Planimetrijos uždaviniai su sprendimais

„Planimetrijos uždaviniai su sprendimais“

Uždavinius surinko ir atliko jų sprendimus Širvintų „Atžalyno“ progimnazijos matematikos mokytoja ekspertė **Palmira Puzinaitė**.

Uždavinių sprendimus kompiuteriu surinko ir brėžinius su programa „Geogebra“ atliko Klaipėdos „Ąžuolyno“ gimnazijos trečios gimnazijos klasės mokiniai.

Mokinius koordinavo Klaipėdos „Ąžuolyno“ gimnazijos matematikos mokytoja ekspertė **Vilija Šileikienė**.

2015 metai.

Turinys

I skyrius

APSKRITIMAS

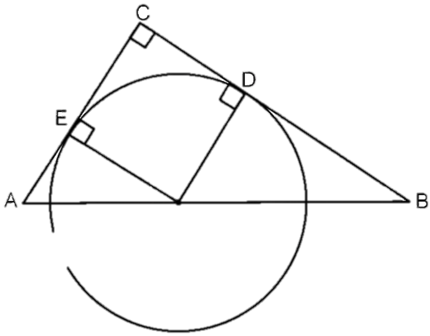
1. Apskritimas, kurio centras yra stačiojo trikampio įžambinėje, liečia abu statinius. Apskaičiuokite jo spindulį, kai trikampio statiniai lygūs 21 ir 28.

Duota: ΔABC,

$\angle C = 90°;\ O \in AB;$

$AC = 21;\ BC = 28;$

$OD \perp BC;\ OD = R.$



Apskaičiuoti: R.

Sprendimas:

Pagal Pitagoro

teoremą: $AB^2 = AC^2 + BC^2;\ AB = \sqrt{21^2 + 28^2} = 35;$

$OD \perp BC;$ EODC – kvadratas, nes $EO = OD;\ OE \perp AC;$

$CE = CD;$,tai $\angle EOD = 90°;$

Stačiakampis, kurio gretimos kraštinės lygios, yra kvadratas.

$\angle A$ - bendras, $\angle C = \angle AEO$ (statūs), tai pagal du lygius kampus $\Delta AOE \sim \Delta ABC$.

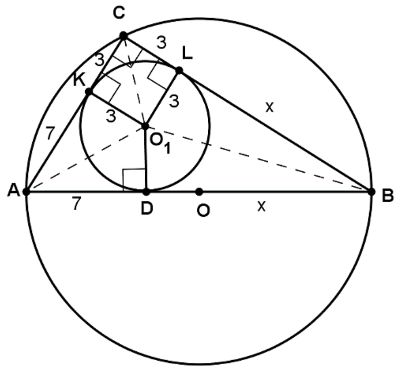
Panašių trikampių atitinkamos kraštinės proporcingos, tai

$$\frac{OE}{BC} = \frac{AE}{AC};\ \frac{R}{28} = \frac{21 - R}{21};\ 21R = 21 \cdot 28 - 28R;\ 49R = 21 \cdot 28;$$

$$R = \frac{21 \cdot 28}{49} = 12;$$

Ats: 12.

2. Į statųjį trikampį, kurio mažesniojo statinio ilgis 10, įbrėžtas apskritimas, kurio spindulys 3. Raskite apie šį trikampį apibrėžto apskritimo spindulį.



Duota: $\Delta ABC; \angle C = 90°;$

$AC = 10;$ apskritimai O1 ir O;

$O_1D \perp AB;\ O_1D = r = 3;$

$AO = OB = R.$

Apskaičiuoti: R.

Sprendimas:

$KCLO_1$ – kvadratas;

CK = CL = KC = KO = 3;

AK = AC – KC = 10 – 3 =7;

AK = AD = 7;

Tegul BL = x, tada DB = x (x>0);

$$AB^2 = AC^2 + CB^2;$$

$$AB = x+7;\ CB = x+3;\ (x+7)^2 = 10^2 + (x+3)^2;$$

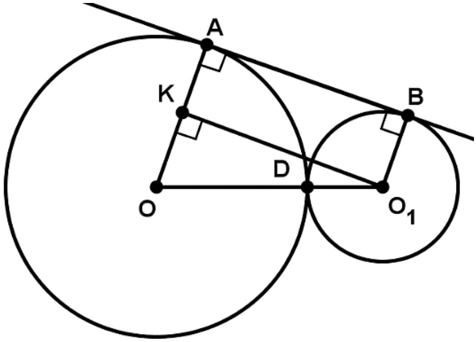
$$x^2 + 14x + 49 = 100 + x^2 + 6x + 9;\ 8x = 60;$$

$$DB = 7{,}5;\ AB = AD + DB = 7 + 7{,}5 = 14{,}5;$$

$$R = \frac{1}{2}AB = 7{,}25.$$

Ats: 7,25.

3. **Vieno iš besiliečiančių apskritimų spindulys lygus 1, šių apskritimų bendros liestinės atkarpos, esančios tarp lietimosi taškų, ilgis lygus 4. Apskaičiuokite kito apskritimo spindulio ilgį.**



Duota: apskritimai O1 ir O_2, $O_1B \perp AB$;

$O_1B = 1$; AB = 4.

Apskaičiuoti: OA.

Sprendimas:

Brėžiame $O_1K \| AB, O_1K \perp OA$,

ABO_1K – stačiakampis, nes OA ir O_1B statmenos AB (liestinė statmena spinduliui, nubrėžtam į lietimosi tašką).

$O_1K = AB = 4;$

$OA = O_1B + OK;$

$OK = OA - 1;$

$OO_1 = OA + O_1B = OA + 1;$

Pagal Pitagoro teoremą:

Iš stataus ΔOO_1K: $OO_1^2 = OK^2 + O_1K^2$;

$(OA + 1)^2 = (OA - 1)^2 + 4^2;$

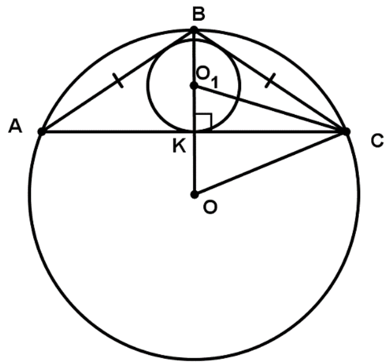
$(OA + 1 + OA - 1)(OA + 1 - OA + 1) = 16;$

$20A \cdot 2 = 16$; $OA = 4$.

Ats: 4.

4. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 48, šoninė kraštinė lygi 30. Į šį trikampį ir apie šį trikampį apibrėžti apskritimai. Apskaičiuokite atstumą tarp apskritimų centrų.

1) Kai ΔABC – smailusis.



Duota: AC = 48; AB = BC = 30; OB = R; $O_1K = 2$.

Apskaičiuoti: OO_1.

Sprendimas:

$30^2 + 30^2 = 1800 < 48^2$, tai ΔABC – bukasis.

BK – pusiaukraštinė, aukštinė, pusiaukampinė KC = 48 : 2 = 24;

ΔBKC – status,

$$KB^2 = BC^2 - KC^2;$$

$$KB = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{6 \cdot 54} = 3 \cdot 6 = 18.$$

$$r = O_1K = \frac{2S_{\Delta ABC}}{P_{\Delta ABC}}; \; r = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 18}{30 + 30 + 48} = \frac{48 \cdot 18}{108} = 8$$

KO = OB – BK = R – 18;

ΔKOC – status: $OC^2 = KO^2 + KC^2$; $R^2 = (R-18)^2 + 24^2$;

$R^2 = R^2 - 36R + 324 + 576$; $36R = 900$;

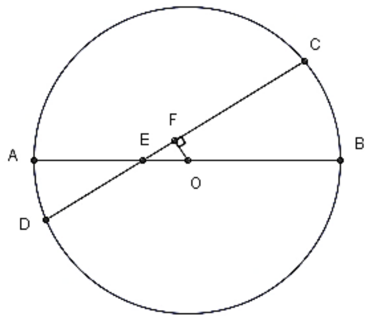
$R = 25$, tai OB = 25;

OK = 25 – 18 = 7.

$OO_1 = KO + KO_1 = 7 + 8 = 15$.

Ats: 15.

5. Styga, kuri kerta apskritimo skersmenį, sudaro su juo 30° kampą ir dalija skersmenį į atkarpas, lygias 2,8 ir 7,4. Apskaičiuokite stygos atstumą iki apskritimo centro.



Duota: apskritimas O; AB-skersmuo.
CD∩AB = E; ∠CEB = 30°;
AE = 2,8; EB = 7,4.

Apskaičiuoti: OF.

Sprendimas:

AB = AE + EB = 2,8+7,4 = 10,2;
AO = $\frac{1}{2}$ AB= 5,1;

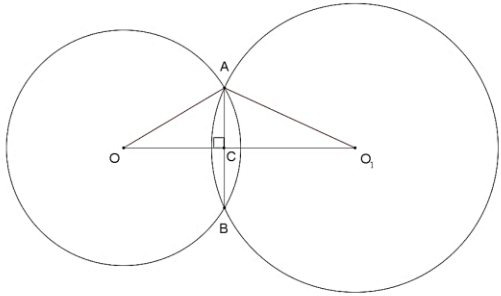
EO = AO – AE = 5,1−2,8 = 2,3;

OF = $\frac{1}{2}$ EO = 1,15 (statinio prieš prieš 30° kampą savybė).

Ats: 1,15.

6. Dviejų susikertančių apskritimų spinduliai lygūs 10 ir 17,5. Bendroji styga dalija centrus jungiančią atkarpą santykiu 2:5. Raskite bendrosios stygos ilgį.

Duota: apskritimai O ir O_1; $OA = 10$; $O_1A = 17$; $OC:CO_1 = 2:5$.



Apskaičiuoti: OO_1.

Sprendimas:

$AB \perp OO_1$;

Iš stataus ΔOAC: $AC^2 = OA^2 - OC^2$.
Iš stataus ΔO_1AC: $AC^2 = O_1A^2 - O_1C^2$;

Tarkime, kad vienai santykio daliai tenka x ($x > 0$), tuomet $OC = 2x$;

$O_1C = 5x$;

$10^2 - (2x)^2 = 17^2 - (5x)^2$;

$21x^2 = 27 \cdot 7$;

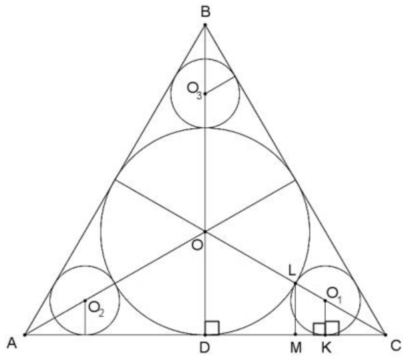
$x^2 = 9$; $x = 3$; ($x = -3$ netinka).

$OC = 2 \cdot 3 = 6$; $O_1C = 5 \cdot 3 = 15$; $O_1C = 5 \cdot 3 = 15$;

$OO_1 = OC + O_1C = 15 + 6 = 21$.

Ats.: 21.

7. Į lygiakraštį trikampį įbrėžtas apskritimas ir dar trys apskritimai, liečiantys didįjį apskritimą ir trikampio kraštines. Kokio ilgio yra trikampio kraštinė, jei mažojo apskritimo spindulys r?



Duota: ΔABC; $AB = BC = AC$;
apskritimai O, O_1, O_2, O_3;
$O_1K \perp AC$; $O_1K = r$.

Apskaičiuoti: AC.

Sprendimas:

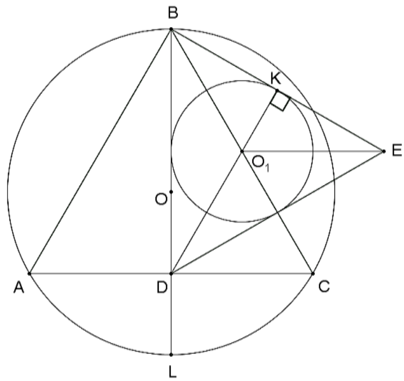
$\angle C = 60°$; $\angle OCD = 30°$;
$O_1C = 2O_1K = 2r$ (statinio prieš 30° kampą savybė);
$OC = 6r$;

Iš stataus ΔODC: $\cos 30° = \frac{DC}{OC}$;
$DC = OC \cdot \cos 30° = 6r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3r\sqrt{3}$;
$AC = 2DC = 6r\sqrt{3}$.

Ats: $6r\sqrt{3}$.

8. Į apskritimą, kurio skersmuo $\sqrt{12}$, įbrėžtas taisyklingas trikampis. Ant jo aukštinės, kaip ant kraštinės, nubrėžtas kitas taisyklingas trikampis, į kurį įbrėžtas naujas apskritimas. Kokio ilgio naujojo apskritimo spindulys?

Duota: apskritimas O;
BL= $\sqrt{12}$;
ΔABC; AB = BC = AC;
AD$\perp$AC;
AD = DE= BE;
apskritimas O_1; $O_1K\perp BE$.



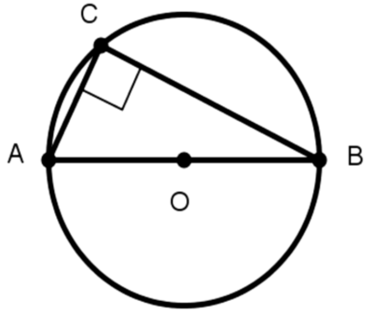
Apskaičiuoti: O_1K.

Sprendimas:

AB = OB$\sqrt{3}$ = $\frac{1}{2}$ BL$\sqrt{3}$ = $\frac{1}{2}$ ·
$\sqrt{12}$ · $\sqrt{3}$ = 3;
BD = AB · sin 60° = 3 · $\frac{\sqrt{3}}{2}$= $\frac{3\sqrt{3}}{2}$;
BK= KE = $\frac{1}{2}$ BD = $\frac{3\sqrt{3}}{4}$;
KEO_1= 30°; O_1K = KE · tg 30° = $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ · $\frac{\sqrt{3}}{3}$= $\frac{3}{4}$.

Ats: $\frac{3}{4}$.

9. Į skritulį įbrėžto stačiojo trikampio statiniai lygūs 5cm ir 12 cm. Raskite skritulio plotą.



Duota: ΔABC; $\angle C=90°$; apskritimas (O; OB);
AC = 5cm; CB = 12cm.

Apskaičiuoti: $S_{skritulio}$.

Sprendimas:

Apie statųjį trikampį apibrėžto apskritimo centras yra įžambinės vidurio taškas. Todėl $R = OA = OB$;

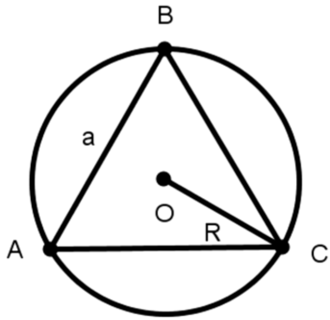
$AB^2 = AC^2 + BC^2$;
$AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$;

$R = \frac{1}{2}AB = 6{,}5$;

$S_{skritulio} = \pi R^2 = 42{,}25\pi\ (cm^2)$

Ats: $42{,}25\pi$ cm^2.

10. Į skritulį įbrėžtas taisyklingas trikampis, kurio plotas S. Raskite skritulio spindulį.



Duota: OC – spindulys; ΔABC.

Apskaičiuoti: $S_{skritulio}$.

Sprendimas:

Lygiakraščio trikampio plotas

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $a = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}}$; $a = 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}S}{3}}$;

(a- trikampio kraštinės ilgis).

Pagal taisyklingojo daugiakampio kraštinės išraišką per apibrėžto apskritimo spindulį:

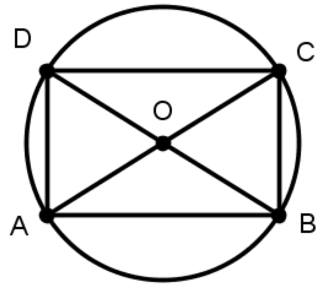
$$a_p = 2R\sin\frac{180°}{3};$$

$$a_3 = R\sqrt{3};$$

$$R\sqrt{3} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}S}{3}}; \quad R = 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}S}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{\sqrt{3}S};$$

Ats: $\frac{2}{3}\sqrt{\sqrt{3}S}$;

11. Stačiakampio perimetras lygus 46, o apibrėžto apie jį skritulio plotas lygus 72,25π. Apskaičiuokite stačiakampio plotą



Duota: ABCD – stačiakampis;
$P_{ABCD} = 46$; $S_{skritulio} = 72{,}25\pi$.

Apskaičiuoti: S_{ABCD}.

Sprendimas:

$S_{skritulio} = \pi R^2 = \pi OA^{2;}$ $\pi OA^2 = 72{,}25\pi$; $OA = 8{,}5$;

$AC = 2OA = 17$; $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 46$; $AB + BC = 23$;

Iš stataus ΔABC; $AC^2 = AB^2 + BC^2$;

$(AB + BC)^2 = 23^2$;
$AB^2 + 2AB \cdot + BC^2 = 529$;
$AC^2 + 2 \cdot AB \cdot BC = 529$;

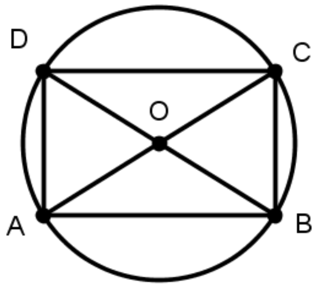
$2AB \cdot BC = 529 - 289$;
$2AB \cdot BC = 240$;
$AB \cdot BC = 120$;

$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 120$ (kv. v.).

Ats.: 120 kv. v.

12. Į 17 cm skersmens apskritimą įbrėžtas stačiakampis, kurio kraštinių skirtumas lygus 3. Apskaičiuokite stačiakampio perimetrą.

Duota: apskritimas; ABCD – stačiakampis; AC = 17 cm; AB – BC = 3.



Apskaičiuoti: P_{ABCD};

Sprendimas:

Iš stataus ΔABC: $AC^2 = AB^2 + BC^2$;
AB – BC = 3;
AB = 3 +BC;

$17^2 = (3 + BC)^2 + BC^2$; $289 = 9 + 6BC + BC^2 + BC^2$;

$2BC^2 + 6BC - 280 = 0$; $BC^2 + 3BC - 140 = 0$;

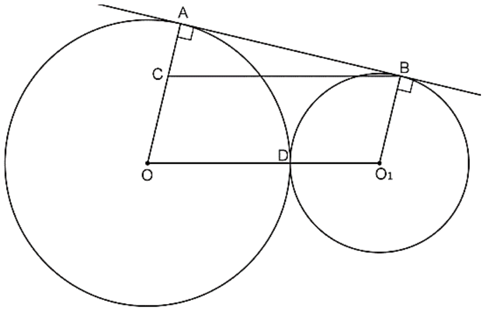
$BC = \frac{-3 \pm \sqrt{9+560}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{569}}{2}$;

$BC = \frac{-3+\sqrt{569}}{2}$; $AB = 3 + \frac{-3+\sqrt{569}}{2} = \frac{3+\sqrt{569}}{2}$;

$P_{ABCD} = 2\,(AB + BC) = 2\left(\frac{3+\sqrt{569}}{2} + \frac{-3+\sqrt{569}}{2}\right) = \sqrt{569}$.

Ats: $\sqrt{569}$.

13. Du apskritimai, kurių spinduliai R ir r, liečiasi iš išorės. Apskaičiuokite bendros jų liestinės ilgį.



Duota: apskritimai
O_1 ir O; OA = R; O_1B = r;
OA ⊥ AB; O_1B ⊥ AB.

Apskaičiuoti: AB.

Sprendimas:

OO_1 = R + r; BC ∥ OO_1;
O_1B∥OA, nes abi statmenos AB.

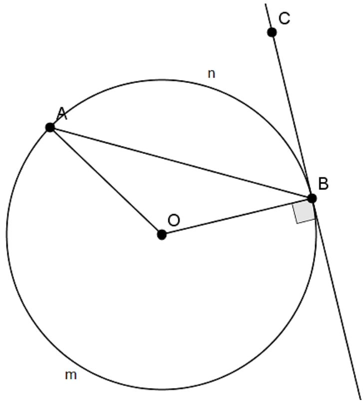
OO_1BC – lygiagretainis, OC = O_1B = r;
AC = R – r;
BC = OO_1 = R + r;

Iš stataus △ABC: $AB^2 = BC^2 - AC^2$;
$AB = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = \sqrt{2R \cdot 2r} = 2\sqrt{Rr}$.

Ats: $2\sqrt{Rr}$.

14. Raskite smailųjį kampą tarp liestinės ir stygos, nubrėžtos per lietimosi tašką, jeigu styga dalija apskritimo lanką santykiu 2:7

Duota: apskritimas O, liestinė CB; AB-styga; ◡AnB:◡AmB = 2:7.



Apskaičiuoti: ∠ABC.

Sprendimas:

1) būdas:

◡AnB = $\frac{2}{9}\cdot 360^{\circ} = 80^{\circ}$;

∠ABC = $\frac{1}{2}$◡AnB = 40°;

2) būdas:

OB statmena BC; $\angle OBC = 90^{\circ}$; ΔAOB – lygiašonis,

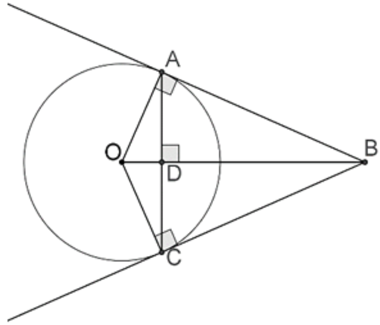
$\angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2}(180^{\circ} - \angle AOB) = \frac{1}{2}\cdot 100^{\circ} = 50^{\circ}$.

$\angle AOB = 80^{\circ}$ – centrinis kampas;

$\angle ABC = 90^{\circ} - 50^{\circ} = 40^{\circ}$.

Ats.: 40°.

15. Dvi to paties apskritimo liestinės kertasi smailiu kampu taške, kurio atstumas nuo apskritimo centro lygus 25 cm. Atstumas tarp lietimosi taškų lygus 24 cm. Apskaičiuokite apskritimo spindulio ilgį.



Duota: apskritimas O, liestinės AB ir BC,
OB = 25 cm, AC = 24 cm;

Apskaičiuoti: OA.

Sprendimas:

$AD = \frac{1}{2}AC = 12$ cm;

⊿ABC-status (liestinės statmena spinduliui, nubrėžtam į lietimosi tašką).
$OD = x$; $DB = 25 - x$; $(x < 25;\ x > 0)$

Pagal Pitagoro teoremos išvadas:
$AD^2 = OD \cdot DB$;
$12^2 = x(25 - x)$; $x^2 - 25x + 144 = 0$; $D = 49$;

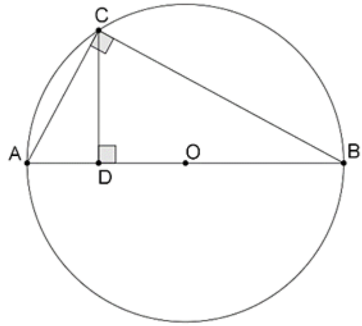
$x_1 = \frac{25-7}{2} = 9$; $x_2 = \frac{25+7}{2} = 16$;

Pagal mano brėžinį:

$OD = 9$; $DB = 16$; $OA^2 = OD^2 + AD^2$;
$OA = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = 15$;

Ats.: 15 cm.

16. Statmuo, nuleistas iš apskritimo taško į skersmenį, dalija jį į atkarpas, kurių viena ilgesnė už kitą 12 cm. Statmens ilgis 8 cm. Apskaičiuokite to apskritimo ribojamo skritulio plotą.



Duota: apskritimas O; AB – skersmuo; CD ⊥ AB; CD = 8 cm; DB = AD + 12;

Apskaičiuoti: S_O.

Sprendimas:

$\triangle ACB -$ status, nes $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB = 90°$;

Pagal Pitagoro teoremos išvadas:

$CD^2 = AD \cdot DB;\ 8^2 = AD(AD + 12);\ AD^2 + 12AD - 64 = 0;$

$(AD)_1 = -16$ (netinka); $(AD)_2 = 4;\ DB = 4 + 12 = 16;$

$AB = AD + DB = 4 + 15 = 20;$

$AO = \frac{1}{2} AB = 10$ (cm);

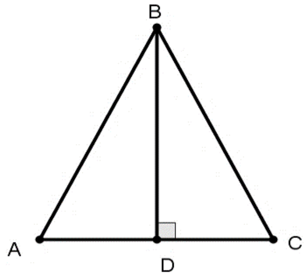
$S_O = \pi AO^2 = 100\pi$ (cm^2).

Ats.: 100π cm^2.

II skyrius

TRIKAMPIS

17. Lygiašonio trikampio pagrindo ir šoninės kraštinės santykis lygus 6:5. Apskaičiuokite to trikampio aukštinės, nubrėžtos į pagrindą, ilgį, kai jo plotas lygus 48.



Duota: ΔABC; $AB = BC$;
$AC:BC = 6:5$; $BD \perp AC$;
$S_{\Delta ABC} = 48$.

Apskaičiuoti: BD.

Sprendimas:

$CD = \frac{1}{2} AC$, nes ΔABC – lygiašonis;

$DC:BC=3:5$;
Vienai santykio daliai tenka x ($x>0$), kai $AC = 6x$, $DC = 3x$, $BC = 5x$;

Iš stataus ΔBDC: $BD^2 = BC^2 - DC^2$;

$BD = \sqrt{25x^2 - 9x^2} = 4x$;

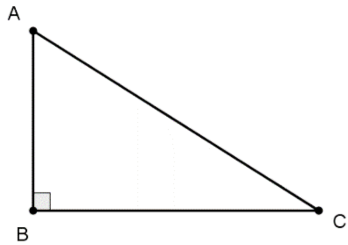
$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2} AC \cdot BD=\frac{1}{2} \cdot 6x \cdot 4x=48$;

$x^2 = 4$; $x = 2$;
$BD = 4 \cdot 2=8$.

Ats.: 8.

18. Stačiojo trikampio vienas statinis 10 didesnis už kitą statinį, bet 10 mažesnis už įžambinę. Apskaičiuokite trikampio plotą.

Duota: ΔABC; $\angle C = 90°$;
$CB = AC+10$; $CB = AB-10$.



Apskaičiuoti: $S_{\Delta ABC}$.

