* statmena *CD*.

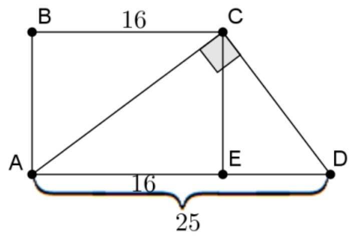
Raskite: *AC*.

Trikampiui *ACD* taikome geometrinio vidurkio teoremą:

$AC = \sqrt{AD \cdot AE}$,

$AC = \sqrt{25 \cdot 16} = 20$.

Ats.: 20.



387. **Duota:** $AD = BC$, $AB = 7$, $BD = 20$, *BD* statmena *BC*.

Raskite: S_{ABCD}.

Brėžiame *BM*, statmeną *DC*.

MC pažymime *x*, tuomet $DM = x + 7$.

Trikampiui *BCD* taikome geometrinio vidurkio teoremą:

$BD^2 = DC \cdot DM$,

$400 = (2x+7) \cdot (x+7)$,

$2x^2 + 21x - 351 = 0$,

$x = \frac{57-21}{4} = 9$.

Trikampiui *BDC* taikome geometrinio vidurkio teoremą:

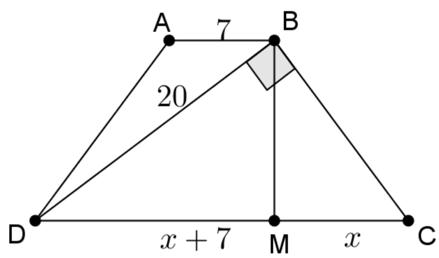
$BM^2 = DM \cdot MC$,

$BM = 12$.

$S_{ABCD} = \frac{AB + DC}{2} \cdot BM$,

$S_{ABCD} = \frac{7+25}{2} \cdot 12 = 192$.

Ats.: 192.



388. **Duota:** DB statmena BC, $DC^2 - AB^2 = a^2$.

Raskite: BM.

Žr. 387 užd. brėžinį.

Pažymime: $AB = x$, $DC = y$.

$MC = \frac{y-x}{2}$, $DM = \frac{y+x}{2}$.

Trikampiui ACD taikome geometrinio vidurkio teoremą:

$BM = \sqrt{DM \cdot MC}$,

$BM = \sqrt{\frac{y+x}{2} \cdot \frac{y-x}{2}} = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{2} = \frac{a}{2}$.

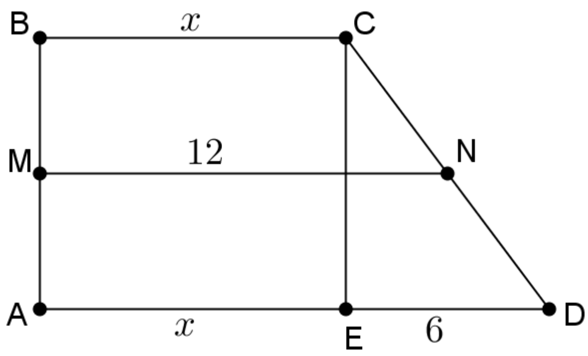
Ats.: $\frac{a}{2}$.

389. Žr. 387 uždavinį.

390. Žr. 387 uždavinį.

391. **Duota:** $BM = MA$, $CN = ND$, $MN = 12$, $AD - BC = 6$, $S_{ABCD} = 96$.

Raskite: P_{ABCD}.



$MN = \frac{BC + AD}{2}$.

BC pažymėję x, gauname:

$12 = \frac{2x+6}{2}$,

$x = 9$.

$S_{ABCD} = MN \cdot CE$,

$96 = 12 \cdot CE$,

$CE = 8$.

Iš trikampio CED:

$CD = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

$P_{ABCD} = 24 + 8 + 10 = 42$.

Ats.: 42.

392. Žr. 391 užd.

393. **Duota:** $AD = 12$, $CD = 10$, $\cos D = 0{,}8$.

Raskite: S_{ABCD}.

Žr. 391 uždavinio brėžinį.

Pažymime: $BC = x$, $ED = 15 - x$.

Iš trikampio CED:

$\frac{15-x}{10} = \cos\alpha$,

$x = 7$.

$CE = 10 \cdot \sin\alpha = 6$.