Sprendimas:

$AB^2 = AC^2 + BC^2$;
$BC = x$, $(x>0)$; $AC = x-10$; $AB = x+10$;

$(x + 10)^2 = (x - 10)^2 + x^2$;

$x^2 + 20x + 100 = x^2 - 20x + 100 + x^2$;

$x^2 - 40x = 0$;

$x (x - 40) = 0$;

$x \neq 0$, tai $x - 40 = 0$; $x = 40$.

$CB = 40$; $AC = 40 - 10 = 30$;

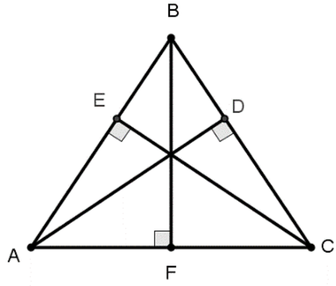
$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 = 600$ (kv.v).

Ats.: 600 kv.v.

19. Dvi trikampio kraštinės lygios 3 ir 6. Aukštinių, nuleistų į šias kraštines, ilgių aritmetinis vidurkis yra lygus trečiajai trikampio aukštinei. Apskaičiuokite trečiosios kraštinės ilgį.

Duota: ΔABC; $AB = 3$; $AC = 6$;
$CE \perp AB$; $BF \perp AC$; $AD \perp BC$;

Apskaičiuoti: BC.



Sprendimas:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BF = \frac{1}{2} AB \cdot CE \ \frac{1}{2} BC \cdot AD;$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot CE; \ BF = \frac{1}{2} CE;$$

$$AD = \frac{CE + \frac{1}{2} CE}{2} = \frac{3}{4} CE;$$

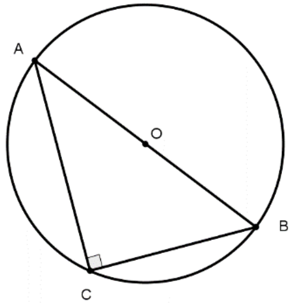
$$\frac{1}{2} AB \cdot CE = \frac{1}{2} BC \cdot AD;$$

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot \frac{3}{4} CE; \ BC = 4.$$

Ats.: 4.

20. Stačiojo trikampio plotas lygus 60, o jo perimetras – 40. Raskite apie šį trikampį apibrėžto apskritimo ilgį.

Duota: ΔABC; $\angle C = 90°$;
$S_{\Delta ABC} = 60$;
$P_{\Delta ABC} = 40$; apskritimas (O;OB).



Apskaičiuoti: C.

Sprendimas:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 60;$

$P_{\Delta ABC} = AB + AC + BC = 40;$

$AB^2 = AC^2 + BC^2;$

$(AC + BC)^2 = (40 - AB)^2;$

$AC^2 + 2AC \cdot BC + BC^2 = 1600 - 80AB + AB^2;$

$AB^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BC = 1600 - 80AB + AB^2;$

$80AB = 1600 - 4 \cdot 60; \; AB = 17.$

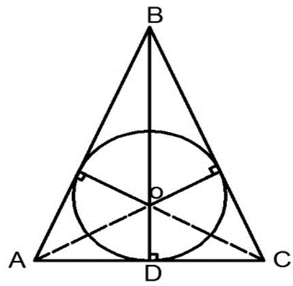
Apie statųjį trikampį apibrėžto apskritimo centras yra jo įžambinės vidurio taškas, todėl $OB = \frac{1}{2} AB = 8{,}5;$

$C = 2\pi OB = 17\pi$.

Ats.: 17π.

21. **Lygiašonio trikampio šoninė kraštinė lygi 39, o jo pagrindas lygus 30.Raskite į trikampį įbrėžto apskritimo spindulį.**

Duota: ΔABC; AB = BC = 39; AC = 30; apskritimas (O;OD).



Apskaičiuoti: OD.

Sprendimas:

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$;

$p = \frac{1}{2}(AB+BC+AC)$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}Pr$;
r = OD;

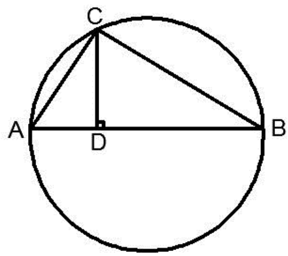
$p = \frac{1}{2}(2 \cdot 39+30) = 54$;

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{54 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 24} = 540$

$\frac{1}{2} \cdot 108 \cdot r = 540$; r = 10; OD =10

Ats.: 10.

22. Statmuo, nuleistas iš apskritimo taško į skersmenį , dalija jį į atkarpas, kurių ilgių skirtumas lygus 18cm. Apskaičiuokite apskritimo skersmens ilgį, kai statmens ilgis lygus12cm.



Duota: apskritimas O; $CD \perp AB$;
$DB - AB = 18$cm;

Apskaičiuoti: AB.

Sprendimas:

Pagal išvadą iš Pitagoro teoremos:
$CD^2 = AD \cdot DB$

Jei $AD = x (x > 0)$, tai $DB = 18+x$

$12^2 = x(18 + x)$;

$x^2 + 18x - 144 = 0$

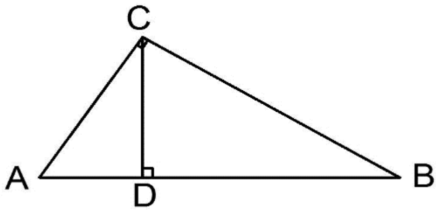
$x_1 = -24$; $x_2 = 6$;

$AD = 6$;
$DB = 18 + 6 = 24$;
$AB = AD+DB = 30$ (cm).

Ats.: 30cm.

23. Stataus trikampio plotas lygus $2\sqrt{3}$ cm^2.Apskaičiuokite jo aukštinę, nuleistą į įžambinę, jeigu ji dalija statųjį kampą santykiu 1:2.

Duota: ΔABC; $\angle C = 90°$;
$S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{3}$cm^2; $CD \perp AB$;
$\angle ACD : \angle DCB = 1:2$



Apskaičiuoti: CD.

Sprendimas:

Vienai santykio daliai tenka 90°:3 = 30°; ($\angle C = 90°$); $\angle ACD = 30°$; $\angle DCB = 60°$;

Iš st. ΔABC: $AC = \frac{CD}{\cos \angle ACD} = \frac{CD}{\cos 30°} = \frac{2CD}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}CD}{3}$;

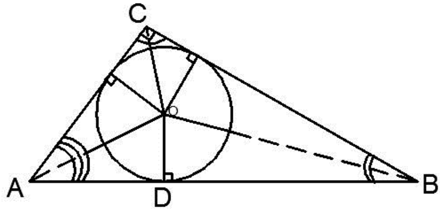
Iš st. ΔBCD: $BC = \frac{CD}{\cos \angle DCB} = 2CD$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot CB$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}CD}{3} \cdot 2CD = 2\sqrt{3}$;

$\frac{1}{3}CD^2 = 1$; $CD^2 = 3$; $CD = \sqrt{3}$;

Ats.: $\sqrt{3}$cm.

24. Į statųjį trikampį įbrėžtas apskritimas. Lietimosi taškas dalija įžambinę į cm ir cm ilgio atkarpas. Raskite trikampio statinių ilgius.



Duota: ΔABC; $\angle C = 90°$; apskritimas (O;OD); $CD \perp AB$; $AD = 5cm$; $DB = 12cm$.

Apskaičiuoti: AC ir BC

Sprendimas:

Liestinė statmena spinduliui, nubrėžtam į lietimosi tašką: $OE \perp AC$; $OF \perp BC$; $AE = AD$; $BD = BF$, $CE = CF$- liestinių atkarpos iki lietimosi taškų yra lygios;

$CE = CF = x$; $AC = 5+x$; $BC = 12+x$; $(x>0)$;

$AB^2 = AC^2 + BC^2$; $17^2 = (5 + x)^2 + (12 + x)^2$;

$289 = 25 + 10x + x^2 + 144 + 24x + x^2$;

$2x^2 + 34x - 120 = 0$;

$x^2 + 17x - 60 = 0$;

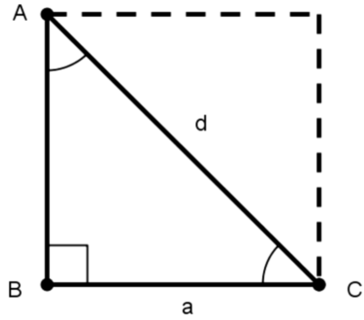
$x_1 = -20$;

$x_2 = 3$;

$AC = 8$; $BC = 15$;

Ats.: 8cm; 15cm.

25. Stataus lygiašonio trikampio plotas $4a^2$. Raskite trikampio įžambinę.



Duota: S = $4a^2$.

Apskaičiuoti: d.

Sprendimas:

Stataus lygiašonio trikampio plotas yra $\frac{1}{2}$ kvadrato ploto.

Kvadrato plotas = $\frac{1}{2}d^2$ (d – kvadrato įstrižainė, arba trikampio įžambinė).

$S_\Delta = \frac{1}{4}d^2$;

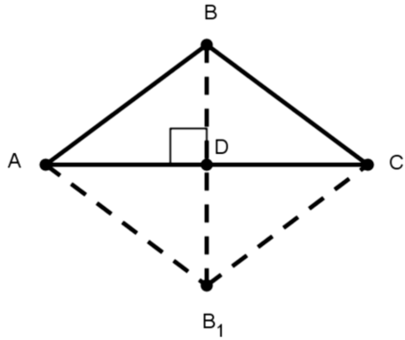
$\frac{1}{4}d^2 = 4a^2$;

$d^2 = 16a^2$;

d = 4a.

Ats: 4a.

26. Lygiašonio trikampio viršūnės kampas lygus 120°, šoninė kraštinė lygi 14cm. Nubraižykite trikampį, simetrišką duotajam trikampiui, jo pagrindo atžvilgiu ir apskaičiuokite gauto keturkampio perimetrą ir trumpesniąją įstrižainę.



Duota: ΔABC; AB = BC = 14cm; $\angle ABC = 120°$.

Nubraižyti: $S_{AC}(\Delta ABC)$.

Apskaičiuoti: P_{ABCB_1}; BB_1.

Sprendimas:

$S_{AC}(\Delta ABC) = \Delta AB_1C_1$;
$BD \perp AC$; $BD = DB_1$;

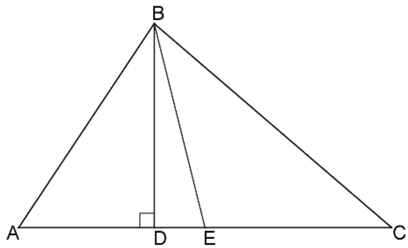
$ABCB_1$ − rombas.
$\angle ABD = \angle DBC = 60°$;
$\angle BAB_1 = \angle BCB_1 = 60°$.

ΔBCB_1 − lygiakraštis.
$B_1C = BC = 14$cm;
$P_{ABCB_1} = 4BC = 4 \cdot 14 = 56$cm.

$BB_1 = BC = 14$cm.

Ats: 56 cm, 14cm.

27. Trikampio pagrindas lygus 60cm, aukštinė 12cm, pusiaukraštinė, nuleista į pagrindą, lygi 13cm. Rasti šonines kraštines.



Duota: ΔABC; $AC = 60cm$;
$BD \perp AC$; $BD = 12cm$;
$AE = EC$; $BE = 13cm$.

Apskaičiuoti: AB; BC.

Sprendimas:

$AE = EC = 30cm$;

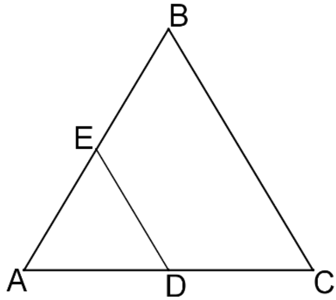
Iš st. ΔBDE: $DE^2 = BE^2 - BD^2$;
$DE = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$
$AD = AE - DE = 25$ (cm).

Iš stataus ΔABD: $AB^2 = AD^2 + BD^2$;
$AB = \sqrt{25^2 + 12^2} = \sqrt{769}$;
$DC = CE + DE = 35$(cm)

Iš st. ΔBDC: $BC^2 = BD^2 + DC^2$;
$BC = \sqrt{12^2 + 35^2} = 37$

Ats.: $\sqrt{769}$ cm, 37cm.

28. Lygiakraščio trikampio kraštinė lygi 6cm. Per dviejų kraštinių vidurio taškus nubrėžta atkarpa. Nustatykite gauto keturkampio rūšį ir apskaičiuokite jo perimetrą.



Duota: ΔABC;
$AB = BC = AC = 6$cm; $AE = EB$;
$AD = DC$.

Nustatyti: P_{EBCD}; rūšį EBCD.

Sprendimas:

ED **-** ΔABC vidurinė linija, tai

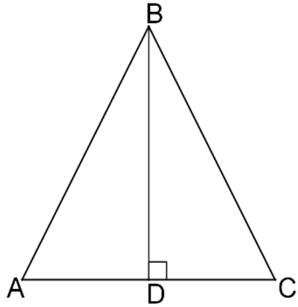
$ED \parallel BC$ ir $ED = \frac{1}{2} BC = 3$(cm)

EBCD – trapecija ($ED \parallel BC$, $EB \parallel DC$).
$EB = DC = 3$cm;

$P_{EBCD} = 2EB + BC + ED = 2 \cdot 6+3+3 = 18$ (cm).

Ats.: 18cm.

29. Lygiašonio trikampio pagrindas 6cm, o šoninė kraštinė 10cm. Raskite trikampio plotą.



Duota: ΔABC; AC = 6cm;
AB = BC = 10cm.

Apskaičiuoti: $S_{\Delta ABC}$

Sprendimas:

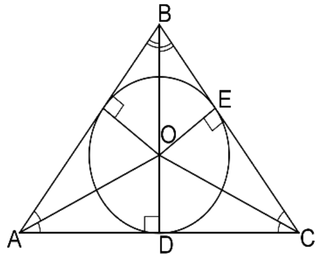
$BD \perp AC$;
AD = DC = 3cm.

Iš stataus ΔBDC: $BD^2 = BC^2 - DC^2$;
$BD = \sqrt{10^2 - 3^2} = \sqrt{91}$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{91} = 3\sqrt{91}$ (cm^2).

Ats.: $3\sqrt{91}$ cm^2.

30. Lygiašonio trikampio aukštinė lygi 48, o pagrindo santykis su šonine kraštine yra 4: 3. Raskite įbrėžto į trikampį apskritimo spindulį ir ilgį.



Duota: ΔABC; $AB = BC$;

$BD \perp AC$; $BD = 48$;

$AC : BC = 4 : 3$; apskritimas (O, OD).

Apskaičiuoti: r = OD; apskritimo ilgį C.

Sprendimas:

AD = DC, vienai santykio daliai tenka x (x > 0).

$DC = AD = 2x$; $BC = 3x$;

Iš stataus ΔBDC: $BD^2 = BC^2 - DC^2$;

$48^2 = (3x)^2 - (2x)^2$;

$5x^2 = 48^2$;

$$x = \frac{48}{\sqrt{5}} = \frac{48\sqrt{5}}{5};\ AC = 4\cdot\frac{48\sqrt{5}}{5} = 38{,}4\sqrt{5};\quad BC = 28{,}8\sqrt{5}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}P_{ABC}\cdot r;$$

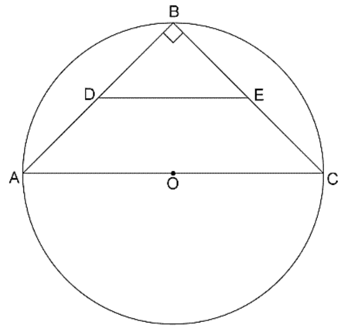
$$\frac{1}{2}\cdot 38{,}4\sqrt{5}\cdot 48 = \frac{1}{2}r\left(2\cdot 28{,}8\sqrt{5} + 38{,}4\sqrt{5}\right);$$

$$r = \frac{38{,}4\sqrt{5}\cdot 48}{96\sqrt{5}} = 19{,}2;$$

$C = 2\pi r = 38{,}4\pi$.

Ats.: 19,2; $38{,}4\pi$.

31. Iš apskritimo taško nubrėžtos dvi viena kitai statmenos stygos. Atkarpa, jungianti šių stygų vidurio taškus, lygi 12 cm. Apskaičiuokite apskritimo spindulį.



Duota: apskritimas O; AB ⊥ BC; AD = DB, BE = EC; DE = 12 cm.

Apskaičiuoti: OC.

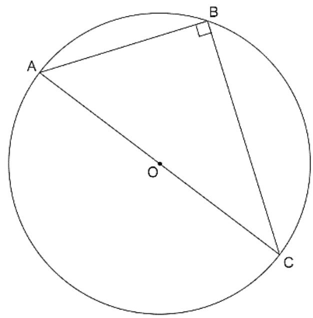
Sprendimas:

Jei sujungsime stygų AB ir BC galus atkarpa AC, tai AC bus apskritimo skersmuo, nes ∠ABC = 90°= $\frac{1}{2}$ ◡AC (įbrėžtinio kampo sąvybė).

Todėl DE yra △ABC vidurinė linija DE = $\frac{1}{2}$ AC = 12 (cm).

Ats.: 12 cm.

32. Apskritimas, kurio spindulys 20 cm, padalytas santykiu 1 : 2 : 3 ir dalijimo taškai sujungti stygomis. Apskaičiuokite gauto trikampio didžiausią kraštinę.



Duota: apskritimas O; R = 20 cm;
$\smile AB : \smile BC : \smile AC = 1 : 2 : 3$.

Apskaičiuoti: AC.

Sprendimas:

Vienai santykio daliai tenka
$360^o : (1 + 2 + 3) = 60^o$;
$\smile AB = 60^o$; $\smile BC = 120^o$; $\smile AC = 180^o$.

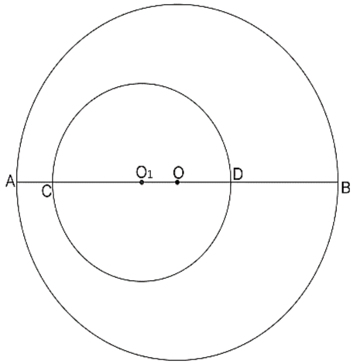
$\angle B = \frac{1}{2} \smile AC = 90^o$ – įbrėžtinio kampo savybė.

$\triangle ABC$ – statusis; didžiausia kraštinė AC, kuri yra ir skersmuo, t.y. AC = 2R = 40 (cm).

Ats.: 40 cm.

33. Vienas apskritimas yra kito viduje. Mažesnysis apskritimas dalija didesniojo apskritimo skersmenį, einantį per mažesniojo apskritimo centrą, į tris dalis, lygias 2 cm, 10 cm, 6 cm. Apskaičiuokite apskritimų spindulius.

Duota: apskritimai O ir O_1;
AC = 2 cm; CD = 10 cm;
DB = 6 cm.



Apskaičiuoti: O_1C; OA.

Sprendimas:

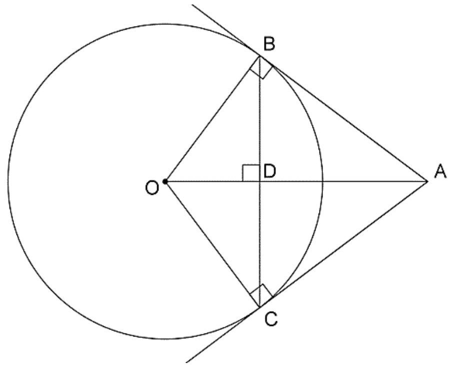
$O_1C = \frac{1}{2}$ CD = 5 cm;

O_1D = 5 cm;

OA = $\frac{1}{2}$ AB = $\frac{1}{2}$ (AC + CD + DB) = $\frac{1}{2}$ (2 + 10 + 6) = 9 (cm).

Ats.: 5 cm; 9 cm.

34. Iš taško nubrėžtos dvi apskritimo liestinės, kurių ilgiai lygūs 120. Raskite apskritimo spindulį, kai atstumas tarp lietimosi taškų lygus 144.



Duota: apskritimas O;
liestinės AB ir AC;
AB = AC = 120; BC = 144.

Apskaičiuoti: OB.

Sprendimas:

OB ⊥ AB – liestinė ⊥ spinduliui, nubrėžtam į lietimosi tašką;

BC ⊥ OA, nes △OBC ir △ABC – lygiašoniai, △OBA = △OCA;

BD = $\frac{1}{2}$ BC = 72;

Iš statuso △BAD, pagal Pitagoro teoremą:
$AD^2 = AB^2 - BD^2$;
AD = $\sqrt{120^2 + 72^2}$ = $\sqrt{(120 - 72) \cdot (120 + 72)}$ = $\sqrt{48 \cdot 192}$ = 96.

Pagal Pitagoro teoremos išvadas: $AB^2 = OA \cdot AD$;
OA = $\frac{120^2}{96}$ = 150;

OD = OA – AD = 150 – 96 = 54;

Iš statuso △OBD: $OB^2 = OD^2 + BD^2$;
OB = $\sqrt{54^2 + 72^2}$ = $\sqrt{8100}$ = 90.

Ats.: 90.

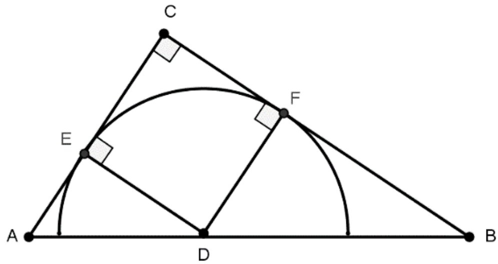
35. Į statųjį trikampį įbrėžtas pusapskritimis taip, kad jo skersmuo yra įžambinėje. Pusapskritimio centras dalija įžambinę į atkarpas, lygias 15cm ir 20cm. Raskite pusapskritimio lanko ilgį, kuris yra tarp statinių su pusapskritimiu lietimosi taškų.

Duota: ΔABC; $\angle$C = 90°

AD = 15cm; DB = 20cm;

Apskaičiuoti: $\cup$EF ilgį.

Sprendimas:



AB = AD + DB = 35cm;

CE = CF – liestinių atkarpos iki lietimosi taškų yra lygios.
ECFD – kvadratas.

ΔABC ~ ΔDFB – statūs ir $\angle$B – bendras, $\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DB}$; $\frac{r+AE}{r} = \frac{35}{20}$; 4r + 4AE = 7r; 3r = 4AE; AE = $\frac{3}{4}r$

Pagal Pitagoro teoremą:

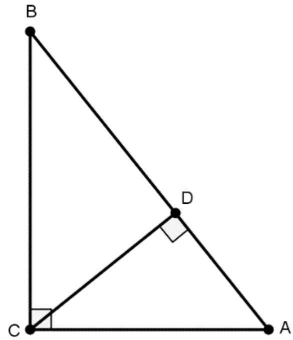
$AD^2 = AE^2 + ED^2$

$15^2 = \left(\frac{3}{4}r\right)^2 + r^2$; $225 = \frac{25}{16}r^2$; $r^2 = 144$, r = 12

$l\cup EF = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi r = \frac{90°}{180°} \cdot \pi r = \frac{1}{2}\pi \cdot 12 = 6\pi$ (cm)

Ats.: 6π cm.

36. Stačiojo trikampio statiniai lygūs 6 cm ir 8 cm, o įžambinė – 10 cm. Apskaičiuokite aukštinės, nubrėžtos į įžambinę ilgį.



Duota: ΔABC; $\angle ACB = 90\,^{o}$;

$CD \perp AB$; $AC = 6$ cm; $BC = 8$ cm;
$AB = 10$ cm.

Apskaičiuoti: CD.

Sprendimas

Pagal Pitagoro teoremos išvadas:
$AC^2 = AB \cdot AD$;

$AD = \frac{AC^2}{AB} = \frac{10^2}{8 \cdot 6} = \frac{25}{12}$;

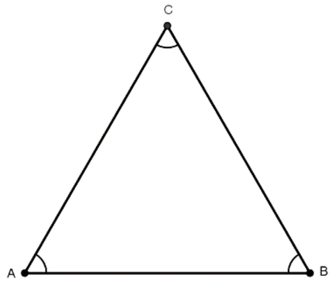
$DB = AB - AD = 10 - \frac{25}{12} = \frac{95}{12}$;

$CD^2 = AD \cdot DB$;

$CD = \sqrt{\frac{25}{12} \cdot \frac{95}{12}} = \frac{5 \cdot \sqrt{95}}{12}$ (cm).

Ats.: $\frac{5 \cdot \sqrt{95}}{12}$ cm.

37. Lygiakraščio trikampio plotas lygus $\sqrt{3}$. Apskaičiuokite ilgį apskritimo, kurio spindulys būtų lygus duotojo trikampio kraštinei.



Duota: S = $\sqrt{3}$.

Apskaičiuoti: C.

Sprendimas:

$S_{lygiakraščio} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;
kur a – trikampio kraštinė.

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$;

$a^2 = 4$; $a = 2$

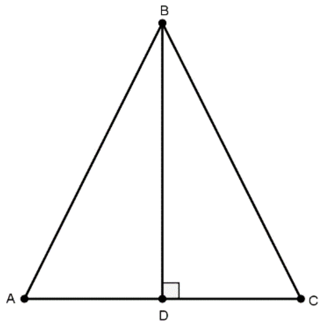
C = 2πR;
R = a = 2;
C = 4π (cm).

Ats.: 4π cm.

38. Lygiašonio trikampio aukštinės ir pagrindo santykis $\frac{3}{2}$. Raskite trikampio plotą, kai jo šoninė kraštinė lygi 10 cm.

Duota: ΔABC; $AB = BC = 10$ cm;

$BD \perp AC$; $\frac{BD}{AC} = \frac{3}{2}$.



Apskaičiuoti: $S_{\Delta ABC}$.

Sprendimas:

$\frac{BD}{AC} = \frac{3}{2}$;

$BD = \frac{3}{2}AC = \frac{3}{2} \cdot 2DC = 3DC$;

Iš stataus ΔBDC: $BC^2 = BD^2 + DC^2$;

$10^2 = (3DC)^2 + DC^2$;

$10DC^2 = 100$;

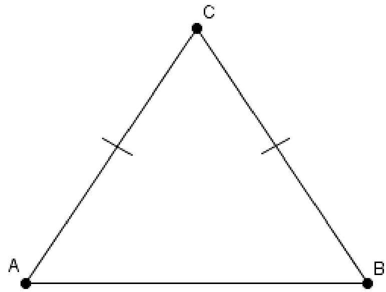
$DC = \sqrt{10}$;

$BD = 3\sqrt{10}$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = DC \cdot BD = \sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} = 30$ (cm^2).

Ats.: 30 cm^2.

39. Lygiašonio trikampio viršūnės kampas lygus 30°. Raskite trikampio šonines kraštines, jei jo plotas lygus 200cm².



Duota: $\triangle ABC$- lygiašonis,
$\angle ABC = 30°$; $S_{\triangle ABC} = 200$ cm².

Apskaičiuoti: AB ir BC.

Sprendimas:

Tarkime, kad kraštinė
AB = x (cm) (x>0).

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB^2 \cdot \sin \angle B$

$\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \sin 30° = 200$

$x^2 \cdot \frac{1}{4} = 200 \; |\cdot 4; \; x^2 = 800,$

$x = \sqrt{800} = 20\sqrt{2}$ (cm)

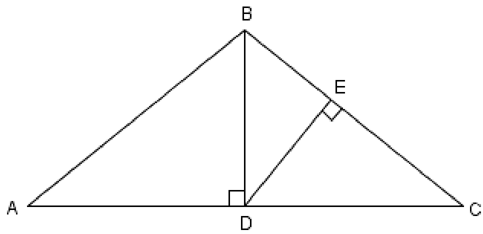
Tai kraštinė AB = $20\sqrt{2}$ (cm)

AB = BC = $20\sqrt{2}$ (cm)

Ats.: $20\sqrt{2}$ (cm).

40. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 8 cm, o aukštinės, nuleistos į pagrindą, ilgis lygus 3 cm . Raskite trikampio pagrindo vidurio taško atstumą iki šoninės kraštinės.

Duota: ΔABC ; $AB = BC$;
$BD \perp AC$; $BD = 3$ cm;
$AC = 8$ cm ; $DE \perp BC$.



Apskaičiuoti: DE.

Sprendimas:

1) būdas

$DC = \frac{1}{2}AC$; $AC = 4$(cm).
Iš stataus ΔBDC : $BC^2 = BD^2 + DC^2$;
$BC = 5$(cm)

Pagal Pitagoro teoremos išvadas : $BD^2 = BC \cdot BE$;
$BE = \frac{BD^2}{BC} = \frac{9}{5} = 1,89$(cm) ;
$EC = 5 - 1,8 = 3,2$(cm)

$DE^2 = BE \cdot EC$; $DE = \sqrt{1,8 \cdot 3,2} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 0,01} = 2,4$(cm)

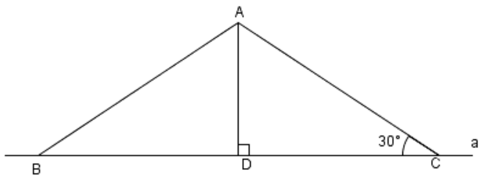
2) būdas

$S_{\Delta BDC} = \frac{1}{2} BC \cdot DE = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4} AC \cdot BD$;
$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot DE = \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot 3$;
$DE = \frac{6}{2,5} = \frac{60}{25} = \frac{12}{5} = 2,4$(cm).

Ats.: 2,4 cm .

41. Iš vieno taško, esančio šalia tiesės, nubrėžtos dvi pasvirosios. Viena jų yra 13 mm ilgio, o jos projekcija tiesėje yra 12 mm. Raskite antrosios pasvirosios ilgį, jeigu ji su tiese sudaro 30º kampą.

Duota: AB ir AC pasvirosios ; AB = 13 mm ; AD⊥BC***;*** BD = 12 mm ; $\angle ACD = 30^{o}$



Apskaičiuoti: AC .

Sprendimas:

Iš stataus ΔABD: $AD^2 = AB^2 - BD^2$;
AD = $\sqrt{13^2 - 12^2}$ = 5(mm).

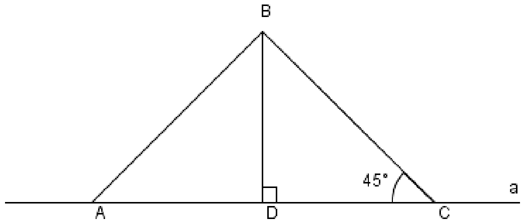
Iš stataus ΔADC: AC = 2AD – statinio prieš 30^{o} kampą savybė.

AC = 10 (mm).

Ats.: 10 mm .

42. Iš taško, esančio šalia tiesės, į ją nubrėžtos dvi pasvirosios. Viena jų yra 17 cm ilgio, o jos projekcija tiesėje lygi 15 cm. Raskite antrosios pasvirosios projekcijos ilgį, jeigu ji su tiese sudaro 45º kampą.

Duota: B $\notin$ a; AB ir BC pasvirosios;
AB = 17 cm; BD$\perp$a;
AD = 15 cm;
$\angle$BCD = 45º .



Apskaičiuoti: BC .

Sprendimas:

Iš stataus ΔABD : BD^2 = AB^2 – AD^2 ;
BD = $\sqrt{17^2 - 15^2}$ = 8(cm).

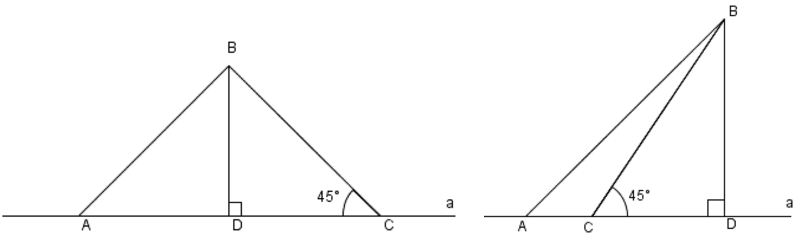
ΔBDC – lygiašonis, nes $\angle$DCB = $\angle$DBC = 45º.

DC = BD = 8 (cm).

BC^2 = BD^2 + DC^2 ; BC = $8\sqrt{2}$ (cm).

Ats.: $8\sqrt{2}$ cm .

43. **Iš taško esančio 6 cm atstumu nuo tiesės, į ją nubrėžtos dvi pasvirosios. Viena iš jų lygi 14 cm, o kita pasviroji su tiese sudaro 45o kampą. Raskite atstumą tarp pasvirųjų pagrindų.**



2pav. 1pav.

Duota: B $\notin$ a ; BD$\perp$a ; BD = 6 cm ; AB = 14 cm ; $\angle$BCD = 45^o .

Apskaičiuoti: AC .

Sprendimas:

1 pav. Iš stataus ΔABD : AD^2 = AB^2 – BD^2 ; AD = $\sqrt{14^2 - 6^2}$ = $\sqrt{20 \cdot 8}$ = $4\sqrt{10}$(cm)

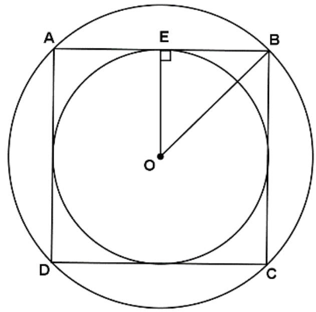
Iš stataus ΔBCD : CD = BD = 6(cm), nes $\angle$DCB = $\angle$CBD = 45^o

AC = AD + DC = $4\sqrt{10}$ + 6(cm)

2 pav. AC = AD – CD = $4\sqrt{10}$ - 6(cm)

Ats.: $4\sqrt{10} \pm 6$ cm .

44. Apie kvadratą apibrėžtas spindulys ir į tą kvadratą įbrėžtas skritulys. Apskaičiuokite šių skritulių plotų santykį.



Duota: ABCD – kvadratas; skrituliai OB ir OE

Apskaičiuoti: $S_{OB} : S_{OE}$

Sprendimas:

AB = a;

Skritulių centras yra viename taške ir jis yra kvadrato įstrižainių susikirtimo centras.

$$OE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a;$$

$$S_{oe} = \pi OE^2 = \frac{1}{4}\pi a^2;$$

$$OB = OE\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a;$$

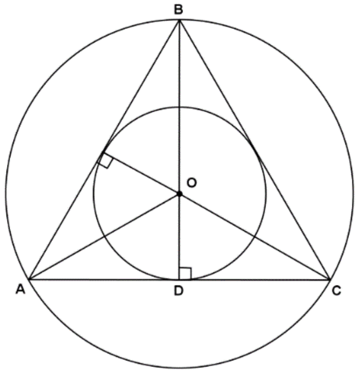
$$S_{OB} = \pi OB^2 = \frac{2}{4}\pi a^2;$$

$$S_{OB} : S_{OE} = \frac{\frac{2}{4}\pi a^2}{\frac{1}{4}\pi a^2} = 2 : 1.$$

Ats.: 2 : 1.

45. Apie taisyklingą trikampį apibrėžtas ir į tą trikampį įbrėžtas skritulys. Apskaičiuokite šių skritulių plotų santykį.

Duota: ΔABC; $AB = BC = AC$;
skrituliai OC ir OD.



Apskaičiuoti: $S_{OC} : S_{OD}$

Sprendimas

Į taisyklingą trikampio įbrėžto ir apibrėžto skritulio centrai sutampa ir tai yra pusiaukraštinių, pusiaukampinių ir aukštinių susikirtimo taškas.

Iš stataus ΔBDC; BD: $BC \cdot \sin 60° = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$OB = OC = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$S_{OC} = \pi OC^2 = \frac{3\pi a^2}{9} = \frac{\pi a^2}{3};$$

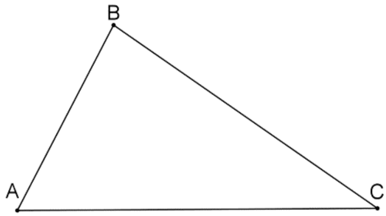
$$OD = \frac{1}{3}BD = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$S_{OD} = \pi OD^2 = \frac{3a^2\pi}{36} = \frac{\pi a^2}{12};$$

$$\frac{S_{OC}}{S_{OD}} = \frac{\pi a^2}{3}; \frac{\pi a^2}{12} = \frac{\pi a^2}{3} \cdot \frac{12}{\pi a^2} = 4.$$

Ats.: 4 : 1.

46. Trikampio kraštinė lygi 21, o smailiųjų kampų prie jos sinusai lygūs $\frac{8}{17}$ ir $\frac{4}{5}$. Raskite trikampio perimetrą.



Duota: ΔABC;

AC = 21; $\sin\angle A = \frac{8}{17}$;

$\sin\angle C = \frac{4}{5}$.

Apskaičiuoti: $P_{ABC.}$

Sprendimas:

$$\angle \mathrm{B} = 180° - (\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{C})$$

$$\sin\angle \mathrm{A} = \sin\big(180° - (\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{C})\big) = \sin(\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{C}) = \sin\angle \mathrm{A} \cdot \cos\angle \mathrm{C} + \sin\angle \mathrm{C} \cdot \cos\angle \mathrm{A} = \frac{8}{17} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{17} = \frac{24+60}{85} = \frac{84}{85};$$

Iš lygties $\sin^2\angle \mathrm{B} + \cos^2\angle \mathrm{B} = 1$

$$\cos\angle \mathrm{B} = \sqrt{1 - \sin^2 \mathrm{B}} = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{17} \cdot \frac{9}{17}} = \frac{15}{17};$$

Iš lygties $\cos^2\angle \mathrm{B} = 1 - \sin^2\angle \mathrm{B}$

$$\cos\angle \mathrm{C} = \sqrt{1 - \sin^2 \mathrm{C}} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot \frac{9}{5}} = \frac{3}{5};$$

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle \mathrm{B}} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle \mathrm{C}};$$

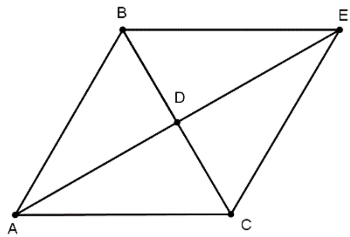
$$\mathrm{AB} = \frac{\mathrm{AC} \cdot \sin\angle \mathrm{C}}{\sin\angle \mathrm{B}} = \frac{21 \cdot \frac{4}{5}}{84} = 21 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{85}{84} = 17;$$

$$\frac{BC}{\sin\angle A}=\frac{AC}{\sin\angle B};\quad BC=\frac{AC\cdot\sin\angle A}{\sin\angle B}=\frac{21}{1}\cdot\frac{8}{17}\cdot\frac{85}{84}=\frac{2\cdot 85}{17}=10;$$

$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 17 + 10 + 21 = 58$.

Ats.: 58.

47. Lygiašonio trikampio šoninė kraštinė lygi $4\sqrt{10}$, o į ją nbrėžtas pusiaukraštinės ilgis $3\sqrt{10}$. Raskite trikampio pagrindo ilgį.



Duota: ΔABC; AB = BC = $4\sqrt{10}$;
BD = DC; AD = $3\sqrt{10}$.

Apskaičiuoti: AC.

Sprendimas:

Pratęsiam AD ir atidedame DE = AD.

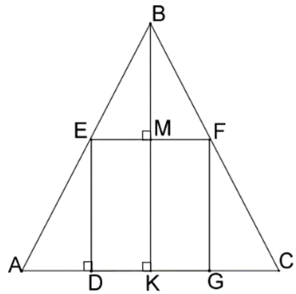
ABEC – lygiagretainis (keturkampis, kurio įstrižainės susikirsdamos dalijasi pusiau, yra lygiagretainis).

$\mathrm{AE}^2 + \mathrm{BC}^2 = 2(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2)$;
$\left(6\sqrt{10}\right)^2 + \left(4\sqrt{10}\right)^2 = 2\left(\left(4\sqrt{10}\right)^2 + \mathrm{AC}^2\right)$;

$520 = 320 + 2\mathrm{AC}^2$;
$\mathrm{AC}^2 = 200$;
$\mathrm{AC} = 10$.

Ats.: 10.

48. Į lygiakraštį trikampį įbrėžtas kvadratas. Viena kvadrato kraštinė yra trikampio kraštinėje, o kitos dvi viršūnės yra kitose trikampio kraštinėse. Raskite trikampio ir kvadrato plotų santykį.



Duota: ΔABC; AB = BC = AC;
EFGD – kvadratas.

Apskaičiuoti: $S_{trikampio} : S_{kvadrato}$

Sprendimas:

Tegul AB $= a$; $S_{trikampio} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;
$BK \perp AC$
Iš stataus ΔABC: $\sin 60° = \frac{BK}{AB}$; $BK = AB \cdot \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;
$EM = \frac{1}{2}EF$; $AK = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\alpha$;
$\Delta ABK \sim \Delta BME$, pagal du lygius kampus $\angle AKB = \angle BME = 90°$,
$\angle AKB$ bendras.

$$\frac{AK}{EM} = \frac{BK}{BM}; \quad \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}EF} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2} - EF};$$

$$EF \cdot a\sqrt{3} = a^2\sqrt{3} - 2EF \cdot a$$
$$EF\left(a\sqrt{3} + 2a\right) = a^2\sqrt{3};$$

$$EF = \frac{a^2\sqrt{3}}{a\left(\sqrt{3}+2\right)} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2};$$

$$\frac{BK}{ED} = \frac{AK}{AD};$$

$$\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{ED} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}ED};$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2ED} = \frac{a}{a - ED}; \quad 2aED = a^2\sqrt{3} - ED;$$

$$ED\left(2a + a\sqrt{3}\right) = a^2\sqrt{3};$$

$$ED = \frac{a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}; \qquad S_{kv} = \frac{3a^2}{7+4\sqrt{3}};$$

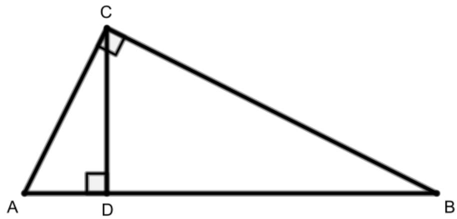
$S_{kvadrato} = EF^2 = \frac{3a^2}{7+4\sqrt{3}}$;

$$\frac{S_{tr.}}{S_{kv.}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{7+4\sqrt{3}}{3a^2} = \frac{7\sqrt{3}+12}{12}.$$

Ats.: $\frac{7\sqrt{3}+12}{12}$.

49. Stačiojo trikampio aukštinė, nubrėžta iš stačiojo kampo viršūnės, lygi h. Skirtumas tarp statinių trapecijų įžambinėje yra n. Raskite trikampio plotą.

Duota: ΔABC; $\angle C = 90°$;
$CD \perp AB$; $CD = h$;
$DB - AD = n$.



Apskaičiuoti: $S_{\Delta ABC}$

Sprendimas:

Pagal Pitagoro teoremos išvadas:
$CD^2 = AD \cdot DB$; $h^2 = AD \cdot DB$, $DB - AD = n$;

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{AB \cdot AD \cdot AB \cdot DB} = \frac{1}{2}AB\sqrt{AD \cdot DB} = \frac{1}{2}AB \cdot h$$

$(DB - AD)^2 = h^2$;

$DB^2 - 2AD \cdot DB + AD^2 = h^2$;

$DB^2 + 2AD \cdot DB + AD^2 = h^2 + 4AD \cdot DB$;

$(AD + DB)^2 = h^2 + 4AD \cdot DB$

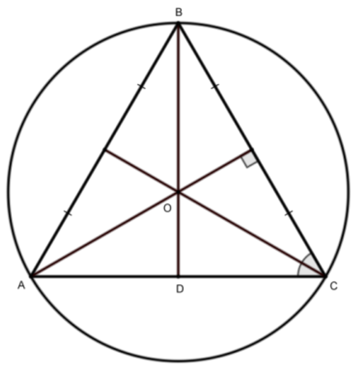
$AB^2 = h^2 + 4 \cdot h^2$; $AB = h\sqrt{5}$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot h\sqrt{5} \cdot h = \frac{h^2\sqrt{5}}{2}$;

Ats.: $\frac{h^2\sqrt{5}}{2}$ **.**

50. Lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo lygus α. Raskite trikampio ir apie jį apibrėžto skritulio plotų santykį.

Duota: ΔABC; $AB = BC$;
$\angle A = \angle C = \alpha$.



Apskaičiuoti: $S_{\Delta ABC} : S_{skrit.}$

Sprendimas:

$$AC = a;\ DC = \frac{1}{2}a;$$

$$BD = DC \cdot \text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}a \cdot \text{tg}\,\alpha;$$

$$AB = BC = \frac{DC}{\cos\alpha} = \frac{a}{2\cos\alpha}$$

Pagal sinusų teoremą: $\frac{AB}{\sin\alpha} = 2OC;$

$$OC = \frac{a}{4\cos\alpha\sin\alpha}$$

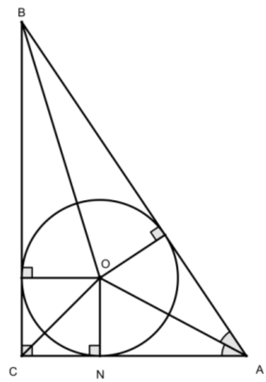
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a\,\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{4}a^2\,\text{tg}\,\alpha$$

$$S_{skrit.} = \pi OC^2 = \frac{\pi a^2}{16\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$$

$$S_{\Delta ABC} : S_{skrit.} = \frac{1}{4}a^2\,\text{tg}\,\alpha \cdot \frac{16\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\pi a^2} = \frac{2\sin 2\alpha \cdot \sin^2\alpha}{\pi}.$$

Ats.: $\frac{2\sin 2\alpha \cdot \sin^2\alpha}{\pi}$.

51. Į statųjį trikampį, kurio įžambinė lygi 26, įbrėžtas apskritimas, kurio spindulys lygus 4. Raskite trikampio perimetrą.



Duota: ΔABC; $\angle C = 90°$; $AB = 26$;

apskritimas δ; $ON = r = 4$.

Apskaičiuoti: $P_{\Delta ABC}$.

Sprendimas:

$$\frac{BC+AC-AB}{2} = ON;$$

$BC + AC - AB = 2 \cdot ON$;

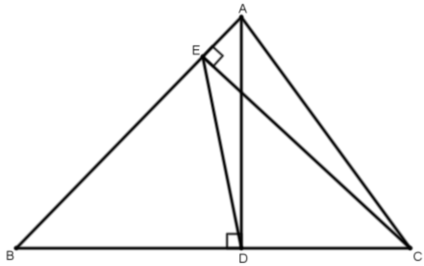
$BC + AC = 2ON + AB$;

$BC + AC = 8 + 26 = 34$;

$P\Delta ABC = AB + BC + AC = 26 + 34 = 60.$

Ats.: 60.

52. Trikampyje ABC nubrėžtos aukštinės AD ir CE. Raskite trikampių ABC ir AED plotų santykį, jei AB = 6; AC = 5; CB = 7.



Duota: ΔABC, AB = 6; AC = 5; CB = 7, AD⊥BC; CE⊥AB.

Apskaičiuoti: $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta AED}$.

Sprendimas:

Pagal Herono formulę

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}$; $p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = 9$;

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2} = 6\sqrt{6}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD$; $AD = \frac{2 \cdot S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{6}}{7} = \frac{12\sqrt{6}}{7}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CE$; $CE = \frac{2 \cdot S_{\Delta ABC}}{AB} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{6}}{6} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$.

Iš stataus ΔAED:

$AE^2 = AC^2 - CE^2$

$AE^2 = 5^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2 = 25 - 24 = 1$; $AE = 1$; $BE = AB - AE = 6 - 1 = 5$.

$\Delta ABD \sim \Delta CBE$, nes $\angle B$ - bendras, $\angle BEC = \angle ADB$ - statūs, tai pagal du lygius kampus.

Panašių trikampių atitinkamos kraštinės proporcingos:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CE} = \frac{BD}{BE}\ ;$$

$$\frac{6}{7} = \frac{BD}{5};\ BD = \frac{6 \cdot 5}{7} = \frac{30}{7};$$

$$S_{\Delta AED} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AD \cdot \sin(\angle EAD)$$

ΔABD – status; $\sin(\angle BAD) = \frac{BD}{AB}$ $\sin(\angle BAD) = \frac{\frac{30}{7}}{6} = \frac{5}{7}$

$$S_{\Delta AED} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{12\sqrt{6}}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{30\sqrt{6}}{49};$$

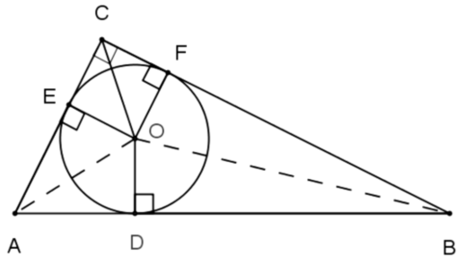
$$S_{\Delta ABC} : S_{\Delta AED} = 6\sqrt{6} : \frac{30\sqrt{6}}{49};\ S_{\Delta ABC} : S_{\Delta AED} = 1 : \frac{5}{49}$$

Ats: $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta AED} = 1 : \frac{5}{49}$.

53. Į statųjį trikampį įbrėžtas apskritimas. Lietimosi taškas dalija įžambinę santykiu 2:3. Raskite trikampio kraštines, plotą ir įbrėžto apskritimo spindulį, jei apskritimo centras nutolęs nuo stačiojo kampo viršūnės atstumu $\sqrt{8}$.

Duota: ΔABC, $\angle C = 90°$,
$OD \perp AB$; AD:DB = 2:3;
apskritimas O ; OC= $\sqrt{8}$.

Apskaičiuoti: AC, BC, AB;
$S_{\Delta ABC}$; OD = r



Sprendimas:

Iš to paties plokštumos taško nubrėžtų apskritimo liestinių atkarpos yra lygios.

$\mathrm{OD} = \mathrm{OE} = \mathrm{OF} = \mathrm{r}$,

CEOF - kvadratas.

Iš trikampio CEO : $2\mathrm{OE}^2 = \mathrm{CO}^2$, $2\mathrm{OE}^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2$, $\mathrm{r} = \mathrm{OE} = 2$.

Iš trikampio ABC :

Tarkime, kad vienai santykio daliai tenka x, $(x > 0)$.

$\mathrm{AE} = \mathrm{AD} = 2x$, $\mathrm{BF} = \mathrm{BD} = 3x$, tai $\mathrm{AB} = 5x$.

Pagal Pitagoro teoremą: $AB^2 = AC^2 + BC^2$;

$(5x)^2 = (2x+2)^2 + (3x+2)^2$;

$25x^2 = 4x^2 + 8x + 4 + 9x^2 + 12x + 4$;

$12x^2 - 20x = 0$;

$x(12x - 20) = 0$;

$x \neq 0,\ x = \frac{5}{3}$;

$AB = 5 \cdot \frac{5}{3} = 8\frac{1}{3}$; $AC = 2 \cdot \frac{5}{3} + 2 = 5\frac{1}{3}$; $BC = 3 \cdot \frac{5}{3} + 2 = 7$;

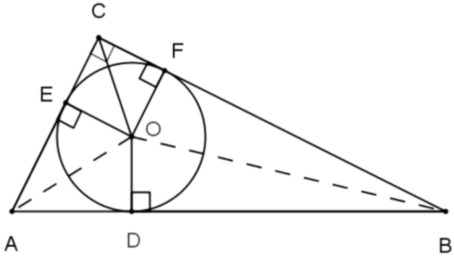
$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{3} \cdot 7 = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$;

Ats.: $5\frac{1}{3}$; 7; $8\frac{1}{3}$; $18\frac{2}{3}$; 2.

54. Į statųjį trikampį įbrėžtas apskritimas. Lietimosi taškas dalija įžambinę į 2 cm ir 8 cm dalis. Raskite trikampio plotą, perimetrą ir apskritimo spindulį.

Duota: ΔABC; $\angle C = 90°$; $OD \perp AB$; AD = 2cm; DB = 8cm; apskritimas O.

Apskaičiuoti: $S_{\Delta ABC}$; $P_{\Delta ABC}$; OD = r .



Sprendimas:

$AB = AD + DB = 2 + 8 = 10$ cm

Iš to paties plokštumos taško nubrėžtų apskritimo liestinių atkarpos yra lygios.

$AD = AE = 2$ cm, $BD = BF = 8$ cm.

CEOF - kvadratas, $OD = OE = OF = r$, tai $AC = 2 + r$, $BC = 8 + r$.

Pagal Pitagoro teoremą: $AB^2 = AC^2 + BC^2$;

$10^2 = (2 + r)^2 + (8 + r)^2$;

$100 = 4 + 4r + r^2 + 64 + 16r + r^2$;

$2r^2 + 20r - 32 = 0$, $r^2 + 10 - 16 = 0$;

$D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 164$;

$r_1 = \frac{-10-\sqrt{164}}{2} = -5 - \sqrt{41}$, netinka pagal sąlygą,

$r_2 = \frac{-10+\sqrt{164}}{2} = -5 + \sqrt{41}$.