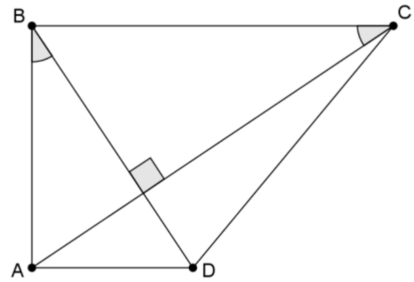
$S_{ABCD} = \frac{15+7}{2} \cdot 6 = 66$.

Ats.: 66.

394. **Duota:** AC statmena BD, $BC : AD = k$.
Raskite: $AC : BD$.

Trikampiai ABC ir ABD panašūs, nes kampai BAC ir ADB lygūs:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{BC}{AB},\ \frac{AC}{BD} = \frac{AB}{AD}.$$



Panariui sudauginame:

$$\frac{AC^2}{BD^2} = \frac{BC}{AD} = k,$$

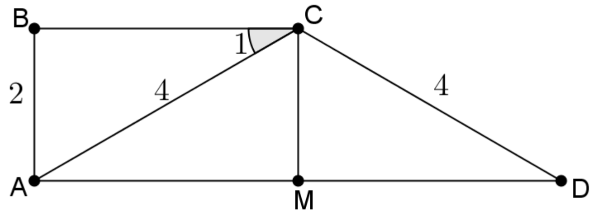
$$\frac{AC}{BD} = \sqrt{k}.$$

Ats.: $\sqrt{k}$.

395. **Duota:** $AB = 2$, $CD = AC = 4$.
Raskite: vidurio liniją.

$$BC = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}.$$

$$AM = MD = BC = 2\sqrt{3}.$$



Vidurio linija:

$$\frac{BC + AD}{2} = \frac{3}{2}BC = 3\sqrt{3}.$$

Ats.: $3\sqrt{3}$.

396. **Duota:** $\angle D = 60^\circ$, $BC = a$, $CD = b$.
Raskite: S_{ABCD}.

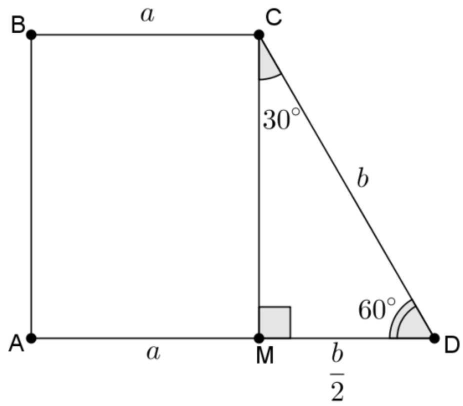
$$\angle MCD = 30^\circ,$$

$$MD = \frac{1}{2}CD = \frac{b}{2}.$$

$$AD = a + \frac{b}{2},$$

$$CM = \frac{b\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{ABCD} = \frac{a + a + \frac{b}{2}}{2} \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{(4a+b)b\sqrt{3}}{8}.$$



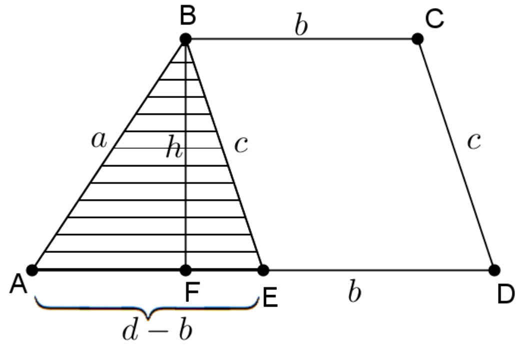
Ats.: $\dfrac{(4a+b)b\sqrt{3}}{8}$.

397. **Duota:** $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$.
Raskite: $BF = h$.

Brėžiame BE, lygiagrečią CD.

Žinomos visos trikampio ABE kraštinės: a, c, $d - b$.

Trikampio ABE plotą išreiškiame pagal Herono formulę ir kaip pusę pagrindo AE bei aukštinės BF sandaugos sulyginame:



$$\frac{(d-b)\cdot h}{2} = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-c)\cdot(p-d+b)},$$

čia $p = \frac{1}{2}(a + c + d - b)$.

$$h = \frac{2\sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-c) \cdot (p-d+b)}}{d-b}.$$

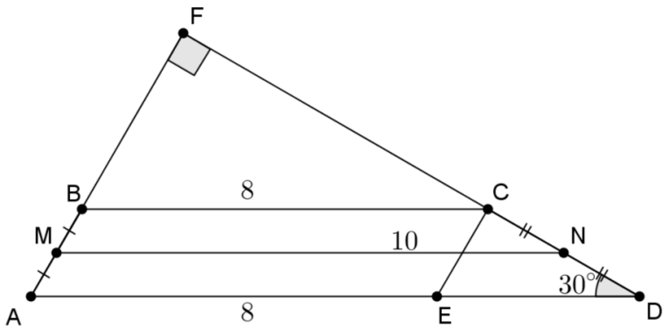
Ats.: $\frac{2\sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-c) \cdot (p-d+b)}}{d-b}$.