$\mathrm{AC} = 2 - 5 + \sqrt{41} = -3 + \sqrt{41}, \quad \mathrm{BC} = 8 - 5 + \sqrt{41} = 3 + \sqrt{41}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{AC} \cdot \mathrm{BC} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{41} - 3\right)\left(\sqrt{41} + 3\right) = \frac{1}{2}(41 - 9) =$
$= 16\ \mathrm{cm}^2$,

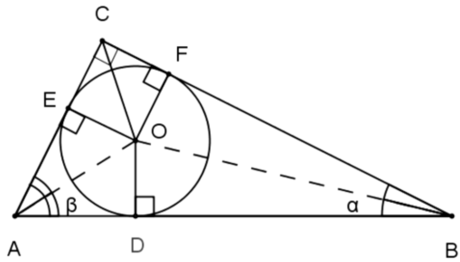
$P_{\Delta ABC} = 10 + 3 + \sqrt{41} - 3 + \sqrt{41} = (10 + 2\sqrt{41})$ cm .

Ats.: $16\ \mathrm{cm}^2$; $\left(10 + 2\sqrt{41}\right)$ cm ; $\left(\sqrt{41} - 5\right)$ cm.

55. Į statųjį trikampį įbrėžtas apskritimas, kurio centras nutolęs nuo smailiojo kampo viršūnių 2 cm ir $2\sqrt{2}$ cm. Raskite apskritimo spindulį.

Duota: ΔABC;
$\angle C = 90°$; $OA = 2$ cm;
$OB = 2\sqrt{2}$ cm.
apskritimas O.

Apskaičiuoti: $OD = r$



Sprendimas:

Įbrėžto į trikampį
apskritimo centras yra trikampio pusiaukampinių susikirtimo taškas.

OA, OB ir OC - pusiaukampinės.

$\angle A + \angle B = 90°$, tai $\angle OAB + \angle OBA = 45°$.

$\angle AOB = 135°$.

Iš trikampio AOB:
Pagal kosinusų teoremą:

$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AO}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2 \cdot \mathrm{AO} \cdot \mathrm{OB} \cdot \cos \angle AOB =$
$= 4 + 8 - 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 20;$
$\mathrm{AB} = 2\sqrt{5};$

$\mathrm{OD}^2 = \mathrm{AO}^2 - \mathrm{AD}^2 = \mathrm{OB}^2 - \mathrm{DB}^2$;
$\mathrm{AD} = \mathrm{x};$
$\mathrm{DB} = 2\sqrt{5} - \mathrm{x};$

$$4 - x^2 = 8 - \left(2\sqrt{5} - x\right)^2;$$

$$4 - x^2 = 8 - 20 + 4\sqrt{5}x - x^2;$$

$$4\sqrt{5}x = 16;$$

$$x = \frac{16}{4\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5};$$

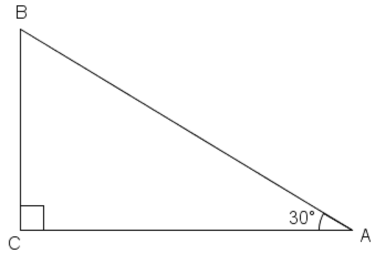
$$AD = \frac{4\sqrt{5}}{5};$$

$$OD^2 = 4 - \frac{16}{5} = \frac{4}{5};$$

$$OD = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Ats.: $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

56. Stataus trikampio kraštinė lygi 10 cm, o kampas prieš ją 30°. Raskite apie tą trikampį apibrėžto apskritimo spindulį.



Duota: Δ ABC; ∠C = 90°**;**
∠A = 30°**;** CB = 10 cm.

Apskaičiuoti: R (apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulys)

Sprendimas:

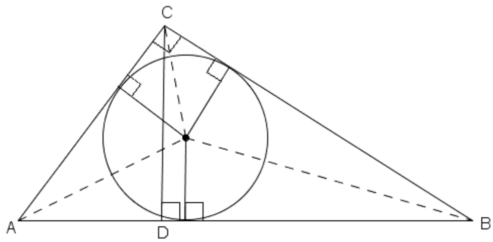
Pagal sinusų teoremą: $\frac{10}{\sin 30°} = 2R$;

R = 10 cm.

Ats.: 10 cm.

57. Stačiojo trikampio statinių projekcijos įžambinėje 9 cm ir 16 cm. Raskite į tą trikampį įbrėžto apskritimo spindulį.

Duota: Δ ABC;
∠C = 90°**;** CD⊥AB;
AD = 9 cm;
BD = 16 cm.



Apskaičiuoti: r

Sprendimas:

Pagal Pitagoro teoremos išvadas

CD = $\sqrt{AD \cdot DB}$,   CD = $\sqrt{9 \cdot 16} = 12$;

CB = $\sqrt{AB \cdot DB}$,   CB = $\sqrt{16 \cdot 25} = 20$;

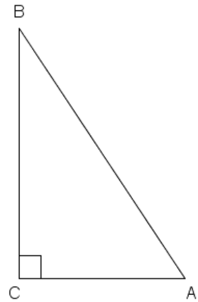
AC = $\sqrt{AD \cdot AB}$,   AC = $\sqrt{9 \cdot 25} = 15$;

r = $\frac{AC+BC-AB}{2} = \frac{15+20-25}{2} = 5$.

Ats.: 5 cm.

58. Stačiojo trikampio perimetras lygus 24 cm, o jo įžambinė lygi 10 cm. Raskite šio trikampio plotą.

Duota: Δ ABC; $P_{ABC} = 24$ cm; AB = 10 cm.



Apskaičiuoti: $S_{ABC.}$

Sprendimas:

P = AB + AC + BC = 24,   AC + BC = 14

Pagal Pitagoro teoremą: $AC^2 + BC^2 = 100$;

$(AC + BC)^2 = 14^2$;

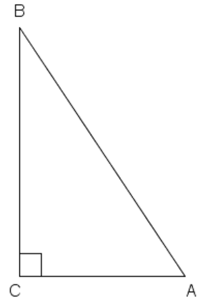
$AC^2 + 2AC \cdot BC + BC^2 = 196$;

$2AC \cdot BC = 96$;

$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{4} \cdot 96 = 24$ (cm^2).

Ats.: 24 cm^2.

59. Stačiojo trikampio plotas lygus 24 cm^2, o jo įžambinė lygi 10 cm. Apskaičiuokite šio trikampio perimetrą.



Duota: Δ ABC; $\angle C = 90°$; $S_{ABC} = 24$ cm^2;
AB = 10 cm.

Apskaičiuoti: P_{ABC}.

Sprendimas:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$;

$AB^2 = AC^2 + BC^2$;

$10^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot BC - 2AC \cdot BC$;

$100 = (AC + BC)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BC$;

$(AC + BC)^2 = 100 + 4 \cdot 96$;

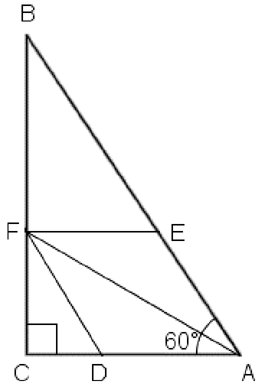
$AC + BC = 14$;

$P_{ABC} = AC + BC + AB = 14 + 10 = 24$ cm.

Ats.: 24 cm.

60. Į statųjį trikampį, kurio vienas kampas lygus 60°, taip įbrėžtas rombas, kad šis kampas yra bendras, o visos rombo viršūnės priklauso trikampio kraštinėms. Rombo kraštinė lygi 6 cm. Apskaičiuokite didesnįjį trikampio statinį.

Duota: Δ ABC; $\angle C = 90°$; $\angle A = 60°$;
AEFD – rombas; FD = 6 cm.



Apskaičiuoti: BC.

Sprendimas:

$\angle CFD = 60° = \angle A$ – atitinkamieji kampai

$\angle CFD = 30°$, tai $CD = \frac{1}{2} FD = 3$ cm – statinio prieš 30° kampą savybė.

AC = CD + DA = 9 (cm);

$BC = AC \cdot \tan 60° = 9 \cdot \sqrt{3}$;

arba AB = AC = 18;

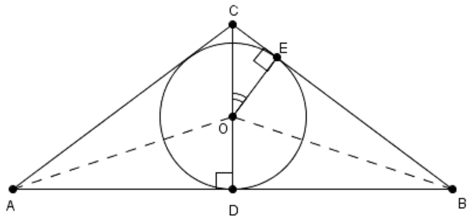
$BC^2 = AB^2 + AC^2$;

$BC = \sqrt{18 \cdot 18 + 9 \cdot 9} = 9\sqrt{3}.$

Ats.: $9\sqrt{3}$.

61. Apie apskritimą, kurio spindulys R, apibrėžtas lygiašonis trikampis, kurio vienas kampas lygus 120°.

Duota: ΔABC;
$AC = BC$; $\angle ACB = 120°$.



Apskaičiuoti: CB, AC, AB.

Sprendimas:

$CD \perp AB$;
$\angle DCB = 60°$;

Iš status trikampio COE

$$CO = \frac{OE}{\sin 60°} = \frac{r}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3};$$

$$CD = CO + OD = \frac{2R\sqrt{3}}{3} + R = R\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right);$$

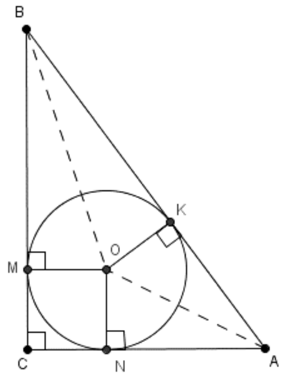
$$\angle B = 30°; CB = 2CD = 2R\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{3}\right);$$

$$DB = tg60° = R\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right) \cdot \sqrt{3} = R\left(2 + \sqrt{3}\right);$$

$$AB = DB \cdot 2 = 2R\left(2 + \sqrt{3}\right).$$

Ats: $2R\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)$; $2R\left(2 + \sqrt{3}\right)$.

62. Į Statųjį trikampį, kurio vienas kampas lygus 30°, įbrėžtas apskritimas, kurio spindulys lygus 6 cm. Apskaičiuokite mažesniojo statinio ilgį.



Duota: ΔABC; ∠C = 90°;
∠B = 30°; ON ⊥ AC;
ON = C = 6 cm.

Apskaičiuoti: CA.

Sprendimas:

ON = CN, nes CNOM – kvadratas.

CN = 6 cm;

∠NAO = ∠OAK= 30°;

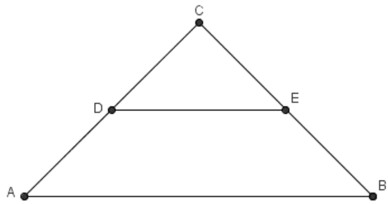
NA = ON · cos30° = $6 \cdot \sqrt{3}$;

CA = CN + NA = $6 + 6\sqrt{3} = 6\,(1 + \sqrt{3})$.

Ats: $6\,(1 + \sqrt{3})$.

63. Trikampio pagrindas lygus 36 dm. Tiesė, lygiagreti pagrindui, dalija šį trikampį į dvi lygiaplotes figūras. Raskite tos tiesės atkarpos, esančios tarp trikampio kraštinių, ilgį.

Duota: ΔABC; $AB = 36$ dm;
$DE \parallel AB$; $S_{DEC} = S_{ABED}$.



Apskaičiuoti: DE.

Sprendimas:

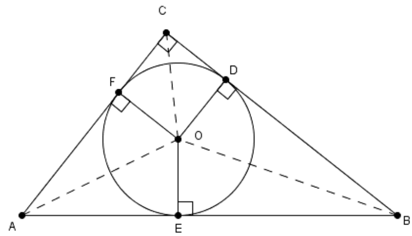
$$S_{\Delta ABC} = S_{DEC} + S_{ABED} = 2S_{DEC};$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{DEC}} = 2 = k^2; k = \sqrt{2}; \frac{AB}{DE} = \sqrt{2};$$

$$DE = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{36\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}(\text{dm}).$$

Ats.: $18\sqrt{2}$ dm.

64. Stačiojo trikampio įžambinė lygi 26, o statinių santykis – 2,4. Apskaičiuokite, įbrėžto į šį trikampį apskritimo ilgį.



Duota: ΔABC; $\angle C = 90°$;
$AB = 26$ $BC:AC = 2,4$.

Apskaičiuoti: $r = OE$.

Sprendimas:

$\frac{BC}{AC} = 2,4; BC = 2,4AC;$

$AB^2 = AC^2 + BC^2;$

$26^2 = AC^2 + (2,4AC)^2;$

$6,76AC^2 = 676;$

$AC = 10; BC = 24;$

$OE = \frac{AC+BC-AB}{2} = \frac{10+24-26}{2} = 4;$

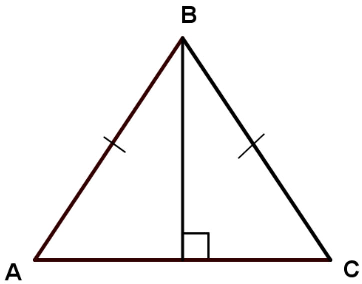
$C = 2\pi r = 8\pi$.

Ats.: 8π.

65. Lygiašonio trikampio šoninės kraštinės ir pagrindo ilgių santykis lygus $\frac{5}{8}$, o aukštinė lygi 6 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.

Duota: trikampis ABC;

AC = CB; $\frac{AC}{AB} = \frac{5}{8}$; CD = 6 cm.



Apskaičiuoti: S $_{\text{trik.ABC.}}$

Sprendimas:

$\frac{AC}{AB} = \frac{5}{8}$, nes AD = $\frac{1}{2}$ AB;

$AC = \frac{5}{4}$ AD;

Iš stataus $_{\text{trik.}}$ACD: $AC^2 = AD^2 + DC^2$;

$\left(\frac{5}{4}\,AD\right)^2 = AD^2 + 6^2$; $\frac{9}{16}\,AD^2 = 36$;

$\frac{9}{16}\,AD^2 = 36$; $AD^2 = 4 \cdot 16$;

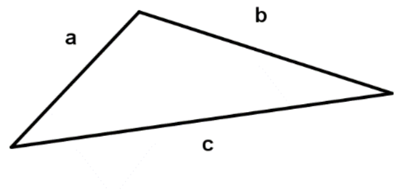
AD = 8;

S $_{\text{trik.}}$ABC = AB · CD = AB · CD = 8 · 6 = 48 (cm^2).

Ats.: 48 cm^2.

66. Trikampio kraštinės atitinkamai lygios 25 cm, 29 cm ir 35 cm. Raskite trumpiausios trikampio aukštinės ilgį.

Duota: a = 25cm; b = 29cm;
c = 35cm.



Apskaičiuoti: h.

Sprendimas:

Trumpiausia aukštinė bus ta, kuri nubrėžta į ilgiausią kraštinė.

$S_{trik.} = \sqrt{p\,(p - a)(p - b)(p - c)}$;

$p = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(25 + 29 + 36) = 45$;

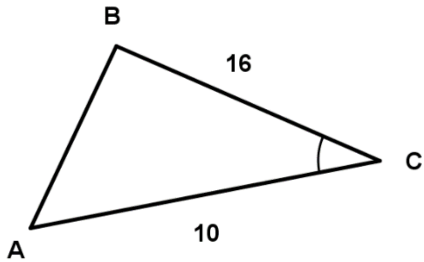
$S_{trik.} = \sqrt{45 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9} = 9 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 = 360$ (cm^2);
$S_{trik.} = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot h$;

$h = \frac{2 \cdot 360}{36} = 20$ (cm).

Ats.: 20 cm.

67. Dvi trikampio kraštinės atitinkamai lygios 16 ir 10, o smailiojo kampo tarp jų sinusas lygus 0,6. Apskaičiuokite to trikampio perimetrą ir plotą.

Duota: trikampis ABC;,
AC = 10; $\angle C < 90^o$;
CB = 16; $\sin \angle C = 0{,}6$.



Apskaičiuoti: $S_{trik.}$; $P_{trik.}$.

Sprendimas:

$S_{trik.} = \frac{1}{2} AC \cdot \sin \angle C$;

Pagal kosinusų teoremą:

$S_{trik.} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 16 \cdot 0{,}6 = 48$.

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle C$;

$\cos \angle C = \sqrt{1 - \sin^2 \angle C} = \sqrt{1 - 0.36} = 0{,}8$;

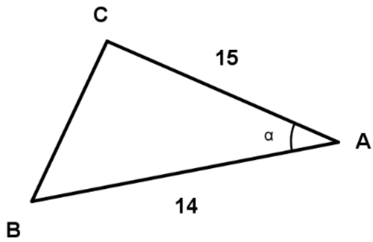
$AB = \sqrt{100 + 256 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot 0{,}8} = \sqrt{100} = 10$;

$P_{trik.} = AC + BC + AB = 16 + 10 + 10 = 36$.

Ats : 48 kv. v.; 36 v.

68. Dvi trikampio kraštinės lygios 14 ir 15, o smailiojo kampo tarp jų sinusas lygus 0,8. Raskite trikampio plotą ir perimetrą.

Duota: AB = 14; AC = 15;
$\angle\alpha$ sin = 0,8.



Apskaičiuoti: S_{trik}, P_{trik}.

Sprendimas:

$S_{trik.} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 15 \cdot 0,8 = 84$
(kv. v.);

$\cos\alpha = \sqrt{1 - 0,8^2} = 0,6;$

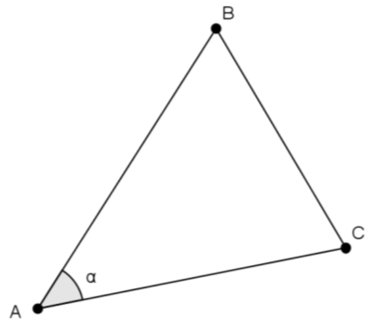
$c^2 = 142 + 152 - 2 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 0,6 = 169;$ $c = 13.$

P = 14 + 15 + 13 = 42 (v.)

Ats.: 84 kv.v, 42 v.

69. Dvi trikampio kraštinės lygios 10 ir 12, o kampo tarp jų sinusas lygus 0,8. Raskite trikampio perimetrą ir plotą.

Duota: ΔABC; $\angle A = \alpha$;
$sin\,\alpha = 0{,}8$; $AC = 10$;
$AB = 12$.



Apskaičiuoti: $\mathrm{P_{\Delta ABC}}$, $\mathrm{S_{\Delta ABC}}$.

Sprendimas:

$\mathrm{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2}\mathrm{AB \cdot AC \cdot \sin\alpha}$

$\mathrm{S_{\Delta}} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 \cdot 0{,}8 = 48(\mathrm{kv.\,v})$

Pagal kosinusų teoremą:

$\mathrm{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos\alpha}$;
$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - 0{,}64} = \pm 0{,}6$;

Kai α - smailus, $\cos\alpha > 0$;

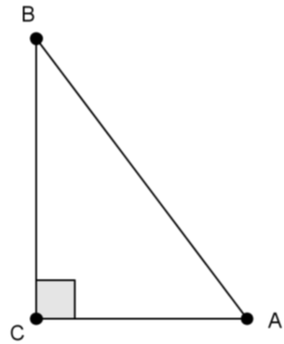
$\mathrm{BC^2} = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 0{,}6 = 100$;
$\mathrm{c} = 10$;
$\mathrm{P_{\Delta ABC}} = 32$;

Kai α - bukas, $\cos\alpha < 0$;

$\mathrm{BC^2} = 10^2 + 12^2 + 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 0{,}6 = 388$;
$\mathrm{c} = 2\sqrt{97}$;
$\mathrm{P_{\Delta ABC}} = 22 + 2\sqrt{97}$;

Ats.: 48 kv.v; 32 arba $22 + 2\sqrt{97}$.

70. Stačiojo trikampio plotas lygus 60, o jo įžambinė lygi 17. Raskite trikampio perimetrą.



Duota: ΔABC; $\angle C = 90°$;
$S_\Delta = 60; AB = 17.$

Apskaičiuoti: $P_{\Delta ABC}$.

Sprendimas:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 60;$

$AC \cdot BC = 120;$

$AB^2 = AC^2 + BC^2;$

Prie abiejų lygybes pusių pridedame $2BC \cdot AC$;

$AB^2 + 2BC \cdot AC = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot AC;$

$17^2 + 2 \cdot 120 = (AC + BC)^2;$

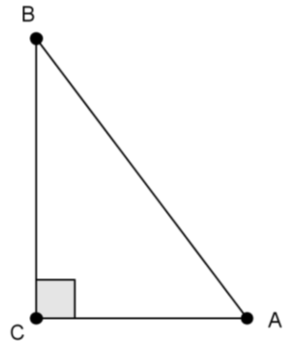
$(AC + BC)^2 = 529;$

$AC + BC = 23;$

$P = AC + BC + AB = 23 + 17 = 40.$

Ats.: 40.

71. Stačiojo trikampio perimetras lygus 80, o įžambinė lygi 34. Raskite trikampio plotą.



Duota: ΔABC – status;
$AB = 34; P_{\Delta ABC} = 80.$

Apskaičiuoti: $S_{\Delta ABC}$.

Sprendimas:

$AB + BC + AC = 80;$

$BC + AC = 80 - 34;$

$BC + AC = 46;$

$(BC + AC)^2 = 46^2;$

$BC^2 + 2BC \cdot AC + AC^2 = 2116;$

$2BC \cdot AC = 2116 - (BC^2 + AC^2);$

Pagal Pitagoro teoremą:

$AC^2 + BC^2 = AB^2;$

$2BC \cdot AC = 2116 - 34^2;$

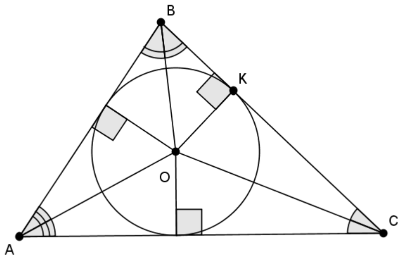
$2BC \cdot AC = 960 \mid : 2;$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 480 = 240.$$

Ats.: 240.

72. Viena trikampio kraštinė lygi 10cm, kita – 12cm. Jų sudaromo smailiojo kampo sinusas lygus 0,8. Apskaičiuokite į tą trikampį įbrėžto apskritimo ilgį.

Duota: $\Delta ABC;\ AB = 10cm;$
$BC = 12cm;\ \sin\angle B = 0{,}8;$
$\angle B < 90°;$
įbrėžtas apskritimas O.



Apskaičiuoti: C.

Sprendimas:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle B = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \cdot 0{,}8 = 48(cm^2);$$

Pagal kosinusų teoremą: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$;
Ir iš lygties $\sin^2\angle B + \cos^2\angle B = 1$;

$\cos^2\angle B = 1 - \sin^2\angle B$;
$\cos\angle B = \sqrt{1 - \sin^2\angle B} = 0{,}6$;

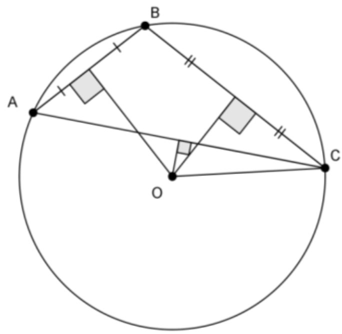
$AC = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 0{,}6;$
$AC = \sqrt{100 + 144 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 0{,}6} = 48;$

$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 32;$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}P_\Delta \cdot r$; $r = OK$ (spindulys);
$r = \frac{2S}{P} = \frac{2 \cdot 48}{32} = 3;$

$C_O = 2\pi r = 6\pi;$
Ats.: 6π.

73. Viena trikampio kraštinė lygi 5cm, kita – 8cm. Jų sudaromo bukojo kampo sinusas lygus 0,8. Apskaičiuokite apie tą trikampį apibrėžto apskritimo ilgį.



Duota: ΔABC; $AB = 5cm$;
$BC = 8cm$; $\sin\angle B = 0{,}8$; ;
$\angle B > 90°$; apibrėžtas apskritimas
O; $OC = R$.

Rasti: C.

Sprendimas:

$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{AB \cdot BC \cdot AC}}{4 \cdot \mathrm{S_{\Delta ABC}}}$;

$\sin^2\angle\mathrm{B} + \cos^2\angle\mathrm{B} = 1$;

$\cos^2\angle\mathrm{B} = 1 - \sin^2\angle\mathrm{B}$; $\cos\angle\mathrm{B} = \pm\sqrt{1 - \sin^2\angle\mathrm{B}}$;
$\angle\mathrm{B}$ – bukas, tai $\cos\angle\mathrm{B} < 0$; $\cos\angle\mathrm{B} = -\sqrt{1 - 0{,}8^2} = 0{,}6$;

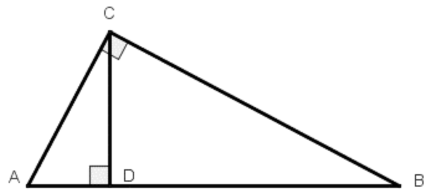
Pagal kosinusų teoremą:

$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \cdot \cos\angle\mathrm{B} = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot$
$(-0{,}6) = 137$;
$\mathrm{AC} = \sqrt{137}$;

$\mathrm{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \cdot \sin\angle\mathrm{B} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot 0{,}8 = 16$;
$\mathrm{R} = \frac{5 \cdot 8 \cdot \sqrt{137}}{4 \cdot 16} = \frac{5}{8}\sqrt{137}$; $\mathrm{C_O} = 2\pi\mathrm{R} = \frac{5}{4}\sqrt{137}\pi$.

Ats.: $0{,}8\sqrt{137}\pi$.

74. Stačiojo trikampio aukštinė, kurios ilgis 4 cm, nubrėžta į įžambinę ir dalija ją į dvi atkarpas, kurių ilgių skirtumas yra 6 cm. Raskite trikampio statinių ilgius.



Duota: $\triangle ABC$; $\angle C = 90°$; $CD \perp AB$; CD = 4cm; DB – AD = 6 cm.

Rasti: AC; BC.