398. Žr. 397 uždavinį.
399. Žr. 397 uždavinį.

400. **Duota:** $\angle D = 30^\circ$, $\angle BFC = 90^\circ$, $AM = MB$, $DN = NC$, $MN = 10$, $BC = 8$.
Raskite: *AB*.

BC trumpesnė nei *MN*, todėl lygi 8.

$AD + BC = 2MN$,
$AD + 8 = 20$,
$AD = 12$.
Brėžiame *CE*, lygiagrečią *AB*.
$ED = 12 - 8 = 4$.
$CE = AB$.
Kampas *ECD* status, tai
$CE = 4 \cdot \sin 30^\circ = 2$.

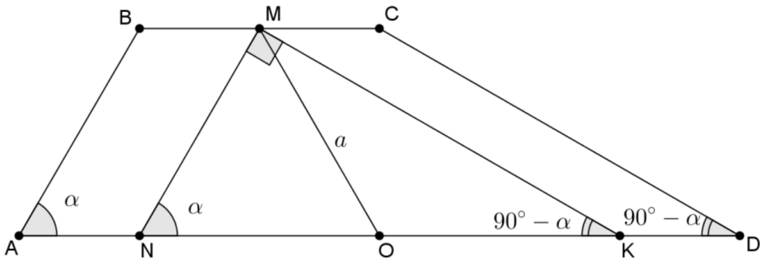


Ats.: 2.

401. Žr. 397 uždavinį.

402. **Duota:** $\angle S + \angle D = 90^\circ$, vidurio linija – *m*, $BM = MC$, $AO = OD$, $MO = a$.
Raskite: *BC*, *AD*.

Brėžiame *MN*, lygiagrečią *AB* ir *CD*, lygiagrečią *MK*.
$\angle NMK = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.
MO yra apibrėžto apie trikampį *NMK* apskritimo spindulys, taigi
$NK = 2a$.
$AN + KD = BC$.
Todėl:
$2BC + NK = 2m$,
$2BC + 2a = 2m$,
$BC = m - a$.
$AD = m - a + 2a = m + a$.



Ats.: $m - a$; $m + a$.

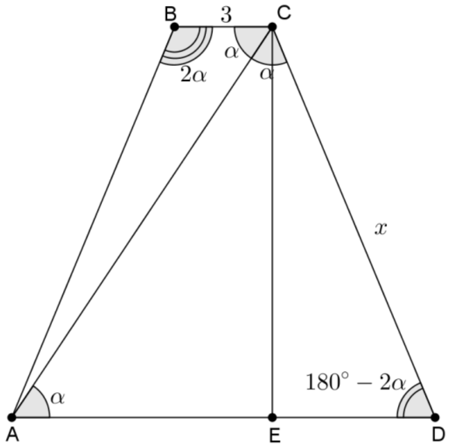
403. Jei kampai prie mažesnio pagrindo – 170° ir 100°, tai kampų suma prie didesnio pagrindo lygi 90°. Toliau žr. 402 uždavinį.

404. Kampų prie didesnio pagrindo suma – 90°. Toliau žr. 402 uždavinį.

405. Žr. 404, 402 uždavinius.

406. **Duota:** $AB = CD$ (pažymime x), $\angle BCA = \angle ACD = \alpha$, $BC = 3$, $P_{ABCD} = 42$.

Raskite: S_{ABCD}.



$\angle BCA = \angle CAD = \alpha$, tai $\angle D = 180^\circ - 2\alpha$.

$AD = CD = x$.

Be to, $AD = 42 - 3 - 2x = 39 - 2x$.

$39 - 2x = x$,

$x = 13$.

$ED = \dfrac{13-3}{2} = 5$.

$CE = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

$S_{ABCD} = \dfrac{3+13}{2} \cdot 12 = 96$.