Sprendimas:

$CD^2 = AD \cdot DB$ - pagal išvadą iš Pitagoro teoremos.

$$\begin{cases} AD \cdot DB = 16 \\ CB - AD = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} DB = 6 + AD \\ AD(6 + AD) = 16 \end{cases} \qquad AD^2 + AD - 16 = 0$$

AD = 2; DB = 8;

AB = AD + DB =10;

$AC^2 = AD \cdot AB$;

$CB^2 = DB \cdot AB$

$AC = \sqrt{2 \cdot 10} = 2\sqrt{5}$ cm;

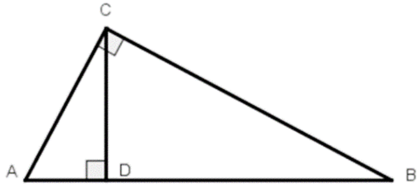
$CB = \sqrt{8 \cdot 10} = 4\sqrt{5}$ cm;

Ats.: $2\sqrt{5}$cm ; $4\sqrt{5}$cm .

75. Stačiojo trikampio statiniai sutinka kaip 3:2, o aukštinė dalija įžambinę į atkarpas, kurių viena 2 cm ilgesnė už kitą. Apskaičiuokite įžambinės ilgį.

Duota: $\triangle ABC$; $\angle C = 90°$; $CD \perp AB$; $CB:AC = 3:2$;
$DB - AD = 2$ cm ;

Apskaičiuokite: AB.



Sprendimas:

Tarkime, kad viena dalis x cm (x>0). Tada CB = 3x; AC=2x;

Pagal Pitagoro teoremos išvadas:

$AC^2 = AB \cdot AD$; $BC^2 = AB \cdot DB$;

$CD^2 = AD \cdot DB$; $AB^2 = AC^2 + BC^2$;

$AB = x\sqrt{13}$ cm;

$AB = \frac{4x^2}{x\sqrt{13}} = \frac{4x\sqrt{13}}{13}$;

$DB = \frac{9x^2}{x\sqrt{13}} = \frac{9x\sqrt{13}}{13}$; DB – AD = 2 cm;

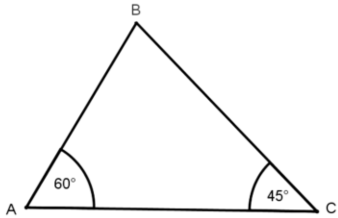
$\frac{9x\sqrt{13}}{13} - \frac{4x\sqrt{13}}{13} = 2$; $x = \frac{26\sqrt{13}}{5}$

$AB = \frac{26 \cdot 13}{5} = 67{,}6$ (cm).

Ats.: 67,6 cm .

76. Apskaičiuokite trikampio plotą, jei pagrindas lygus 2 cm, o kampai prie pagrindo - 60° ir 45°.

Duota: $\triangle ABC$; $AC = 2$ cm;
$\angle A = 60°$; $\angle C = 45°$.



Apskaičiuoti: $S_{\triangle ABC}$.

Sprendimas:

Pagal sinusų teoremą:

$\frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{BC}{\sin\angle A}$;

$\angle B = 180° - (60° + 45°) = 75°$;

$\sin 75° = \sin(30° + 45°) = \sin 30° \cdot \cos 45° + \cos 30° \cdot \sin 45° =$

$= \frac{\sqrt{12}}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$;

$\frac{2}{\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}} = \frac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$;

$BC = \sqrt{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}$ (cm);

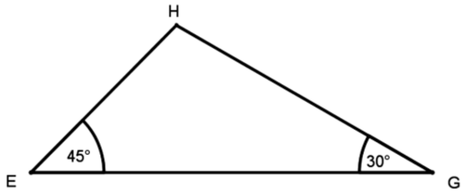
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin\angle C = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} =$

$= \frac{2\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{1-3} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$.

Ats.: $\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$ cm^2.

77. Apskaičiuokite trikampio plotą, jei jo pagrindas 4 cm, o kampai prie jo 30° ir 45°.

Duota: $\triangle ABC$; $AB = 4$ cm;
$\angle A = 45°$; $\angle B = 30°$.



Apskaičiuoti: $S_{\triangle ABC}$

Sprendimas:

$\angle C=180°-(\angle A+\angle B)=105°$;

Pagal sin teoremą: $\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{BC}{\sin\angle A}$;

$$BC = \frac{4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin 105°} = 2\sqrt{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{8}{1+\sqrt{3}};$$

$$\sin 105° = \sin(60° + 45°) = \sin 60°\cos 45° + \cos 60°\sin 45° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4};$$

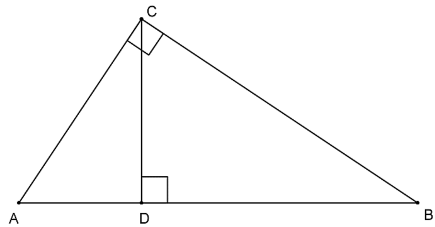
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle B = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{8}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{8(1-\sqrt{3})}{1-3} =$$
$$= 4(\sqrt{3}-1)$$

Ats.: $4(\sqrt{3}-1)$ cm^2.

78. Iš stačiojo trikampio stačiojo kampo viršūnės į įžambinę nubrėžto statmens pagrindas dalija ją į dvi dalis, kurių mažesnioji lygi 1,8 cm. Įžambinės ir trumpesniojo statinio ilgio skirtumas lygus 2cm. Apskaičiuokite trumpesniojo statinio ilgį.

Duota: ΔABC;
$\angle C = 90°$; $CD \perp AB$;
AD =1,8cm; AB-AC = 2cm.

Apskaičiuoti: AC;



Sprendimas:

Pagal išvadą iš Pitagoro teoremos: $AC^2 = AB \cdot AD$;

Tegul $\mathrm{AC} = \mathrm{x(cm)}$, $(\mathrm{x} > 0)$ $\mathrm{AB} = 2 + \mathrm{x}$;

$$x^2 = (2 + x) \cdot 1{,}8;$$
$$x^2 - 1{,}8x - 3{,}6 = 0;$$
$$D = (-1{,}8)^2 + 4 \cdot 3{,}6 = 3{,}24 + 14{,}4 = 17{,}64;$$

$x_1 = \frac{1{,}8-4{,}2}{2} = -1{,}2$ (nėra sprendinys);

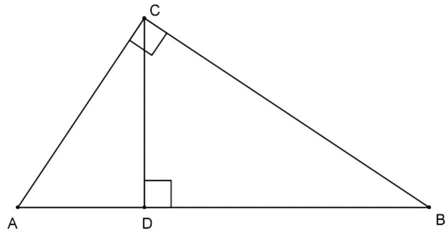
$x_2 = \frac{1{,}8+4{,}2}{2} = 3$;

$x = AC = 3(cm)$.

Ats.: 3cm.

79. Iš stačiojo trikampio kampo viršūnės į įžambinę nubrėžto statmens pagrindas dalija jį į dvi dalis, kurių mažesnioji lygi 9cm. Įžambinės ir trumpesniojo statinio ilgių skirtumas lygus 10cm. Apskaičiuokite trumpesniojo statinio ilgį.

Duota: ΔABC;
$\angle C = 90°$; $CD \perp AB$;
$AD = 9cm$;
$AB - AC = 10cm$.



Apskaičiuoti: AC;

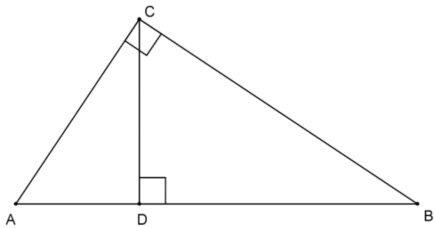
Sprendimas:

Pagal išvadą iš Pitagoro teoremos $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$;
Tegul $AC = x$ $(x > 0)$
$x^2 = AB \cdot AD$; $AB = 10 + x$;
$x^2 = (10 + x) \cdot 9$
$x^2 - 9x - 90 = 0$;
$x1 = 15$; $x2 = -6$ (nėra sprendinys)
$AC = x = 15(cm)$.

Ats.: 15cm.

80. Stačiojo trikampio statinių santykis 3:4, o įžambinė lygi 50 cm. Apskaičiuokite atkarpų, į kurias įžambinę dalija iš stačiojo kampo viršūnės nubrėžta aukštinė, ilgius.

Duota: ΔABC;
AC:CB = 3:4;
AB = 50cm;
$CD \perp AB$.



Apskaičiuoti: AD; DB.

Sprendimas:

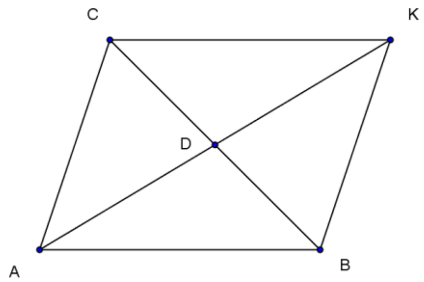
Tegul viena dalis x cm (x>0), tada
$AC = 3x$; $BC = 4x$;
$AC^2 + BC^2 = AB^2$;
$9x^2 + 16x^2 = 50^2$;
$25x^2 = 50^2$;
$x^2 = 100$;
$x = 10$ ir $x = -10$(netinka)
$AC = 30$ cm; $CB = 40$ cm;

Pagal išvadą iš Pitagoro teoremos:
$AC^2 = AB \cdot AD$;
$AD = \frac{AC^2}{AB} = \frac{900}{50} = 18$ (cm); $DB = AB - AD = 32$(cm).

Ats.: 18 cm; 32 cm.

81. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus $4\sqrt{2}$, o šoninės karštinės pusiaukampinė – 5cm. Apskaičiuokite šoninės kraštinės ilgį.

Duota: ΔABC; $AB = 4\sqrt{2}$;
$AC = BC$; $CD = DB$;
$AD = 5$cm.



Apskaičiuoti: AC.

Sprendimas:

Pratęsiame AD ir atidedame
$DK = AD$.

$AK = 2AD = 10$cm.
ABKC – lygiagretainis (įstrižainės susikirsdamos dalijasi pusiau).

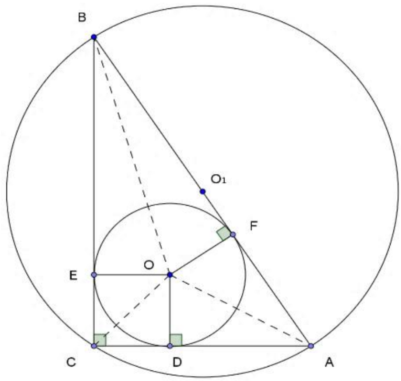
$AK^2 + CB^2 = 2(AC^2 + AB^2)$
$100 + AC^2 = 2AC^2 + 2 \cdot 32$

$AC^2 = 36$
$AC = 6$ cm.

Ats.: 6 cm.

82. Į statųjį trikampį, kurio vienas statinis 10 cm, įbrėžtas apskritimas, kurio spindulys 3cm. Apskaičiuokite apie tą trikampį apibrėžto apskritimo spindulį.

Duota: ΔABC; $\angle LC = 90^0$;
įbrėžtas apskritimas O;
$OD \perp AC$; $OE \perp BC$; $OF \perp AB$;
$OD = OE = OF = r = 3cm$;
$BC = 10cm$; $BO_1 = O_1A = R$.



Apskaičiuoti: R.

Sprendimas:

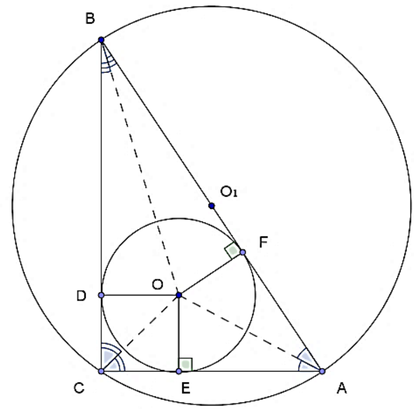
CDOE – kvadratas,
$BE = BC – EC = 7cm$;
$BF = BE = 7cm$ (liestinė su spinduliu sudaro statų kampą).
Tarkime, kad $AD = AF = x$; $AC = AD + DC = x + 3, (x > 0)$;

Pagal Pitagoro teoremą:
$AB^2 = AC^2 + BC^2$;
$(x + 7)^2 = (x + 3)^2 + 10^2$;
x2 + 14x + 49 = x2 + 6x + 9 + 100;
$8x = 60$;
$x = 7.5$;

$AB = BF + AF = 7 + 7.5 = 14.5$;
$R = \frac{1}{2} AB = 7.25$ cm.

Ats.: 7.25 cm.

83. Į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo lietimosi taškas dalija vieną statinį į 2 cm ir į 10 cm dalis. Apskaičiuokite apie tą trikampį apibrėžto apskritimo spindulį.



Duota: ΔABC; $\angle LC = 90^0$;
įbrėžtas apskritimas O;
$OE \perp AC$; $OD \perp BC$;
$OF \perp AB$; $r = OE = OD = OF$;
BD = 10 cm; CD = 2 cm;
$O_1B = O_1A = R$.

Apskaičiuoti: R.

Sprendimas:

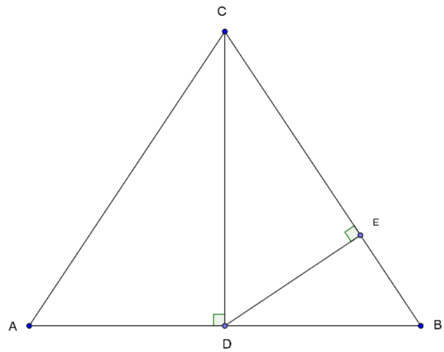
Liestinė su spinduliu sudaro statų kampą, todėl BF = BD = 10cm;
Tarkime, kad AF = AE = x, (x > 0); CEOD – kvadratas,
CD = CE = 2 cm;
AC = x + 2, AB = x + 10; BC = 12 cm;

Pagal Pitagoro teoremą:
$AB^2 = AC^2 + BC^2$;
$(x + 10)^2 = (x + 2)^2 + 12^2$;
$x^2 + 20x + 100 = x^2 + 4x + 4 + 144$;
$16x = 48$;
$x = 3$;

AB = 13; $R = \frac{1}{2}AB = 6.5$ cm.

Ats.: 6.5 cm.

84. Lygiašonio trikampio pagrindo vidurio taško atstumas iki šoninės kraštinės lygus 2,4 cm. Apskaičiuokite šoninės kraštinės ilgį, jei šio trikampio pagrindas lygus 8 cm.



Duota: ΔABC; $AC = BC$;
$AD = DB$; $AB = 8$ cm;
$DE \perp BC$; $DE = 2.4$ cm.

Apskaičiuoti: BC.

Sprendimas:

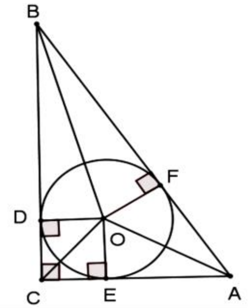
$AD = DB = 4$cm;
Iš stataus ΔDBE:
$BE^2 = DB^2 - DE^2$;
$BE = \sqrt{4^2 - 2.4^2} = \sqrt{6.4 \cdot 1.6} = 3.2$ (cm);

Pagal Pitagoro teoremos išvadą:
$DB^2 = CB \cdot BE$;
$CB = \dfrac{DB^2}{BE} = \dfrac{16}{3.2} = 5$ (cm);

Ats.: 5 cm.

85. Stačiojo trikampio įžambinės ilgis lygus a, o įbrėžto apskritimo spindulys r. Raskite trikampio plotą.

Duota: ΔABC; $\angle C = 90°$; AE = x;
AB = a; įbrėžtas apskritimas O; $OE \perp AC$;
$OD \perp BC$; $OF \perp AB$;
OD = OE = OF = r.



Apskaičiuoti: S_{ABC}.

Sprendimas:

Pagal liestinės savybę:

$AC = AE + CE = x + r; r = \frac{BC+AC-AB}{2}$;

$BC + AC = 2r + a$;

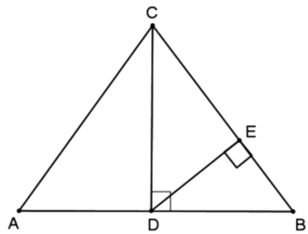
$BC^2 + 2BC \cdot AC + AC^2 = (2r+a)^2$;

$2BC \cdot AC = 4r^2 + 4ar + a^2 - a^2$;

$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{4r^2+4ar}{4} = r^2 + ar = r(r+a)$.

Ats.: r (r+a).

86. Lygiašonio trikampio aukštinė lygi 3. Trikampio pagrindo vidinio taško atstumas iki šoninės kraštinės lygus 2,4. Apskaičiuokite šoninės kraštinės ilgį.



Duota: ΔABC; $AC = CB$;
$CD \perp AB$; $CD = 3$; $AD = DB$;
$DE \perp BC$;
$DE = 2,4$.

Apskaičiuoti: CB.

Iš stataus ΔDEC: $CE^2 = DC^2 - DE^2$;

$CE = \sqrt{3^2 - 2,4^2} = \sqrt{5,4 \cdot 0,6} = 3 \cdot 0,6 = 1,8$.

Pagal Pitagoro teoremos išvadas:

$CD^2 = CB \cdot CE$;

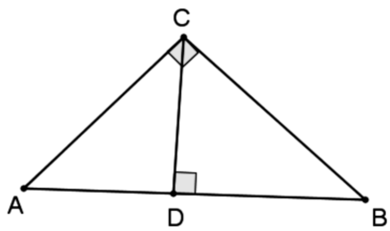
$CB = \frac{CD^2}{CE} = \frac{9}{1,8} = 5.$

Ats.: 5.

87. Stačiojo trikampio statinių ilgių santykis 3:4. Aukštinė, nubrėžta į įžambinę, lygi 24. Apskaičiuokite šio trikampio plotą.

Duota: ΔABC; $\angle C = 90°$;
$AC:CB = 3:4$; $CD \perp AB$;
$CD = 24$.

Apskaičiuoti: $S_{\Delta ABC}$.



Sprendimas:

Tarkime, kad viena dalis yra x ilgio vienetų (x > 0).
Tada $\mathrm{AC} = 3\mathrm{x}, \mathrm{CB} = 4\mathrm{x},\ \mathrm{AB} = 5\mathrm{x}$;

$$\mathrm{S}_{\Delta\mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD};$$

$$\frac{1}{3}\cdot 3\mathrm{x}\cdot 4\mathrm{x} = \frac{1}{2}\cdot 5\mathrm{x}\cdot 24;$$

$$\mathrm{x} = 10;$$

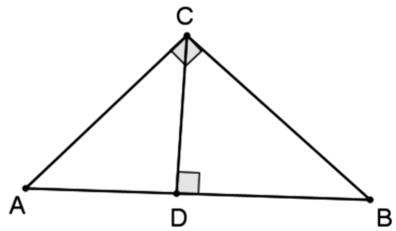
AC = 30 ilgio vnt.;

CB = 40 ilgio vnt.;

$$\mathrm{S}_{\Delta\mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}\cdot 30\cdot 40 = 600(\mathrm{kv.\,v.}).$$

Ats.: 600 kv.v.

88. Stačiojo trikampio vienas statinis lygus 40, o aukštinė, nubrėžta į įžambinę, lygi 24. Apskaičiuokite šio trikampio plotą.



Duota: ΔABC; $\angle LC = 90°$;
$CB = 40$; $CD \perp AB$; $CD = 24$.

Apskaičiuoti: $S_{\Delta ABC.}$

Sprendimas:

Iš stataus ΔCBD: $DB^2 = CB^2 - CD^2$;

DB $\sqrt{40^2 - 24^2} = \sqrt{64 \cdot 16} = 32$;

Pagal Pitagoro teoremos iišvadas: $CD^2 = AD \cdot DB$;

$$AD = \frac{CD^2}{DB} = \frac{24^2}{32} = \frac{6 \cdot 3}{1} = 18;$$

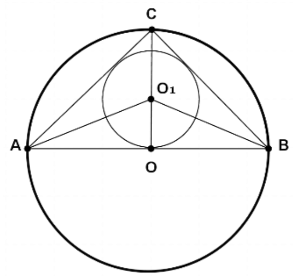
$AB = AD + DB = 18 + 32 = 50$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 24 = 600$ (kv. v.).

Ats.: 600 kv.v.

89. Lygiašonio trikampio pagrindas yra 15cm, o šoninė kraštinė – 10cm ilgio. Apskaičiuokite apie šį trikampį apibrėžto ir į šį trikampį įbrėžto apskritimo spindulių ilgių sumą.

Duota: ΔABC, AC=CB=10cm, AB=16cm



Apskaičiuoti: R+ r.

Sprendimas:

Pagal Herono formulę:

$S_{ABC}=\sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}$

$p = \frac{1}{2}(AB+BC+AC) = \frac{1}{2}\cdot 36=18;$

$S_{ABC}= \sqrt{18\cdot 2\cdot 8\cdot 8}= 48(cm^2);$

$S_{ABC}= \frac{1}{2}P\cdot r$; $P= 36;$

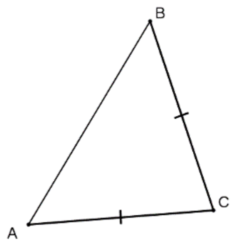
$r = \frac{2S\Delta ABC}{p} = \frac{2\cdot 48}{36} = \frac{8}{3} =2\frac{2}{3}\,(cm^2);$

$S\Delta ABC = \frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4R}$; $R= \frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4\cdot S\Delta ABC} = \frac{10\cdot 10\cdot 16}{4\cdot 48} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$ (cm).

$R + r = 8\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3} = 11$ (cm).

Ats.: 11 cm.

90. Lygiašonio trikampio pagrindas yra 12cm, šoninė kraštinė – 10cm ilgio. Apskaičiuokite šio trikampio apibrėžtinio ir įbrėžtinio apskritimų spindulių skirtumą.



Duota: ΔABC; AC = CB = 10cm;
AB = 12cm.

Apskaičiuoti: R-r.

Sprendimas:

Pagal Herono formulę:

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}$;

$p = \frac{1}{2}$ (AB+BC+AC) = 16 cm;

$S_{ABC} = \sqrt{16 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} = 48(cm^2)$;

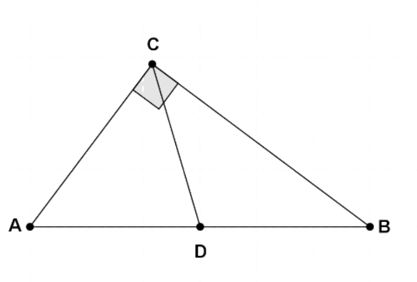
$r = \frac{2S\Delta ABC}{P\Delta ABC} = \frac{2 \cdot 48}{2 \cdot 16} = 3(cm)$;

$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot S\Delta ABC} = \frac{12 \cdot 10 \cdot 10}{4 \cdot 48} = 6{,}25$ (cm) ; R-r = 6,25 – 3 = 3,25 (cm).

Ats.: 3,25 cm.

91. Stačiojo trikampio pusiaukraštinė, nubrėžta į įžambinę, lygi 4cm ir dalija statųjį kampą santykiu 1:2. Apskaičiuokite trikampio kraštinių ilgius.

Duota: ΔABC ; $\angle C = 90°$;
AD = DB ; CD = 4cm;
$\angle DCB : \angle ACD = 1:2$.



Apskaičiuoti: AC, BC, AB.

Sprendimas:

Apie statųjį kampą apibrėžto apskritimo centras yra įžambinės vidurio taškas.

AD = DB = DC = 4cm; AB= 8cm;

$\angle DCB = \frac{1}{3} \cdot 90° = 30°$; $\angle DBC = 30°$, nes DC=DB;

AC= $\frac{1}{2}$ AB $= 4$ cm (statinio prieš 30° kampą savybė);

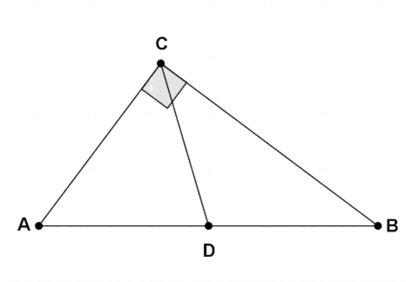
$CB^2 = AB^2 - AC^2$;

CB = $\sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$ (cm).

Ats.: 4cm; $4\sqrt{3}$ cm ; 8cm.

92. Stačiojo trikampio pusiaukraštinė, nubrėžta į įžambinę dalija statųjį kampą santykiu 1:2. Apskaičiuokite trikampio statinių ilgius, jei įžambinė lygi 24cm.

Duota: ΔABC ; $\angle C = 90°$;
AD=DB; AB = 24cm;
$\angle DCB : \angle ACD = 1:2$.



Apskaičiuokite: AC, BC.

Sprendimas:

$\angle DCB = \frac{1}{3} \cdot 90° = 30°$;

AC= $\frac{1}{2}$ AB = 12cm (statinio prieš 30° kampą savybė);

$BC^2 = AB^2 - AC^2$; BC = $\sqrt{24^2 - 12^2} = 12\sqrt{3}$ (cm);

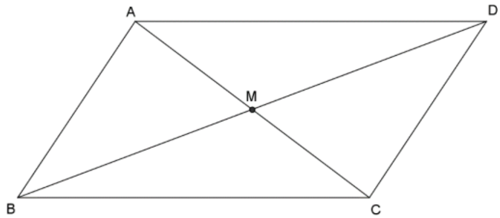
BC = AB $\cdot$ cos30° = 24 $\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$.

Ats.: $12\sqrt{3}$ cm; 12cm.

93. Apskaičiuokite trikampio ABC plotą, jei AB = 3, BC = 7, o pusiaukraštinė BM = 4.

Duota: ΔABC; AB = 3; BC = 7; AM = MC; BM = 4.

Apskaičiuoti: $S_{\Delta ABC}$.



Sprendimas:

Pratęsiame BM ir atidedame MD = BM; BD = 2BM = 8 ilgio vnt.

Pagal lygiagretainio savybę: $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$

$AC^2 + 8^2 = 2(3^2 + 7^2)$; AC = $\sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (kv. v.);

Pagal Herono ploto formulę:

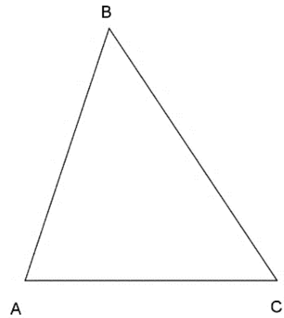
$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(a-AC)}$; p = $\frac{1}{2}(AB + BC + AC) = 5 + \sqrt{13}$;

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{(5+\sqrt{13})(5+\sqrt{13}-3)(5+\sqrt{13}-7)(5+\sqrt{13}-2\sqrt{13})} =$

$= \sqrt{(5+\sqrt{13})(2+\sqrt{13})(\sqrt{13}-2)(5-\sqrt{13})} = \sqrt{(25+13)(13-4)} =$
$= \sqrt{12 \cdot 9} = 6\sqrt{3}$ (kv. v.).