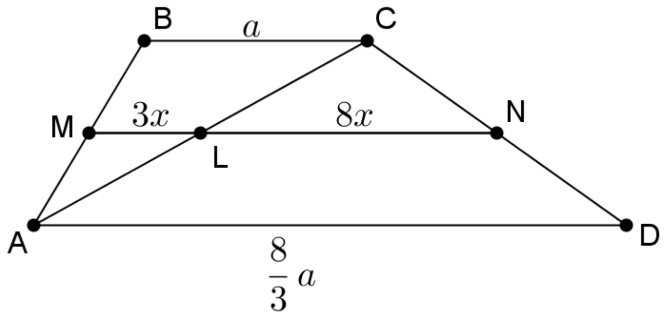
Ats.: 96.

407. **Duota:** $AM = MB$, $CN = ND$, $ML : LN = 3:8$, $AD - BC = 20$.

Raskite: *MN*.

ML yra trikampio *BAC*, o *LN* trikampio *ACD* vidurio linijos.

ML pažymėję $3x$, o *LN* – $8x$, gauname:



$3x = \dfrac{a}{2}$ ir $AD = 16x = \dfrac{8}{3}a$.

Pagal sąlygą:

$\dfrac{8}{3}a - a = 20$.

$a = 12$.

Vidurio linija lygi:

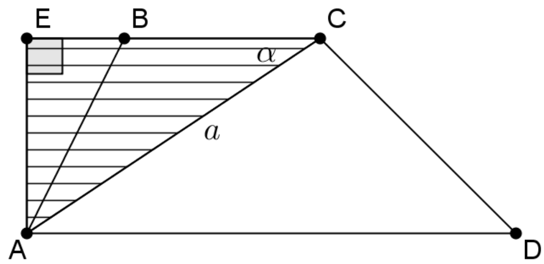
$\dfrac{11a}{6} = \dfrac{12 \cdot 11}{6} = 22$.

Ats.: 22.

408. **Duota:** $AD + BC = b$, $AC = a$, $\angle ACB = \alpha$.

Raskite: S_{ABCD}.

Brėžiame *AE*, statmeną *BC*.



$S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot AE$.

Iš trikampio *AEC*:

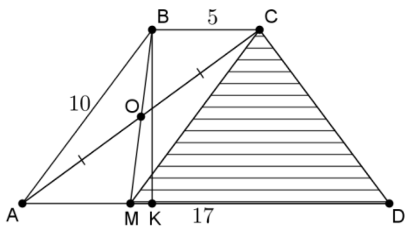
$AE = a \cdot \sin\alpha$.

$S_{ABCD} = \dfrac{ab \cdot \sin\alpha}{2}$.

Ats.: $\dfrac{ab}{2}\sin\alpha$.

409. **Duota:** $AB = CD = 10$, $AD = 17$, $BC = 5$, $AO = OC$.

Raskite: S_{BMD}.



$S_{BMD} = \dfrac{1}{2} MD \cdot BK$.

$AK = (17-5) : 2 = 6$.

$BK = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Trikampiai AOM ir BOC lygūs, tai $BO = OM$. Įstrižainės BM ir AC susikerta ir dalija viena kitą pusiau, todėl $ABCM$ – lygiagretainis. Tuomet $AM = 5$, $MD = 12$.

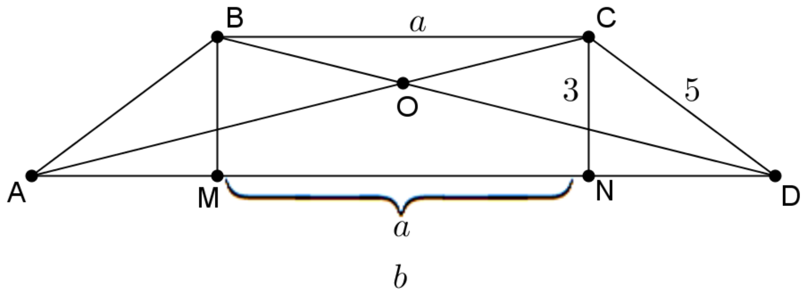
$S_{BMD} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48$.

Ats.: 48.

410. **Duota:** $AB = CD = 5$, $OC : OA = 1 : 2$, $CN = 3$.

Raskite: S_{ABCD}.

Trikampiai BOC ir AOD panašūs, tai:



$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, $b = 2a$. (1)

Iš trikampio CND:

$ND = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

$AD = MN + 2AM$,

$b = 8 + a$. (2)

Iš (1) ir (2) lygybių:

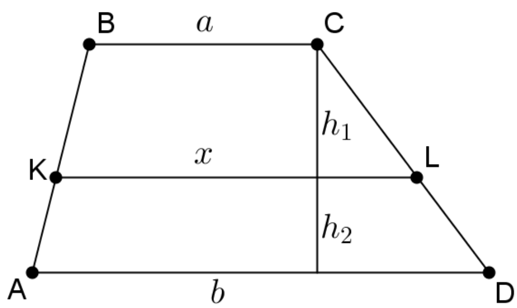
$a = 8$, $b = 16$.

$S_{ABCD} = \frac{8+16}{2} \cdot 3 = 36$.

Ats,: 36.

411. **Duota:** $BC = a$, $AD = b$, KL lygiagreti BC ir AD, $S_{AKLD} = S_{KBCL}$ (pažymime S).

Raskite: KL (pažymime x).



$S_{ABCD} = 2S$.

$$\begin{cases} \frac{a+x}{2} \cdot h_1 = S, \quad h_1 = \frac{2S}{a+x}, \\ \frac{b+x}{2} \cdot h_2 = S, \quad h_2 = \frac{2S}{b+x}, \\ \frac{a+b}{2}(h_1 + h_2) = 2S. \end{cases}$$

$(a+b) \cdot \left(\frac{2S}{a+x} + \frac{2S}{b+x} \right) = 4S$,

$\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} = \frac{2}{a+b}$,

$x = \sqrt{(a^2 + b^2)/2}$.

Ats.: $\sqrt{(a^2 + b^2)/2}$.

412. **Duota:** $AB = CD$, $BC = 20$, $AD = 30$. $S_{ABCD} = 400$, $S_{MBCL} : S_{AMLD} = 2 : 3$.

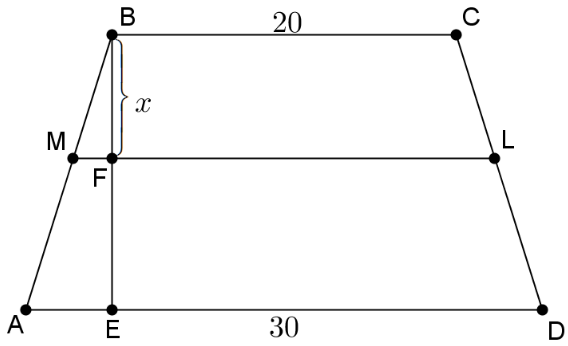
Raskite: BF (pažymime x).

$\frac{BC + AD}{2} \cdot BE = S_{ABCD}$,

$\frac{20 + 30}{2} \cdot BE = 400$,

$BE = 16$.

$$\begin{cases}\dfrac{S_{MBCL}}{S_{ABCD}}=\dfrac{2}{5},\\ \dfrac{S_{MBCL}}{S_{AMLD}}=\dfrac{2}{3};\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{(20+ML)\cdot x}{2\cdot 400}=\dfrac{2}{5},\\ \dfrac{(20+ML)\cdot x}{(ML+20+10)\cdot(16-x)}=\dfrac{2}{3};\end{cases}$$



$$\begin{cases}20+ML=\dfrac{320}{x},\\ \dfrac{320}{\left(\dfrac{320}{x}+10\right)\cdot(16-x)}=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

$160\cdot 3=\left(\dfrac{320}{x}+10\right)\cdot(16-x)$,

$x^2+64x-32\cdot 16=0$,

$x=-32+\sqrt{32^2+32\cdot 16}=-32+16\sqrt{6}$,

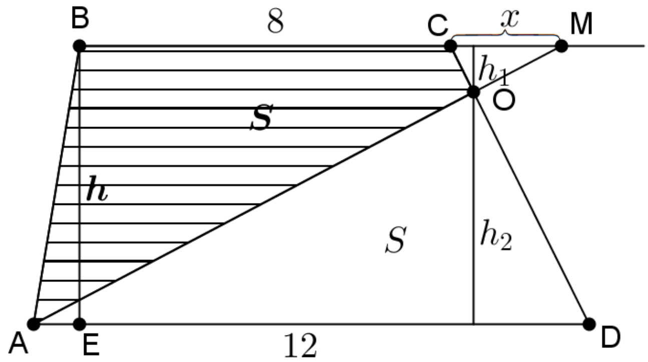
$x\approx 7$.

Ats.: ≈ 7.

413. **Duota:** $AD=12$, $BC=8$, $S_{ABCO}=S_{AOD}$ (pažymime S).