Ats.: $6\sqrt{3}$ kv. v.

94. Trikampio plotas lygus 36cm^2; dvi kraštinės 10cm ir 12cm, o kampas tarp jų – smailusis. Apskaičiuokite trečiosios kraštinės ilgį.



Duota: ΔABC, $S_{\Delta ABC} = 36$cm;
AB = 10cm; BC = 12cm; $\angle B < 90°$.

Apskaičiuoti: AC.

Sprendimas:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle B$;

$\sin\angle B = \frac{2S\Delta ABC}{AB \cdot BC} = \frac{2 \cdot 36}{10 \cdot 12} = 0{,}6$;

Iš lygybės: $sin^2\angle B + cos^2\angle B = 1$;

$\cos^2\angle B = 1 - \sin^2\angle B$;

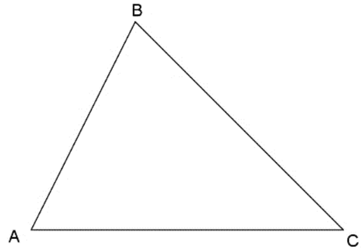
$\cos\angle B = \pm\sqrt{1 - \sin^2\angle B}$; $\angle B < 90°$, todėl
$\cos\angle B = \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 0{,}8$;

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$;

$AC = \sqrt{10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 0{,}8} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (cm).

Ats.: $2\sqrt{13}$ cm.

95. Trikampio plotas lygus 16cm^2; dvi kraštinės – 5cm ir 8cm, o kampas tarp jų yra bukasis. Apskaičiuokite trečios kraštinės ilgį.



Duota: ΔABC; $S_{\Delta ABC} = 16cm^2$;
AB = 5cm; BC = 8cm;
$\angle B > 90°$.

Apskaičiuoti: AC.

Sprendimas:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle B$; $\sin\angle B = \frac{2S\Delta ABC}{AB\cdot BC} = \frac{2\cdot 16}{5\cdot 8} = 0{,}8$;

$\cos\angle B = \pm\sqrt{1 - \sin^2\angle B}$, $\angle B > 90°$, todėl

$\cos\angle B = -\sqrt{1 - 0{,}8^2} = -0{,}6$;

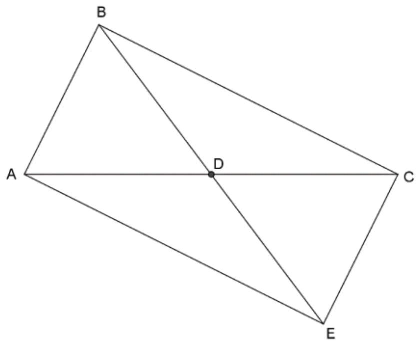
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$ – pagal kosinusų teoremą;

$AC = \sqrt{5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot (-0{,}6)} = \sqrt{137}$ (cm).

Ats.: $\sqrt{137}$ cm.

96. Trikampio kraštinių ilgiai 11cm, 12cm ir 13cm. Į ilgiausią kraštinę nubrėžta pusiaukraštinė. Apskaičiuokite jos ilgį.

Duota: ΔABC; AB = 11cm;
BC = 12cm; AC = 13cm;
AD = DC.



Apskaičiuoti: BD.

Sprendimas:

Pratęsiame BD ir atidedame
DE = BD;

BE = 2BD;

AECB - lygiagretainis (įstrižainės susikirsdamos dalijasi pusiau).

$BE^2 + AC^2 = 2\,(AB^2 + BC^2)$;

BE = 2 (112 + 122) – 132;

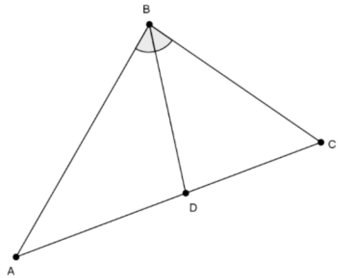
BE = 19 cm;

BD = $\frac{1}{2}BE = 9{,}5(cm)$.

Ats.: 9,5 cm.

97. Kampas tarp trikampio kraštinių, kurios lygios 9cm ir 6cm, padalytas pusiau. Viena trečiosios kraštinės atkarpų pasirodė lygi vienai žinomų kraštinių. Raskite trečiosios kraštinės ilgį.

Duota: ΔABC; AB = 9cm;
BC = 6cm;
a) BC = DC; b) BC = AD.



Apskaičiuoti: AC.

Sprendimas:

a) Pagal pusiaukampinės savybę:
$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DC}}; \frac{9}{6} = \frac{\mathrm{AD}}{6} \rightarrow \mathrm{AD} = 9\mathrm{cm};$

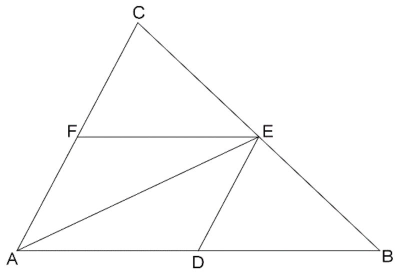
Toks trikampis neegzistuoja, nes $AC < AB + BC$;

b) $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DC}}; \frac{9}{6} = \frac{6}{\mathrm{DC}};$
$\mathrm{DC} = 4\mathrm{cm};$
$\mathrm{AC} = \mathrm{AD} + \mathrm{DE} = 6 + 4 = 10\mathrm{cm}.$

Ats.: 10cm.

98. Į trikampį ABC įbrėžtas rombas ADEF taip, kad jo viršūnės D, E ir F yra atitinkamai kraštinėse AB, BC ir AC. Raskite atkarpas BE ir EC, kai AB=14 cm; BC= 12 cm; AC=10 cm;

Duota: ΔABC
rombas DEFA
AB = 14cm; BC = 12cm;
AC = 10cm.



Apskaičiuoti: BE; EC.

Sprendimas:

Nubrėžiame rombo įstrižainę AE. Rombo įstrižainės dalija rombo kampus pusiau, todėl ∠CAE=∠EAB.

Vadinasi AE yra ΔABC pusiaukampinė. Pagal jos savybę:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC};\ \frac{14}{10} = \frac{BE}{BC - BE};\ \frac{14}{10} = \frac{BE}{12 - BE};$$

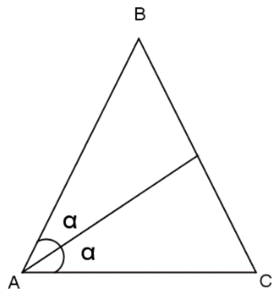
10BE = 168 - 14BE;

24BE = 168; BE = 7;

CE = 12 – 7 = 5.

Ats.: 7cm; 5cm.

99. Lygiašonio trikampio pagrindas 9,6 cm mažesnis už šoninę kraštinę, o pusiaukampinė šoninę kraštinę dalija į atkarpas, kurių santykis lygus 0,6. Raskite trikampio perimetrą



Duota: ΔABC; $AB = BC$;
$AC = BV = 9,6$ cm;
$\angle BAD = \angle DAC$; $\frac{DC}{BD} = 0,6$.

Apskaičiuoti: $P_{\Delta ABC}$.

Sprendimas:

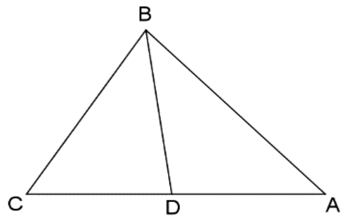
Pagal trikampio pusiaukampinės savybę:
$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ $\frac{BC}{BC-9,6} = \frac{5}{3}$ $5BC - 48 = 3BC$

$2BC = 48$; $BC = 24$cm; $AC = 24 – 9,6 = 14,4$cm;

$P_{\Delta ABC} = 2BC + AC = 48 + 14,4 = 62,4$(cm).

Ats.: 62,4 cm.

100. Trikampio ABC kampo B pusiaukampinė yra BD. Reikia rasti: a) kraštinę BC, jei AD:DC=8:5 ir AB = 16; b) kraštinę AC, kai AB : BC = 2 : 7 ir DC – AD = 1.



Duota: ΔABC; $\angle CBD = \angle DBA$;

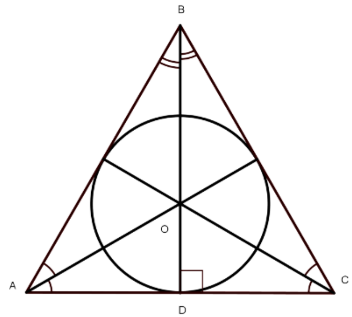
a) AD : DC = 8 : 5; AB = 16 ***Apskaičiuoti:*** BC.
b) AB : BC = 2 : 7; DC – AD = 1 ***Apskaičiuoti:*** AC.

Sprendimas:

a) Pagal pusiaukampinės savybę : $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$; $\frac{8}{5} = \frac{16}{BC}$
BC = $\frac{16 \cdot 5}{8}$ = 10.
b) $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$; $\frac{2}{7} = \frac{AD}{1+AD}$; 7AD = 2 + 2AD; 5AD = 2; AD = $\frac{2}{5}$; DC = $1\frac{2}{5}$; AC =AD + DC= $\frac{2}{5} + 1\frac{2}{5} = 2\frac{1}{5}$.

Ats.: a) 10cm; b) 2.2cm.

101. Lygiašonio trikampio aukštinė 20 cm, o pagrindo ir šoninės kraštinės santykis 4:3. Raskite į trikampį įbrėžto skritulio spindulio ilgį.



Duota: △ABC; AB = BC;
BD⊥AC; BD = 20; AC:BC = 4:3;
apskritimas O.

Apskaičiuoti: OD = r.

Sprendimas:

Į trikampį įbrėžto apskritimo centras yra jo pusiaukampinių susikirtimo centre.

△ADC status; OC jo pusiaukampinė, todėl

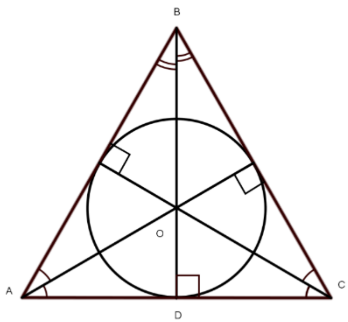
$\frac{\text{OD}}{\text{OB}} = \frac{\text{DC}}{\text{BC}}$;   DC = $\frac{1}{2}\,AC$;   DC : BC = 2:3;

$\frac{\text{OD}}{20-\text{OD}} = \frac{2}{3}$;   3·OD = 40 – 200; 5·OD = 40 cm;   OD = 8 cm.

Ats.: 8 cm.

102. Į lygiašonį trikampį įbrėžto skritulio centras dalija aukštinę santykiu 12:5. Trikampio šoninė kraštinė lygi 60 cm. Raskite trikampio pagrindą.

Duota: △ABC; BD⊥AC;
AB = BC = 60cm; apskritimas O;
BO:OD = 12:5.



Apskaičiuoti: AD.

Sprendimas:

O yra △ABC pusiaukampinių susikirtimo taškas.

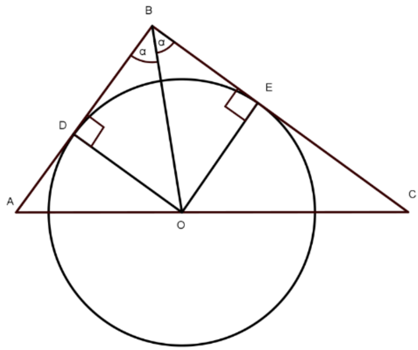
$$\frac{BO}{OD} = \frac{BC}{DC}; \quad \frac{12}{5} = \frac{60}{DC};$$

$$DC = \frac{5 \cdot 60}{12} = 25 \text{ (cm)};$$

AC = 2 cm; DC = 50 cm.

Ats.: 50 cm.

103. Trikampio kraštinės yra 51 cm, 85 cm, 104 cm. Nubrėžtas apskritimas, kuris liečia abi trumpesniąsias kraštines, o jo centras yra ilgiausioje kraštinėje. Į kokias dalis apskritimo centras dalija ilgiausią kraštinę?



Duota: $\triangle ABC$; AC = 104; AB = 51 cm; BC = 85cm, $OD \perp AB$; $OE \perp BC$; OD = OE; apskritimas O.

Apskaičiuoti: AO; OC.

Sprendimas:

$\angle ABO = \angle OBE$;

Pagal pusiaukampinės savybę:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AO}{OC}; \quad \frac{51}{85} = \frac{AO}{104 - AO};$$

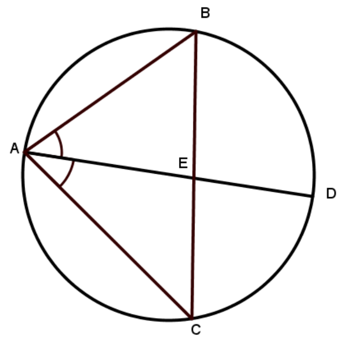
$85 \cdot AO = 51 \cdot 104 - 51 \cdot AO$;

$136 \cdot AO = 51 \cdot 104$; $AO = \frac{51 \cdot 104}{136} = 13$ (cm).

AO = 13cm; OC = 104 – 13 = 19 (cm);

Ats.: 13 cm, 91 cm.

104. Styga AB = 15, styga AC = 21, o styga BC = 24. Taškas D yra lanko CB vidurys. Į kokias dalis BE ir EC atkarpa AD dalija stygą BC?



Duota: AB = 15; AC = 21; BC = 24; ∪BD = ∪DC.

Apskaičiuoti: BE, EC.

Sprendimas:

∠BAD = ∠DAC, nes ∪BD = ∪DC; tai AE yra trikampio ABC pusiaukampinė, tai $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC}$;

$\frac{15}{21} = \frac{BE}{BC-BE}$;

$\frac{5}{7} = \frac{BE}{24-BE}$;

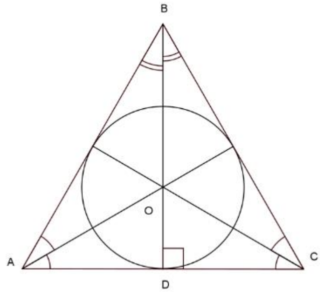
7BE = 5 ·24 – 5·BE ;

12· BE = 5 · 24 ; BE = 10;

EC = 24 – 10 = 14;

Ats.: 10, 14.

105. Lygiašonio trikampio aukštinė 20 cm, o pagrindo ir šoninės kraštinės santykis 4:3. Raskite į trikampį įbrėžto skritulio spindulio ilgį.



Duota: $\triangle ABC$; AB = BC;
BD⊥AC; BD = 20;
AC:BC = 4:3, apskritimas O.

Apskaičiuoti: OD = r.

Sprendimas:

Į trikampį įbrėžto apskritimo
centras yra jo pusiaukampinių susikirtimo centre.

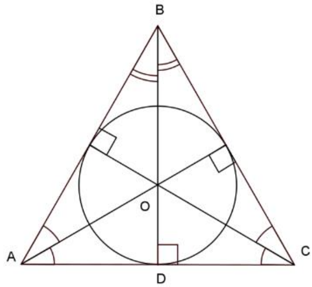
$\triangle ADC$ status; OC jo pusiaukampinė, todėl $\frac{OD}{OB} = \frac{DC}{BC}$;

DC = $\frac{1}{2}$;   DC:BC = 2:3;

$\frac{OD}{20-OD} = \frac{2}{3}$;   3OD = 40 – 200; 5OD = 40;   OD = 8.

Ats.: 8cm.

106. Į lygiašonį trikampį įbrėžto skritulio centras dalija aukštinę santykiu 12:5. Trikampio šoninė kraštinė lygi 60 cm. Raskite trikampio pagrindą.



Duota: $\triangle ABC$; AB = BC = 60cm;
apskritimas O; BD⊥AC;
BO:OD = 12:5.

Apskaičiuoti: AD.

Sprendimas:

O yra $\triangle ABC$ pusiaukampinių susikirtimo taškas.

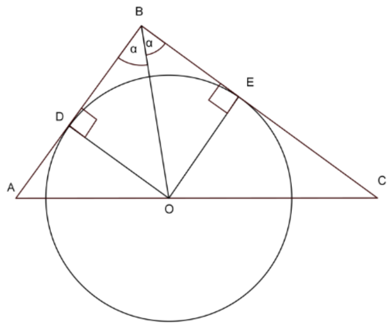
$\frac{BO}{OD} = \frac{BC}{DC}$; $\frac{12}{5} = \frac{60}{DC}$; DC = $\frac{5 \cdot 60}{12}$ = 25;

AC = 2;

DC = 50 cm.

Ats.: 50 cm.

107. Trikampio kraštinės yra 51 cm, 85 cm, 104 cm. Nubrėžtas apskritimas, kuris liečia abi trumpesniąsias kraštines, o jo centras yra ilgiausioje kraštinėje. Į kokias dalis apskritimo centras dalija ilgiausią kraštinę?



Duota: $\triangle ABC$; AC = 104;
AB = 51 cm; BC = 85cm,
$OD \perp AB$; $OE \perp BC$; OD = OE;
apskritimas O.

Apskaičiuoti: AO; OC.

Sprendimas:

$\angle ABO = \angle OBE$.
Pagal pusiaukampinės savybę:
$\frac{AB}{BC} = \frac{AO}{OC}$; $\frac{51}{85} = \frac{AO}{104-AO}$;

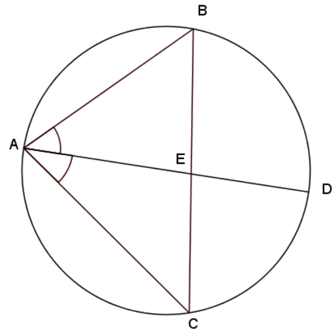
$85AO = 51 \cdot 104 - 51AO$;

$136AO = 51 \cdot 104$; $AO = \frac{51 \cdot 104}{136} = 13$;

AO = 13; OC = 104 – 13 = 19;

Ats.: 13 cm, 91 cm.

108. Styga AB = 15, styga AC = 21, o styga BC = 24. Taškas D yra lanko CB vidurys. Į kokias dalis BE ir EC tiesė AED dalija stygą BC?



Duota: AB = 15; AC = 21; BC = 24; ∪BD = ∪DC.

Apskaičiuoti: BE, EC.

Sprendimas:

∠BAD = ∠DAC, nes ∪BD = ∪DC;

$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC}$; $\frac{15}{21} = \frac{BE}{BC-BE}$; $\frac{5}{7} = \frac{BE}{24-BE}$;

7BE = 5 · 24 – 5BE;

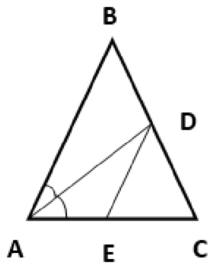
12BE = 5 · 24

BE = 10;

EC = 24 – 10 = 14.

Ats.: 10, 14.

109. Trikampio ABC kraštinė AB= 15, AC= 10. AD yra kampo A pusiaukampinė. Iš taško D nubrėžta tiesė, lygiagreti AB, susikerta su AC taške E. Raskite AE, EC ir DE.



Duota: $\triangle ABC$; AB= 15; AC=10;
$\angle BAD = \angle DAC$; DE $\parallel$ AB.

Apskaičiuoti: AE; EC; DE.

Sprendimas:

Pagal trikampio pusiaukampinės savybę:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC};\ \ \frac{BD}{DC}=\frac{15}{10};\ \ \frac{BD}{DC}=\frac{3}{2};$$

Pagal Talio teoremą:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AE}{EC};\ \ \frac{3}{2}=\frac{AE}{AC-AE};\ \ \frac{3}{2}=\frac{AE}{10-AE};$$

2AE = 30-3AE; 5AE = 30; AE = 6; EC = 10-6 =4;

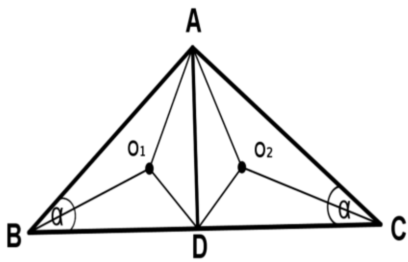
$$\frac{AC}{AB}=\frac{EC}{DE};\ \ \frac{10}{15}=\frac{4}{DE};$$

$\mathrm{DE}=6.$

Ats.: 6; 4; 6.

110. Lygiašonio trikampio ABC pagrinde BC laisvai pasirinktas taškas D. Įrodykite, kad apskritimų, apibrėžtų apie trikampį ABD ir trikampį ACD spinduliai lygūs.

Duota: $\triangle ABC$; $AB = AC$;
$D \in BC$; $O_1B = R_1$;
$O_2C = R_2$; $\angle B = \angle C = \alpha$.



Įrodyti: $R_1 = R_2$.

Įrodymas:

Pagal sinusų teoremą:

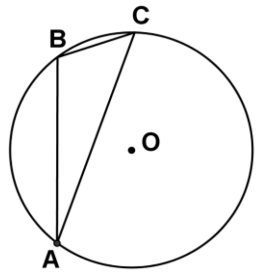
Iš $\triangle ABD$: $\frac{AD}{\sin\alpha} = 2R_1$;

$\Rightarrow$ $R_1 = R_2$

Iš $\triangle ADC$: $\frac{AD}{\sin\alpha} = 2R_2$;

Įrodyta.

111. Į R spindulio apskritimą įbrėžtas trikampis, kurio kampai 15° ir 60°. Raskite trikampio plotą.



Duota: apskritimas O; $\triangle ABC$;
$\angle A = 15°$; $\angle C = 60°$; OC=R.

Apskaičiuoti: S_{ABC}.

Sprendimas:

Pagal sinusų teoremą: $\frac{AB}{\sin\angle C} = 2R$;

$AB = 2R \cdot \sin 60° = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$;

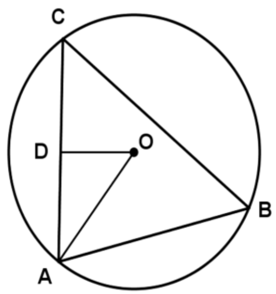
$\frac{BC}{\sin\angle A} = 2R$; $BC = 2R\sin 15°$;

$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - 75° = 105°$;

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle B = \frac{1}{2} R\sqrt{3} \cdot 2R \cdot \sin 15° \cdot \sin 105° =$
$R^2\sqrt{3}\sin 15° \cdot \sin(90° + 15°) = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sin 15° \cdot \cos 15° =$
$\frac{1}{2}R^2\sqrt{3} \cdot \sin 30° = \frac{1}{4}R^2\sqrt{3}$.

Ats.: $\frac{1}{4}R^2\sqrt{3}$.

112. Į apskritimą įbrėžtas trikampis, kurio viena kraštinė $2\sqrt{3}$ cm ir yra nutolusi nuo apskritimo centro 1cm. Raskite kampą prieš šią kraštinę.



Duota: $\triangle ABC$; apskritimas O;
$AC = 2\sqrt{3}$cm; $OD \perp AC$; $OD = 1$cm.

Apskaičiuoti: $\angle B$.

Sprendimas:

$OD \perp AC$, $AD = DC = \sqrt{3}$ (cm).

Iš stataus $\triangle AOD$: $AO^2 = AD^2 + OD^2$; $AO = \sqrt{3+1} = 2$;

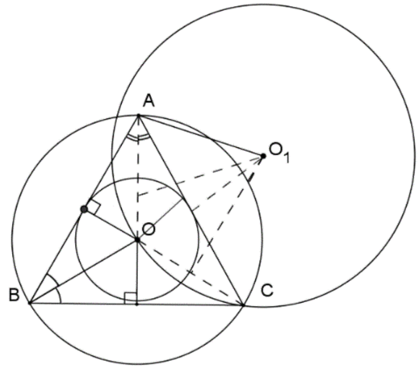
Pagal sinusų teoremą $\frac{AC}{\sin\angle B} = 2AO$;

$\sin\angle B = \frac{AC}{2AO} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\angle B = 60°$.

Ats.: 60°.

113. Duotas trikampis ABC. Jo kampas B lygus 60°. Apibrėžto apskritimo spindulys 2cm. Raskite spindulį apskritimo, einančio per A, C ir įbrėžto trikampio ABC apskritimo centrą.



Duota: ΔABC; $\angle B = 60°$;
apskritimas OB; $OB = 2cm$;
apskritimas O_1C.

***Apskaičiuoti*:** O_1C.

Sprendimas:

Pagal sinusų teoremą:

$\frac{AC}{\sin\angle B} = 2OB$; $\quad AC = 2 \cdot 2 \cdot \sin60° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (cm).

$\angle A + \angle C = 180° - \angle B = 120°$;

S yra į ΔABC įbrėžto apskritimo centras, todėl OA ir OC yra kampų A ir C pusiaukampinės.

$\angle AOC = 180° - \frac{1}{2} \cdot 120°$; $\quad \cup AC = 240°$; $\cup AOC = 120°$;

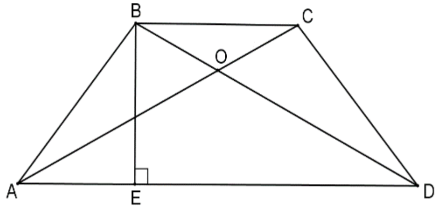
$\angle AO_1C$-antrinis kampas, todėl $\angle AO_1C$ yra centrinis ir lygus lankui, į kurį remiasi;

Pagal sinusų teoremą: $\frac{AC}{\sin\angle AO_1C} = 2O_1C$; $\frac{2\sqrt{3}}{\sin120°} = 2O_1C$;
$O_1C = \frac{\sqrt{3}}{\sin60°} = 2$ (cm).

Ats: 2cm.

114. Trapecijos mažesnis pagrindas 2cm. Prie jo esantys kampai po 135°. Kampas tarp įstrižainių, esantis prieš pagrindą, lygus 150°. Raskite trapecijos plotą.

Duota: trapecija ABCD, $BC = 2cm$; ∠ABC = ∠BCD = ∠BOC = ∠AOD=150°.



Apskaičiuoti: S_{ABCD}

Sprendimas:

$\Delta BOC - lygiašonis\,(BO = OC)$,

$$\angle CBO = \angle BCO = \frac{1}{2}\left(180° - 150°\right) = 15°$$

$\angle ABO = \angle DCO = 135° - 15° = 120°$,
$\angle BOA = 180° - 150° = 30°$ (gretutinių kampų savybė).