Raskite: CM (pažymime x).

$S_{ABCD}=\dfrac{BC+AD}{2}\cdot BE$,



$2S=\dfrac{8+12}{2}\cdot h$,

$h=0{,}2\cdot S$.

$h_1=h-h_2=\dfrac{1}{5}S-\dfrac{1}{6}S=\dfrac{1}{30}S$.

Trikampiai *COM* ir *AOD* panašūs, todėl:

$\dfrac{CM}{AD}=\dfrac{h_1}{h_2}$,

$\dfrac{x}{12}=\dfrac{\frac{1}{30}S}{\frac{1}{6}S}$,

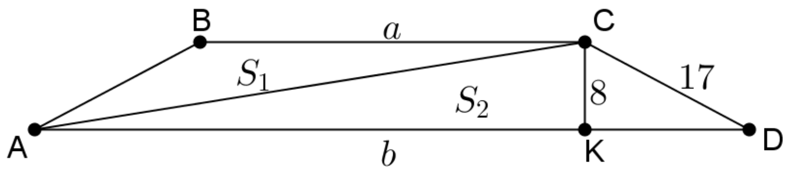
$x=2{,}4$.

Ats.: 2,4.

414. **Duota:** $CK=8$, $AB=CD=17$, $S_{ABC}=S_1$, $S_{ACD}=S_2$, $S_1:S_2=7:13$.

Raskite: P_{ABCD}.

$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{a}{b}$.



Pažymime: $a=7x$, $b=13x$.

$KD=\dfrac{13x-7x}{2}=3x$.

Trikampiui *CKD* taikome Pitagoro teoremą:

$17^2=8^2+9x^2$,

$x=5$.

$P_{ABCD} = 20x + 34 = 134$.

Ats.: 134.

415. **Duota:** $AB = CD = 10$, $S_{ABCD} = S_1$, $S_{ACD} = S_2$, $S_1 : S_2 = 3:7$, $AC = 17$.

Raskite: *CK*.

Žr. 414 uždavinio brėžinį.

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{BC}{AD}$;

BC pažymime *a*, *AD* – *b*.

$KD = \frac{b-a}{2}$, $AK = \frac{b+a}{2}$.

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$.

Iš trikampių *ACK* ir *CDK* pagal Pitagoro teoremą išreiškiame CK^2 ir sulyginame:

$$\begin{cases} 17^2 - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = 10^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \\ \frac{a}{b} = \frac{3}{7}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 189 = ab, \\ a = \frac{3}{7}b. \end{cases}$$

$b = 21,\ a = 9$.

$CK = \sqrt{10^2 - ((21-9)/2)^2} = 8$.

Ats.: 8.

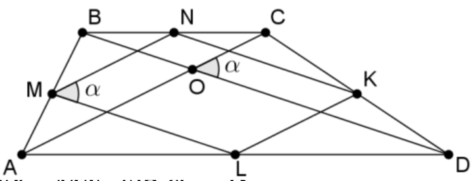
416. Žr. 414 uždavinį.

417. Žr. 414 uždavinį.

418. **Duota:** $BN = NC$, $CK = KD$, $AL = LD$, $AM = MB$, $S_{MNKL} = 5$.

Raskite: S_{ABCD}.

MN, *NK*, *KL*, *ML* yra trikampių *ABC*, *BCD*, *CDA*, *BAD* vidurio linijos, todėl $AC = 2MN$, $BD = 2NK$. Kampas tarp trapecijos įstrižainių lygus lygiagretainio kampui.



$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD \cdot AC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 2NK \cdot 2MN \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 4NK \cdot MN \cdot \sin\alpha = 2S_{MNKL}$

.

$S_{ABCD} = 2 \cdot 5 = 10$.

Ats.: 10.

419. Žr. 418 uždavinį.

Onutė JABLONSKIENĖ
Viktorija SIČIŪNIENĖ

Planimetrijos kurso sisteminimas
5-asis sąsiuvinis

Atsakingoji redaktorė *S. Tauraitė*
Redaktorė *I. Šiugždinytė*

SL. 580. 1995 10 16. 4 1. 1. Tiražas 1000 egz. Užsak. Nr. 331
Išleido leidykla „Apyaušris“, Krivių g. 25-7, 2007 Vilnius.
Paruošė Lietuvos matematikos mokytojų asociacija.
Spaudė „Matricos“ spaustuvė, Žalgirio 108, 2645 Vilnius.
Kaina sutartinė