Iš Δ BOC pagal kosinusų teoremą:

$BC^2 = BO^2 + OC^2 - 2 \cdot BO \cdot OC \cdot \cos 150°$.
Tegul BO = x, (x > 0).
$2^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \cos(180° - 30°)$,
$4 = 2x^2 - 2x^2 \cdot (-\cos 30°)$,

$4 = 2x^2 + 2x^2 \cdot \frac{1}{2}$, $3x^2 = 4$, $x^2 = \frac{4}{3}$; $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

BO = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm.

$\angle BAO = 180° - 135° - 15° = 30°. \angle BAO = \angle BOA.$ Tai ΔABO – lygiašonis,

$$AB = BO = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ cm.}$$

Brėžiame trapecijos aukštinę BE.

ΔABE – status; $\angle ABE = 135° - 90° = 45°$, tai $\angle BAE = 45°$, vadinasi BE = AE;

$$\cos 45° = \frac{BE}{AB}; \quad BE = \cos 45° \cdot AB;$$

$$BE = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{6} \text{ cm}, \qquad \text{tai } AE = \frac{2\sqrt{6}}{6} \text{ (cm)}.$$

$$AO = 2AE + BC = 2 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{6} + 2 = \frac{2\sqrt{6}}{3} + 2 \text{ (cm)};$$

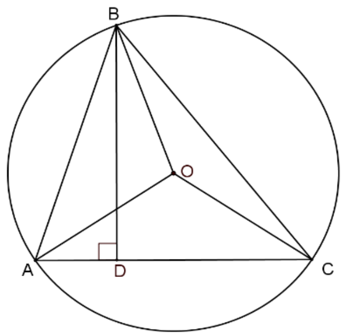
$$S_{trap} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BH;$$

$$S_{trap} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2\sqrt{6}}{3} + 2\right) \cdot \frac{2\sqrt{6}}{6} = \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} =$$

$$= \frac{4\sqrt{6}}{3} + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}\left(\sqrt{6} + 1\right) \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Ats: $\frac{4}{3}\left(\sqrt{6} + 1\right)$ cm^2.

115. Trikampio ABC kraštinė BC = 25. Aukštinė BD = 15. Apibrėžto apskritimo spindulys 32,5. Raskite kitas trikampio kraštines.



Duota: ΔABC; BC=25;
BD⊥AOCD = 15;
OA = OC = OB = 32,5.

Apskaičiuoti: AB, AC.

Sprendimas:

Iš stataus ΔBDC **:**

$$sin\angle C = \frac{BD}{BC} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

Remiantis sinusų teorema $\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{C}} = 2 \cdot \mathrm{OA}$.

$$\mathrm{AB} = 2 \cdot 32{,}5 \cdot \frac{3}{5} = 65 \cdot \frac{3}{5} = 39;$$

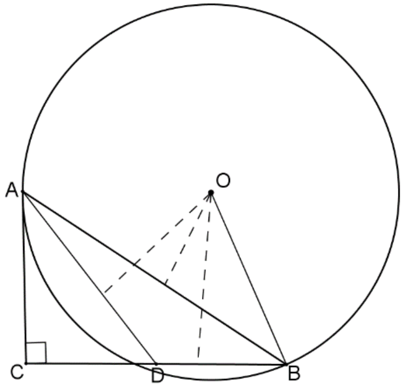
$$\mathrm{DC}^2 = \mathrm{BC}^2 - \mathrm{BD}^2; \quad \mathrm{DC} = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{10 \cdot 40} = 20,$$

Iš stataus $\Delta\mathrm{ABD}$: $\mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BD}^2$;
$$\mathrm{AD} = \sqrt{39^2 - 15^2} = \sqrt{24 \cdot 54} = 36.$$

$$\mathrm{AC} = \mathrm{AD} + \mathrm{DC} = 20 + 36 = 56.$$

Ats.: AB = 39; AC = 56.

116. Stataus trikampio statiniai 3cm ir 4cm. Raskite spindulį apskritimo, einančio per smailiųjų kampų viršūnės ir didesnio statinio vidurio tašką.



Duota: ΔBCA, $\angle C = 90°$;
$CD = DB$; $AC = 3cm$;
$CB = 4cm$;
apskritimas OB.

Apskaičiuoti: OB.

Sprendimas:

Iš stataus ΔABC:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2;$$
$$AB = 5;$$

$$\sin\angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5};$$

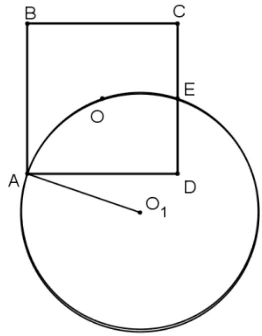
$$CD = DB = \frac{1}{2}CB = 2cm.$$

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{13};$$

Iš ΔABD: $\frac{AD}{\sin\angle B} = 2OB;$ $\quad OB = \frac{\sqrt{13}}{2\cdot\frac{3}{5}} = \frac{5\sqrt{13}}{6}.$

Ats: $\frac{5\sqrt{13}}{6}$.

117. Duotas kvadratas, kurio kraštinė 1cm. Raskite spindulį apskritimo, kuris eina per vieną kvadrato viršūnę, kraštinės, kurioje nėra tos viršūnės, vidurio tašką ir kvadrato centrą.



Duota: kvadratas ABCD;
AB = 1cm; $AC \cap BD = 0$;
DE = EC; apskritimas O_1.

Apskaičiuoti: O_1A;

Sprendimas:

$\angle AOE = 135°$;

Iš st. ΔADE: $AE^2 = AD^2 + DE^2$;

$$AE = \sqrt{1 + 0{,}25} = \sqrt{1{,}25} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

Pagal sinusų teoremą: $\frac{AE}{sin\angle AOE} = 2AO_1$;

$$\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{sin135°} = 2AO_1; \quad \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 2AO_1;$$

$$\sqrt{\frac{5}{2}} = 2AO_1; \quad AO_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{10}\,cm.$$

Ats.: $\frac{\sqrt{10}}{4}cm$.

118. Nustatykite trikampio rūšį, jei kraštinės:

a) 6; 7; 9; **b) 7; 24; 25;** **c) 23; 25; 34;**

Kampas prieš ilgiausią kraštinę nusako, koks yra trikampis, todėl skaičiuojamas kampas α.

Pagal kosinusų teoremą: $cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

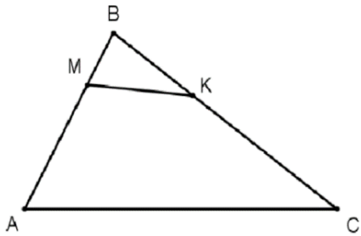
a) $cos\alpha = \frac{6^2+7^2-9^2}{2\cdot6\cdot7} = \frac{36+49-81}{2\cdot6\cdot7} = \frac{85-81}{2\cdot6\cdot7} = \frac{4}{2\cdot6\cdot7} > 0;$
α<90°, tai trikampis – smailusis.

b) $cos\alpha = \frac{7^2+24^2-25^2}{2\cdot7\cdot24} = \frac{49+576-625}{2\cdot7\cdot24} = \frac{625-625}{2\cdot7\cdot24} = 0;$
α=90°, tai trikampis – statusis.

c) $cos\alpha = \frac{23^2+25^2-34^2}{2\cdot23\cdot25} = \frac{529+625-1156}{2\cdot23\cdot25} = \frac{1154-1156}{2\cdot23\cdot25} < 0;$
α>90°, tai trikampis – bukasis.

119. Duotas trikampis ABC. AB = 3, BC = 5, AC = 6. Kraštinėje AB parinktas taškas M taip, kad AM = 2BM, kraštinėje BC taškas K parinktas taip, kad 3BK = 2KC. Raskite MK.

Duota: ΔABC; AB = 3;
BC = 5;AC = 6; AM = 2BM;
3BK = 2KC.



Apskaičiuoti: MK.

Sprendimas:

<u>I būdas</u>

$$\mathrm{BM} = \frac{1}{3}\mathrm{AB} = 1; \quad \mathrm{BK} = \frac{2}{5}\mathrm{BC} = 2;$$

$$\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{3}; \quad \frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{BC}} = \frac{2}{5};$$

$$\cos\angle\mathrm{B} = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{AC}^2}{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}} = \frac{9+25-36}{2\cdot3\cdot5} = -\frac{1}{15};$$

$$\mathrm{MK}^2 = \mathrm{MB}^2 + \mathrm{BK}^2 - 2\mathrm{MB}\cdot\mathrm{BK}\cdot\cos\angle\mathrm{B};$$

$$\mathrm{MK} = \sqrt{1+4-2\cdot1\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{15}\right)} = \sqrt{5+\frac{4}{15}} = \sqrt{\frac{79}{15}}.$$

II būdas

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)} = \sqrt{7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1} = 2\sqrt{14};$$

$$p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}(3 + 5 + 6) = 7;$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle B; \qquad 2\sqrt{14} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin\angle B;$$

$$\sin\angle B = \frac{4\sqrt{14}}{15};$$

$$\cos\angle B = \pm\sqrt{1 - \sin^2\angle B} = \pm\sqrt{1 - \frac{16 \cdot 14}{225}} = \pm\frac{1}{15};$$

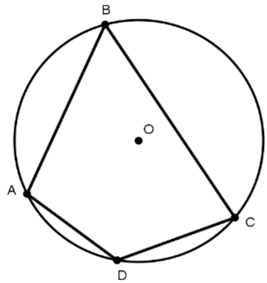
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B;$$

$$\cos\angle B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{9 + 25 - 36}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{1}{15};$$

$$MK = \sqrt{1 + 4 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{15}} = \sqrt{5\frac{4}{15}} = \sqrt{\frac{79}{15}}.$$

Ats.: $\sqrt{\frac{79}{15}}$.

120. Į apskritimą įbrėžtas keturkampis, kurio dvi kraštinės 8cm ir 15cm. Kampas tarp jų lygus 60°. Raskite kitas keturkampio kraštines, jeigu jų skirtumas 1cm.



Duota: apskritimas δ,
ABCD – keturkampis; AB = 8cm;
BC = 15cm; $\angle ABC = 60°$;
AD – DC = 1cm.

Apskaičiuoti: AD; DC.

Sprendimas:

$\angle B + \angle D = 180°$; $\angle D = 120°$

Iš ΔABC pagal kosinusų teoremą: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos 60°$

$AC = \sqrt{64 + 225 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2}} = 13;$

Iš ΔADC pagal kosinusų teoremą:

$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cos 120°;$

DC = x; AD = $x + 1$; $(x > 0)$

$169 = (x+1)^2 + x^2 - 2 \cdot x(x+1) \cdot \cos 120°;$

$\cos 120° = -\frac{1}{2};$

$169 = x^2 + 2x + 1 + x^2 + x;$

$3\,x^2 + 3\,x - 168 = 0;$

D = 9 + 2026 = 2035;

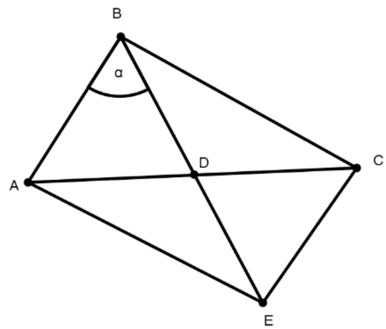
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{2035}}{6};$$

$$DC = \frac{-3 + \sqrt{2035}}{6}; \quad AD = \frac{-3 + \sqrt{2035}}{6} + 1 = \frac{3 + \sqrt{2035}}{6};$$

Ats.: $\frac{-3+\sqrt{2035}}{6}$; $\frac{3+\sqrt{2035}}{6}$.

121. Trikampio kraštinės 3 cm, 4cm, 6cm. Raskite cos α, jei α yra kampas tarp pusiaukraštinės į didžiausią trikampio kraštinę ir mažiausias trikampio kraštines.

Duota: ΔABC; AB = 3cm;
BC = 4cm; AC = 6cm;
AD = DC; ∠ABD = α



Apskaičiuoti: cosα.

Sprendimas:

Pratęsiu BD ir atidedu DE = BD

ABCE = lygiagretainis

$AC^2 + BE^2 = 2(AB^2 + BC^2)$;

$36 + BE^2 = 2(9 + 16)$; $BE^2 = 14$; $BE = \sqrt{14}$;

$BD = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}\sqrt{14}$; $AD = \frac{1}{2}AC = 3$cm;

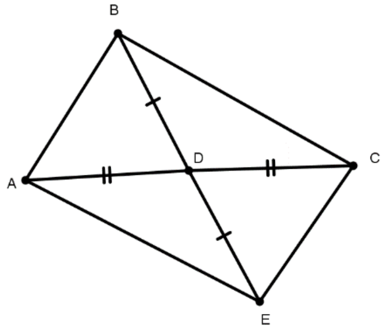
Iš ΔABD:

$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2 \cdot AB \cdot BD} = \frac{9 + 3{,}5 - 9}{2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{14}} = \frac{3{,}5}{3\sqrt{14}} = \frac{35\sqrt{14}}{30 \cdot 14} = \frac{\sqrt{14}}{12}.$$

Ats.: $\frac{\sqrt{14}}{12}$.

122. Trikampio kraštinės 4; 10; $\sqrt{116}$; Įrodykite, kad trikampį galima padalyti į 2 lygiašonius trikampius.

Duota: ΔABC; $AB = 4$; $BC = 10$;
$AC = \sqrt{126}$;



Įrodyti: ΔBAD ir ΔBDC –
lygiašoniai, tai yra:
$AD = BD = DC$.

Įrodymas:

$AD = DC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{126}$;

Pratęsiame BD ir atidedame DE = BD.

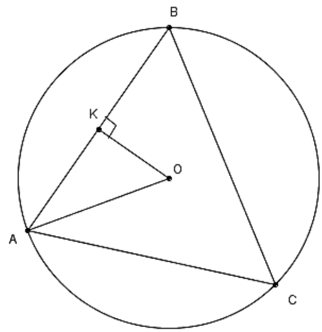
ABCE – lygiagretainis.

$BE^2 + AC^2 = 2(AB^2 + BC^2)$; $BE^2 = 2(16 + 100) - 116 = 232 - 116 = 116$;

$BE = \sqrt{116}$; $BD = \frac{1}{2}\sqrt{116}$; $BD = AD = DC \Rightarrow \Delta BAD$ ir ΔBDC – lygiašoniai**.**

Įrodyta.

123. Į apskritimą įbrėžtas trikampis. Didžiausios ir mažiausios kraštinės skirtumas 4. Trečia kraštinė nutolusi nuo apskritimo centro per 2. Apskritimo spindulys 4. Apskaičiuokite trikampio kraštines.



Duota: ΔABC; apskritimas - O; $AC < AB < BC$; $BC - AC = 4$;
$OK = 2$; $AO = r = 4$.

Apskaičiuoti: AB; BC; AC.

Sprendimas:

Iš stataus ΔAOK:
$AK^2 = AO^2 - KO^2$;
$AK = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$;
$AB = 2AK = 4\sqrt{2}$;

Pagal sinusų teoremą: $\frac{AB}{\sin C} = 2AO$;
$\sin C = \frac{AB}{2AO} = \frac{4\sqrt{3}}{2 \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos C = \cos 60° = \frac{1}{2}$;
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$;

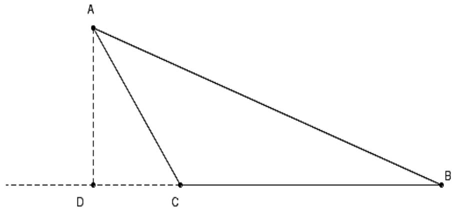
$$\begin{cases} (4\sqrt{3})^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot \cos C \\ BC - AC = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 48 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \frac{1}{2} \\ BC = 4 + AC \end{cases}$$

$48 = AC^2 + (4 + AC)^2 - AC(4 + AC)$;
$48 = AC^2 + 16 + 8 \cdot AC + AC^2 - 4AC - AC^2$;
$AC^2 + 4AC - 32 = 0$; $(AC)_1 = -8$; $(AC)_2 = 4$; $BC = 8$;
Ats.: $4\sqrt{3}$; 8; 4.

124. Trikampio ABC plotas lygus 16cm^2. AC=5cm; BC=8cm. Kampas C yra bukasis. Apskaičiuokite AB.

Duota: ΔABC; AC = 5cm;
BC = 8cm; $S_{\Delta ABC} = 16cm^2$.



Apskaičiuoti: AB.

Sprendimas:

1) Būdas:

$S\Delta ABC = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin C; \quad 16 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin C;$

$\sin C = \frac{4}{5}; \ \cos C = -\sqrt{1 - \sin^2 C} = -\frac{3}{5};$

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C;$

$$AB = \sqrt{25 + 64 + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{3}{5}} = \sqrt{137}.$$

2) Būdas:

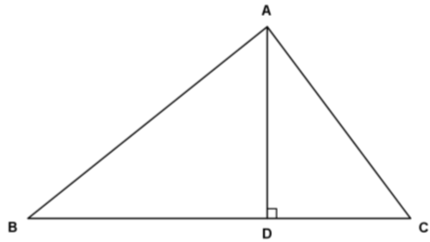
$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD; \quad AD = \frac{2 \cdot 16}{8} = 4;$

Iš stataus ΔADC: $DC^2 = AC^2 - AD^2; \quad DC^2 = 5^2 - 4^2;$
DC = 3; DB = DC + CB = 3 + 8 = 11;

Iš stataus ΔADB: $AB^2 = AD^2 + DB^2;\ AB = \sqrt{16 + 121} = \sqrt{137}.$
Ats.: $\sqrt{137}$.

125. Trikampio ABC plotas lygus 36cm^2, AB=12cm, BC=10cm, kampas β yra smailusis. Apskaičiuokit AC.

Duota: ΔABC, $S_{\Delta ABC} = 36cm^2$,
$\angle\beta < 90^\circ$, AB = 12cm,
BC = 10cm.



Apskaičiuoti: AC.

Sprendimas:

1) Būdas

$AD \perp BC$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC$;

$36 = \frac{1}{2} AD \cdot 10$; AD=7,2 (cm);

Iš stataus ΔADB: $BD^2=AB^2-AD^2$;

$BD = \sqrt{12^2 - 7{,}2^2} = \sqrt{144 - 51{,}84} = 9{,}6(cm)$;

DC = BC – BD = 10 - 9,6 = 0,4(cm);

Iš stataus ΔADC: $AC^2 = AD^2 + DC^2$;

2) Būdas

$AC = \sqrt{7{,}2^2 + 0{,}4^2} = \sqrt{5{,}2} = 2\sqrt{13}(cm)$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle B$;

$\sin\angle B = \frac{2\cdot 36}{12\cdot 10} = \frac{3}{5}$;

$\cos\angle B = \sqrt{1 - sin^2\angle B} = \frac{4}{5}$;

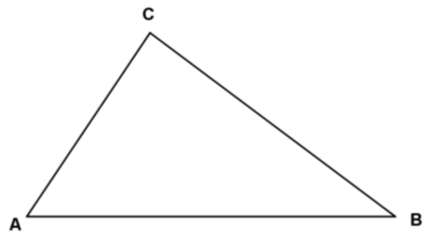
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$;

$AC=\sqrt{144 + 100 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5}} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (cm).

Ats.: $2\sqrt{13}$ cm.

126. Trikampio kraštinių ilgiai 7; 9; 17. Apskaičiuokite kampo tarp trumpesniųjų kraštinių sinuso reikšmę.

Duota: ΔABC, AC=9, BC = 10, AB = 17.



Apskaičiuoti: sin∠C.

Sprendimas:

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p - AC(p - BC)(p - AB)};$

p = $\frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}(9 + 10 + 17) = 18;$

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{18 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 9} = 36;$

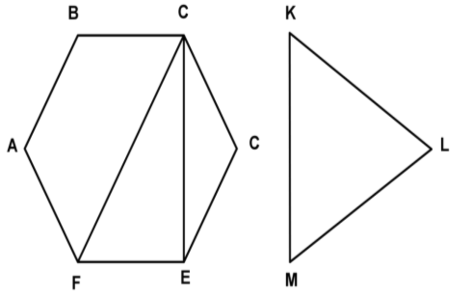
$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\, AC \cdot BC \cdot \sin\angle C;$

$\sin\angle C = \frac{2 \cdot 36}{9 \cdot 10} = 0{,}8.$

Ats.: 0,8.

127. Tam tikras plotas yra išklotas taisyklingomis šešiakampėmis plytelėmis. Kokį plotą galima iškloti tuo pačiu lygių taisyklingų trikampių plytelių kiekiu, kai trikampės plytelės kraštinė lygi mažesniajai šešiakampės plytelės įstrižainei?

Duota: taisyklingasis šešiakampis ABCDEF; ΔKLN; KM = KL = ML = CE; S = $S_{ABCDEF} \cdot k$; $S_1 = S_{KLM} \cdot k$.



Apskaičiuoti: S_1.

Sprendimas:

AB = a;

$S_{ABCDEF}=6\cdot\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$;

CE = KM =2·CD·sin60º = $a\sqrt{3}$;

$S_{KLN}=\frac{KM^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$;

k = $\frac{S}{\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}}=\frac{2S}{3a^2\sqrt{3}}=\frac{S}{2}$.

Ats.: pusę ploto.

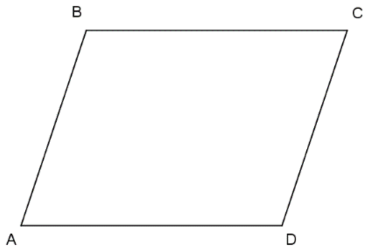
III skyrius

LYGIAGRETAINIS

128. Apskaičiuokite visus lygiagretainio kampus, jei vienas jo kampas 42° didesnis už kitą.

Duota: ABCD – lygiagretainis;
$\angle B = \angle A + 42°$.

Apskaičiuoti: $\angle A$; $\angle B$.



Sprendimas:

Lygiagretainio priešingi kampai yra lygūs; lygiagretainio kampų prie vienos kraštinės suma lygi 180°.

$\angle A + \angle B = 180°$;

$\angle A + \angle A + 42° = 180°$;

$2\angle A = 138°$; $\angle A = 69°$;

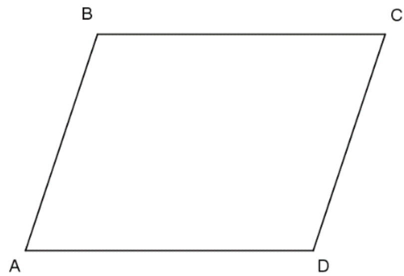
$\angle B = 69° + 42° = 111°$.

Ats.: 69°; 111°.

129. Apskaičiuokite visus lygiagretainio kampus, jei jie sutinka kaip 3 : 7.

Duota: ABCD – lygiagretainis

$\angle A : \angle B = 3 : 7.$



Apskaičiuoti: $\angle A$; $\angle B$

Sprendimas:

Lygiagretainio priešingi kampai yra lygūs.

Lygiagretainio kampų prie vienos kraštinės suma lygi 180°.

$\angle A + \angle B = 180°;$

$\frac{\angle A}{\angle B} = \frac{3}{7};$

$\angle A = \frac{3}{7} \cdot \angle B;$

$\frac{3}{7} \angle B + \angle B = 180°;$

$1\frac{3}{7} \cdot \angle B = 180°;$

$\angle B = 180° : 1\frac{3}{7} = 126°;$

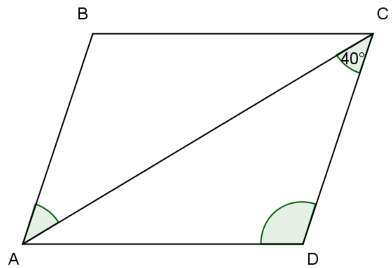
$\angle A = \frac{3}{7} \cdot 126° = 54°$

Ats.: 54° ; 126°.

130. Lygiagretainio ABCD įstrižainė AC sudaro su kraštine DC kampą, lygų 40°. Raskite ∠ ADC ir ∠ BAC, jei ∠ ABC = 110°.

Duota : ABCD – lygiagretainis;
∠ ACD = 40°; ∠ ABC = 110°.

Apskaičiuoti: ∠ADC; ∠BAC.



Sprendimas:

∠ BAC = ∠ ACD = 40° , nes AB ∥ DC , AC – kirstinė (vidaus priešiniai)

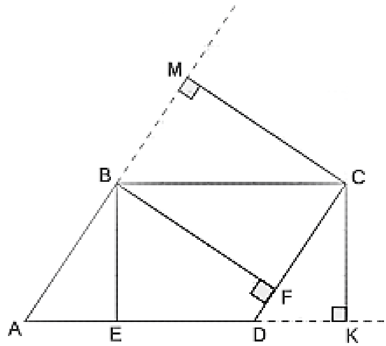
∠ ADC + ∠ DCB = 180° (lygiagretainio kampai prie vienos kraštinės)

∠ DCB = 180° - 110° = 70°;

∠ ADC = ∠ ABC = 110° (lygiagretainio priešingi kampai).

Ats.: 110°; 40°.

131. Du lygiagretainio kampai sutinka kaip 1 : 3. Raskite kampą tarp lygiagretainio aukštinės nuleistos iš viršūnės : a) bukojo kampo; b) smailiojo kampo.



Duota: ABCD – lygiagretainis;
$\angle EAB : \angle ABC = 1 : 3$;
$BC \perp AD$; $BF \perp DC$;
$CM \perp AB$; $CK \perp AD$.

Apskaičiuoti: a) $\angle MCK$;
b) $\angle EBF$.

Sprendimas:

$\angle EAB + \angle ABC = 180° \Rightarrow \frac{\angle EAB}{\angle ABC} = \frac{1}{3}$;

$\angle ABC = 3 \angle EAB$;
$\angle EAB + 3 \angle EAB = 180°$
$4 \angle EAB = 180°$
$\angle EAB = 45°$; $\angle ABC = 3 \cdot 45° = 135°$;

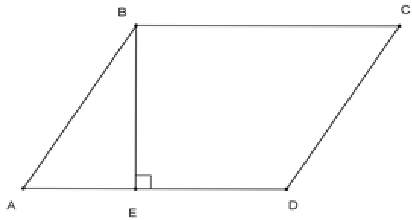
EBFD – keturkampis. $\angle FDE + \angle BED + \angle EBF + \angle BFD = 360°$;
$135° + 90° + \angle EBF + 90° = 360°$
$\angle FDE = \angle ABC = 135°$
$\angle EBF = 45°$

AMCK – keturkampis. $\angle EAB + \angle AMC + \angle MCK + \angle CKA = 360°$; $45° + 90° + \angle MCK + 90° = 360°$
$\angle MCK = 135°$

Ats.: 45° ; 135°.

132. Vienas lygiagretainio kampas tris kartus didesnis už kitą. Aukštinė nuleista iš bukojo kampo viršūnės, dalija vieną prieš tą kampą esančią kraštinę į dalis, lygias 2cm ir 4 cm. Raskite Lygiagretainio aukštinę.

Duota: ABCD – lygiagretainis; ∠B = 3∠A; BE⊥AD; AE = 2cm; ED = 4cm arba AE = 4cm; ED = 2cm .



Apskaičiuoti: BE.

Sprendimas:

∠A+∠B=180°;

∠A+3∠A=180°;

4∠A=180°; ∠A=45°; ∠B=135°;

Iš stataus △ABE: ∠ABE = 45° => AE = BE = 2cm;

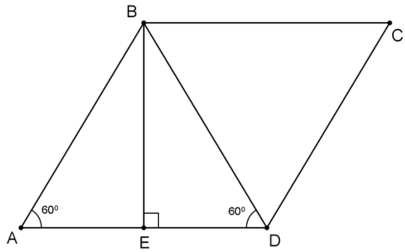
(BE = AE = 4cm).

Ats.: 2cm arba 4cm.

133. Lygiagretainio smailusis kampas lygus 60°. Lygiagretainio aukštinė, nuleista iš bukojo kampo viršūnės, dalija lygiagretainio kraštinę pusiau. Apskaičiuokite trumpesniąją lygiagretainio įstrižainę, jei jo perimetras lygus 24cm.

Duota: ABCD - lygiagretainis; ∠A=60°; BE⊥AD; AE=ED; P_{ABCD} =24cm;

Apskaičiuoti: BD.



Sprendimas:

△ABE = △BDE pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų:

AE = AD – duota, BE – bendra, ∠AEB = ∠DEB = 90°;

Kadangi trikampiai lygūs, tai

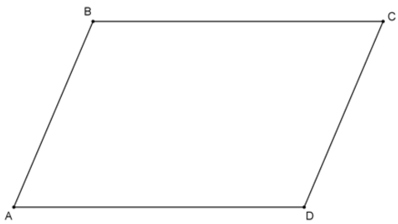
∠EDB = 60°; AB = DB; tai ∠ABD = 60°, tai △ABD – lygiakraštis.

AB = BD = AD; AB+AD = ½ P_{ABCD} = 12cm; AB = 6cm;

BD = 6cm;

Ats.: 6cm.

134. Lygiagretainio perimetras 72cm. Apskaičiuokite jo kraštinių ilgius, jei dvi gretimos jo kraštinės sutinka kaip 5:3.



Duota: ABCD – lygiagretainis;
$P_{ABCD} = 72$cm; AD : AB = 5:3.

Apskaičiuoti: AD; AB.

Sprendimas:

Lygiagretainio priešingos kraštinės yra lygios, todėl

$AB + AD = \frac{1}{2} P_{ABCD} = 36$(cm);

$\frac{AD}{AB} = \frac{5}{3}$ - duota; $AD = \frac{5}{3}AB$;

$$AB + \frac{5}{3}AB = 36;$$

$$\frac{8}{3}AB = 36;$$

$$AB = 36 \cdot \frac{3}{8} = 13{,}5(\text{cm});$$

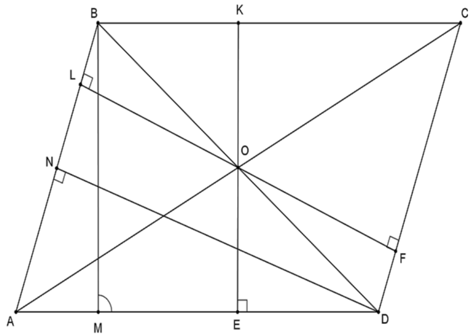
$$AD = \frac{5}{8} \cdot 13{,}5 = 22{,}5(\text{cm}).$$

Ats.: 22,5cm; 13,5cm.

135. Lygiagretainio smailusis kampas lygus α, o atstumai nuo įstrižainių susikirtimo taško iki nelygių kraštinių lygūs m ir p. Raskite lygiagretainio įstrižainių ilgius ir plotą.

Duota: ABCD – lygiagretainis, $AC \cap BD = O$; $OE \perp AD$; $OF \perp CD$; $OE = m$; $OF = p$; $\angle A = \alpha$.

Apskaičiuoti: BD; AC; S_{ABCD}.



Sprendimas:

Pratęsiame OF ir OE. Lygiagretainio įstrižainės susikirsdamos dalijasi pusiau, todėl

$LF = 2OF = 2p$; $KE = 2OE = 2m$;

Brėžiu $BM \parallel KE$, tai $BM \perp AD$; $BM = KE = 2m$;

Iš st.$\triangle ABM$: $\sin\angle A = \frac{BM}{AB}$; $AB = \frac{BM}{\sin\angle\alpha} = \frac{2m}{\sin\angle\alpha}$;

Analogiškai: $DN \parallel FL$; $DN \perp AB$; $DN = 2p$; $AD = \frac{2p}{\sin\angle\alpha}$

$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin\angle\alpha = \frac{2m}{\sin\angle\alpha} \cdot \frac{2p}{\sin\angle\alpha} \cdot \sin\angle\alpha = \frac{4mp}{\sin\angle\alpha}$;

(galima $S = AD \cdot BM = \frac{2p}{\sin\angle\alpha} \cdot 2m = \frac{4mp}{\sin\angle\alpha}$;

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\alpha =$
$$= \frac{4m^2}{\sin^2\alpha} + \frac{4p^2}{\sin^2\alpha} - 2 \cdot \frac{4mp}{\sin^2\alpha} \cdot \cos\alpha$$

$BD = \frac{2\sqrt{m^2+p^2-2mp\cos\alpha}}{\sin\alpha}$; $\angle D = 180° - \alpha$; $\cos\angle D = -\cos\alpha$;

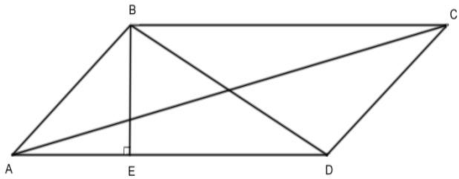
$AC^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos\angle D =$
$$= \frac{4p^2}{\sin^2\alpha} + \frac{4m^2}{\sin^2\alpha} + 2 \cdot \frac{4mp}{\sin^2\alpha} \cdot \cos\alpha;$$

$AC = \frac{2\sqrt{m^2+p^2+2mp\cdot\cos\alpha}}{\sin\alpha}$;

Ats.: $\frac{4mp}{\sin\alpha}$; $\frac{2\sqrt{m^2+p^2-2mp\cdot\cos\alpha}}{\sin\alpha}$; $\frac{2\sqrt{m^2+p^2+2mp\cdot\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

136. Lygiagretainio ABCD aukštinė, nuvesta iš bukojo kampo viršūnės B į kraštinę DA, dalija ją santykiu 5 : 3, skaičiuojant nuo viršūnės D. Be to, AD : AB = 2. Apskaičiuokite įstrižainių AC ir BD santykį.

Duota: ABCD – lygiagretainis; BE ⊥ AD; AE : ED = 3 : 5; AD : AB = 2.



Apskaičiuoti: $\frac{AC}{BD}$.

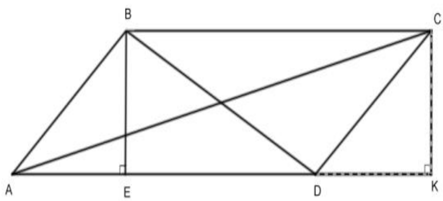
Sprendimas:

$\frac{AD}{AB}$ = 2; AD = 2AB;

ED = $\frac{3}{8}$ AD = $\frac{3}{8}$ · 2AB = $\frac{3}{4}$ AB;

ED = $\frac{5}{8}$ AD = $\frac{5}{4}$ AB;

Nubrėžiu CK ⊥ AD:



$S_{\Delta ABE} = S_{\Delta DCK}$; BE = CK (atstumai tarp lygiagrečių tiesių) ir AB = CD (priešingos kraštinės lygiagrečios).

AE = DK; AK = AD + DK = 2AB + $\frac{3}{4}$ AB = $\frac{11}{4}$ AB;

Iš stataus trikampio ABE:
$BE^2 = AB^2 - AE^2$;

$BE^2 = AB^2 - \frac{9}{16} AB^2 = \frac{7}{16} AB^2;$

Iš stataus trikampio BED: $BD^2 = BE^2 + ED^2$;

$BD = \sqrt{\frac{7}{16} AB^2 + \frac{25}{16} AB^2} = AB\sqrt{2};$

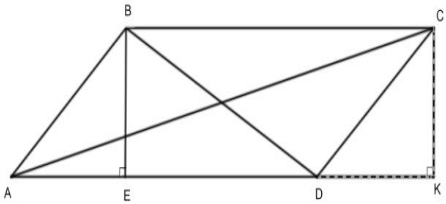
Iš stataus trikampio ACK: $AC^2 = AK^2 + CK^2$;

$AC = \sqrt{\frac{121}{16} AB^2 + \frac{7}{16} AB^2} = 2\sqrt{2}\ AB;\ \frac{AC}{BD} = \frac{2\sqrt{2}\ AB}{AB\sqrt{2}} = 2.$

Ats.: 2.

137. Lygiagretainio ABCD aukštinė, nubrėžta iš bukojo kampo viršūnės B į kraštinę AD, dalija ją santykiu 1 : 5, skaičiuojant nuo viršūnės A. Be to, AD = 3AB. Apskaičiuokite įstrižainių AC ir BD kvadratų santykį.

Duota: ABCD – lygiagretainis; BE ⊥ AD; AE : ED = 1 : 5; AD = 3AB.



Apskaičiuoti: $\frac{AC^2}{BD^2}$.

Sprendimas:

$AE = \frac{1}{6}\ AD = \frac{1}{6} \cdot 3\ AB = \frac{1}{2}\ AB$; $ED = \frac{5}{6}\ AD = \frac{5}{6} \cdot 3\ AB = \frac{5}{2}\ AB$;

Nubrėžiu CK ⊥ AD;
$S_{\Delta ABE} = S_{\Delta DCK}$ (AB = DC - priešingos lygiagretainio kraštinės;
BE = CK – atstumai tarp lygiagrečių tiesių)

$DK = AE = \frac{1}{2}\ AB$; $AK = AD + DK = 3\ AB + \frac{1}{2}\ AB = \frac{7}{2}\ AB$;

Iš stataus trikampio ABE: $BE^2 = AB^2 - AE^2 = AB^2 - \frac{1}{4}\ AB^2 = \frac{3}{4}\ AB^2$;

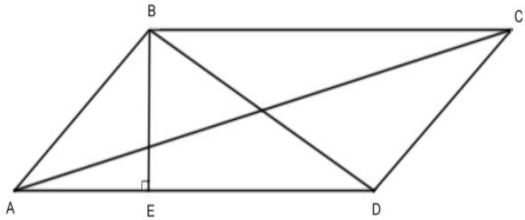
Iš stataus trikampio BED: $BD^2 = BE^2 + ED^2 = \frac{3}{4}\ AB^2 + \frac{25}{4}\ AB^2 = 7\ AB^2$;

Iš stataus trikampio ACK: $AC^2 = AK^2 + CK^2 = \frac{49}{4}\ AB^2 + \frac{3}{4}\ AB^2 = 13\ AB^2$; $\frac{AC^2}{BD^2} = \frac{13AB^2}{7AB^2} = \frac{13}{7}$.

Ats.: $\frac{13}{7}$.

138. Lygiagretainio įstrižainės lygios 12 ir 14, o jų kraštinių ilgių skirtumas lygus 4. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą.

Duota: ABCD – lygiagretainis;
$BD = 12$; $AC = 14$; $AD - AB = 4$.



Apskaičiuoti: P_{ABCD};

Sprendimas:

$AD = 4 + AB$;

Pagal kosinusų teoremą: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\alpha$;

$144 = AB^2 + (4 + AB)^2 - 2AB\,(4 + AB) \cdot \cos\alpha$ (1)

$AC^2 = AD^2 + AB^2 + 2AB \cdot AD \cdot \cos\alpha$;

$196 = (4 + AB)^2 + AB^2 + 2AB\,(4 + AB) \cdot \cos\alpha$ (2)

(1) + (2) => $340 = 2(AB^2 + (4 + AB)^2)$

$170 = AB^2 + 16 + 8AB + AB^2$;

$AB^2 + 4AB - 77 = 0$; $(AB) = -11$; $(AB) = 7$;

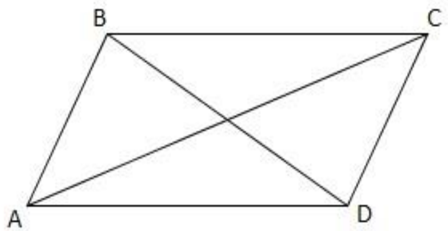
$AB = 7$; $AD = 11$;

$P = 2(AB + AD) = 36$

Ats.: 36.

139. Lygiagretainio įstrižainės lygios 24 ir 28, o jų kraštinių ilgių skirtumas lygus 8. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą

Duota: lygiagretainis
ABCD ; BD = 24;
AC = 28; AD-AB = 8.



Apskaičiuoti: $P_{ABCD.}$

Sprendimas:

Tarkime kad AB = x = DC. Tada AD = x+8;

$\angle A=\alpha$; $\angle D=180°-\alpha$, be to žinome, kad $\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$;

Pagal kosinusų teoremą: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\cdot AD\cdot \cos A$,
$576 = x^2 + (x + 8)^2 - x\cdot AD\cdot \cos\alpha$; (1)

$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD\cdot DC\cdot \cos(180°-\alpha)$;
$784 = (x + 8)^2 + x^2 + 2\cdot x\cdot AD\cdot \cos\alpha$; (2)

Lygybes (1) sudėjus su (2) panariui gauname:
$1360=2\cdot x^2+2(x+8)^2$ | :2;

$680=x^2+x^2+16x+64$ | :2;

$x^2+8x-308=0$;

$x_1= -22$ (netinka) $x_2 = 14$.
Vadinasi AD=14+8+8=22.

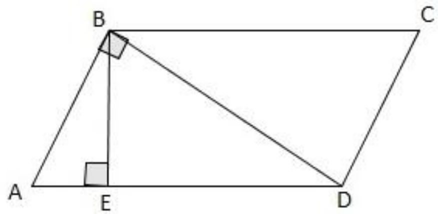
$P_{ABCD} =2(AB +AD) = 2(14+22) = 72$.

Ats.: 72.

140. Trumpesnioji lygiagretainio įstrižainė statmena jo kraštinei. Aukštinė, nubrėžta iš bukojo kampo viršūnės, dalija ilgesniąją kraštinę į 64cm ir 225cm ilgio atkarpas, skaitant nuo smailiojo kampo viršūnės. Apskaičiuokite lygiagretainio trumpesniosios kraštinės, aukštinės ir trumpesniosios įstrižainės ilgį.

Duota: ABCD-lygiagretainis;
$BD \perp AB$; $BE \perp AD$;
AE = 64cm; ED=225cm;

Apskaičiuoti: AB; BE; BD.



Sprendimas:

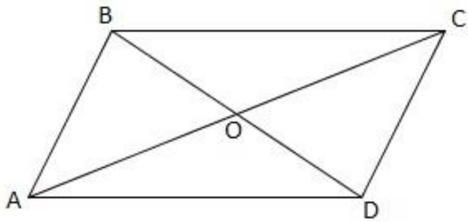
Iš stataus ΔABD : $BE^2=AE \cdot ED$; $BE=\sqrt{64 \cdot 225}=120$(cm);

Iš stataus ΔABE : $AB^2=BE^2+AE^2$; $AB=\sqrt{120^2+64^2}=136$(cm);

Iš stataus ΔBED : $BD^2=BE^2+ED^2$; $BD=\sqrt{120^2+225^2}=255$(cm).

Ats.: 136 cm; 120cm; 255cm.

141. Apskaičiuokite lygiagretainio plotą, jei jo įstrižainės lygios 10 ir 15, o kampas tarp jų 60°.



Duota: ABCD-lygiagretainis; BD=10; AC=15; ∠AOB=60°.

Apskaičiuoti: S_{ABCD}.

Sprendimas:

$S_{ABCD} = S_{ABO} + S_{CBO} + S_{COD} + S_{AOD}$.
Pagal tris lygias kraštines trikampiai ABO ir COD; BOC ir AOD yra lygūs. Vadinasi $S_{ABCD} = 2\cdot(S_{ABO} + S_{CBO})$;

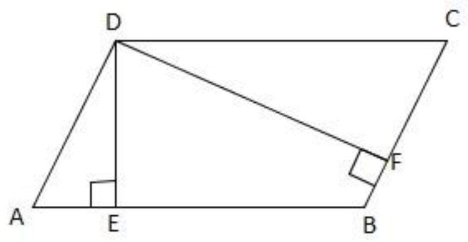
$S_{ABCD} = 2\cdot(\frac{1}{2}\,AO \cdot BO \cdot \sin(\angle AOB) + \frac{1}{2}\,CO \cdot BO \cdot \sin(180^0 - \angle AOB))$;

$S_{ABCD} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot BO\cdot\sin(\angle AOB)\cdot(AO + CO) = \frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin(\angle AOB)$;

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 15\cdot\sin 60° = 75\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$.

Ats.: $\frac{75\sqrt{3}}{2}$.

142. Lygiagretainio kraštinės lygios 12 ir 15. Abiejų aukštinių, nuleistų iš tos pačios viršūnės į gretimas kraštines, ilgių suma lygi 22,5. Apskaičiuokite tų aukštinių ilgius.



Duota: ABCD-lygiagretainis;
AD=12; AB=15; DE⊥AB;
DF⊥BC; DE+DF=22.5.

Apskaičiuoti: DE; DF.

Sprendimas:

BC = AD = 12- lygiagretainio priešingos kraštinės lygios.

S_{ABCD} = AB·DE = BC·DF;

DE = 22,5-DF;

15(22,5-DF) = 12·DF | :3

112,5-5·DF = 4·DF;

9·DF = 112,5;

DF = 12.5;

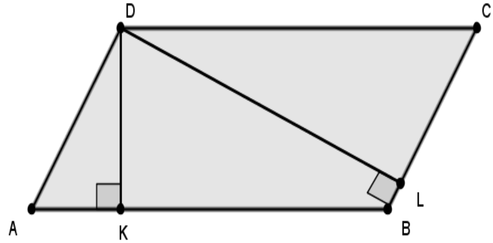
DE = 22.5-12,5 = 10;

Ats.: 10; 12,5.

143. Lygiagretainio kraštinės lygios 10 ir 16. Jo aukštinė nuleista iš tos pačios viršūnės į gretimas kraštines, ilgių skirtumas lygus 5. Apskaičiuokite tų aukštinių ilgius.

Duota: ABCD – lygiagretainis; AD =10; AB = 16; $DK \perp AB$; $DL \perp BC$; $DL - DK = 5$

Apskaičiuoti: DK; DL.



Sprendimas:

BC = AD – lygiagretainio priešingos kraštinės yra lygios.

DL = 5 + DK;

S_{ABCD} = $AB \cdot DK = BC \cdot DC$. Tegul DK = x (x > 0), tada

$16 \cdot x = 10 \cdot (5 + x)$;

$16 \cdot x = 50 + 10 \cdot x$;

$6 \cdot x = 50$

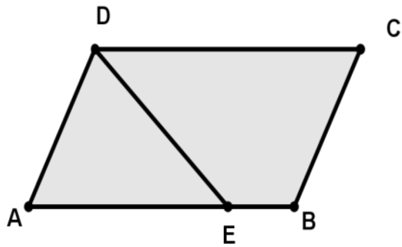
$x = 8\frac{1}{3}$

$DL = 13\frac{1}{3}$

Ats.: $8\frac{1}{3}$; $13\frac{1}{3}$.

144. Dviejų lygiagretainio kampų skirtumas lygus 60^{0}.Jo bukojo kampo pusiaukampinė dalija vieną prieš tą kampą esančią kraštinę santykiu 2:1, skaitant nuo smailiojo kampo viršūnės. Raskite lygiagretainio kraštines, jei jo perimetras lygus 60 cm.

Duota: ABCD – lygiagretainis;
$\angle$ ADE = $\angle$ EDC;
AE : EB = 2 : 1; P_{ABCD} = 60 cm.



Apskaičiuoti: AD; AB.

Sprendimas:

$\angle D + \angle A = 180° - AB \parallel DC,$
AD – kirstinė (vidaus priešiniai).

$\angle D - \angle A = 60°;$

$2 \cdot \angle D = 240°; \angle D = 120°;$

$\angle A = 60°;$

$\angle ADE = \angle EDC = 60°; \angle AED = 60°$

Tai AD = AE=DE; AE $= \frac{2}{3}$AB; AD $= \frac{2}{3}$AB

$P_{ABCD} = 2(AD + AB);$

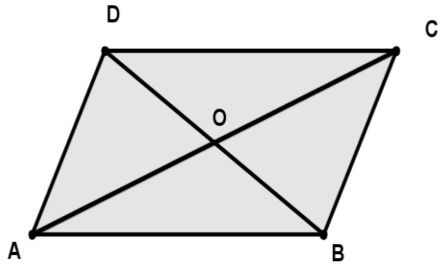
$\frac{2}{3}$AB + AB = 30

$\frac{5}{3}$AB = 30 cm; AB = 18 cm; AD $= \frac{2}{3} \cdot 18 = 12$(cm).

Ats.: 18 cm; 12 cm.

145. Lygiagretainio įstrižainės lygios 14 ir 18, o kampo tarp jų sinusas lygus $\frac{8\sqrt{5}}{21}$. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą.

***Duota*: ABCD - lygiagretainis; DB = 14; AC = 18; $\sin\angle AOD = \dfrac{8\sqrt{5}}{21}$.**



Apskaičiuoti: P_{ABCD}.

Sprendimas:

Lygiagretainio įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau:

$$AO = \frac{1}{2}AC = 9; DO = \frac{1}{2}DB = 7$$

Iš ΔAOD pagal kosinusų teoremą:

$$AD^2 = DO^2 + AO^2 - 2AO \cdot DO \cdot \cos\angle AOD$$

$$\cos\angle AOD = \sqrt{1-\sin^2\angle AOD} = \sqrt{1-\frac{64\cdot 5}{21^2}} = \sqrt{\frac{121}{41}} = \frac{11}{21}$$

$$AD = \sqrt{49+81+2\cdot 9\cdot 7\cdot\frac{11}{21}} = \sqrt{61}$$

$$\cos\angle AOB = \cos(180^\circ - \angle AOD) = -\cos\angle AOD = -\frac{11}{21}$$

Iš ΔAOB pagal kosinusų teoremą:

$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cos\angle AOB$;

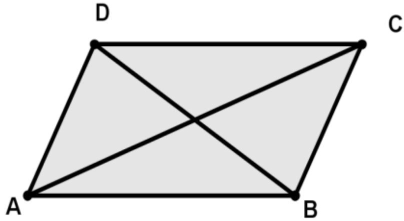
$AB = \sqrt{81 + 49 - 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{11}{21}\right)} = \sqrt{81 + 49 - 66} = \sqrt{196} = 14$;

$P = 2\,(\sqrt{61} + 14) = 2\sqrt{61} + 28$.

Ats.: $28 + 2\sqrt{61}$.

146. Lygiagretainio įstrižainių ilgių kvadratų suma lygi 712, 5 gretimų kraštinių ilgių skirtumas lygus 6. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą.

***Duota*:** ABCD – lygiagretainis;
$AC^2+BD^2 = 712$; AB – AD = 6.



Apskaičiuoti: $P_{ABCD.}$

Sprendimas:

Lygiagretainio įstrižainių
kvadratų suma lygi jo kraštinių kvadratų sumai:

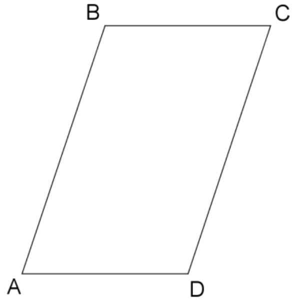
$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$$
$$712 = 2(AB^2 + AD^2)\,|:2$$

Kadangi AB – AD = 6, tai AB = 6 + AD

$$356 = (6 + AD)^2 + AD^2;$$
$$2AD^2 + 12AD - 320 = 0\,|:2;$$
$$AD^2 + 6AD - 160 = 0;$$
$$D = 36 + 640 = 676;$$
$$AD = \frac{-6 + 26}{2} = 10;$$
$$AB = 6 + 10 = 16;$$
$$P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(16 + 10) = 2 \cdot 26 = 52.$$

Ats.: 52.

147. Lygiagretainio perimetras lygus 152 cm. Viena jo kraštinė ilgesnė už kitą 25 cm. Apskaičiuokite lygiagretainio kraštinių ilgius.



Duota: ABCD – lygiagretainis,
P_{ABCD} = 152 cm, AB – BC = 25 cm.

Apskaičiuoti: AB; BC; CD; AD.

Sprendimas:

Jei viena lygiagretainio kraštinė a, kita – b, tai P =2(a + b);

a + b = 76;
a = b + 25;

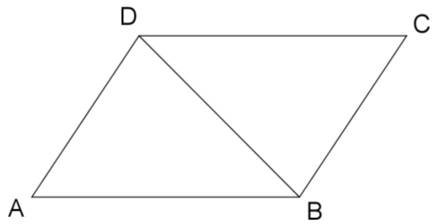
$$+ \begin{cases} a + b = 76 \\ a - b = 25 \end{cases};$$

2a = 101;
a = 50,5;
b = 25,5.

Ats.: 50,5 cm; 25,5 cm.

148. Lygiagretainio kraštinės lygios 4 cm ir 6 cm. Viena iš jo kampų kosinusas lygus $\frac{1}{3}$. Apskaičiuokite lygiagretainio įstrižainės, gulinčios prieš šį kampą, ilgį.

Duota: ABCD – lygiagretainis; AD=4 cm; AB=6 cm; $\cos\angle A = \frac{1}{3}$.



Apskaičiuoti: BD.

Sprendimas:

Pagal sąlyga $\angle A$ – smailus, nes $\cos\angle A = \frac{1}{3} > 0$ (jei $\angle A$ bukas, tai $\cos\angle A < 0$).

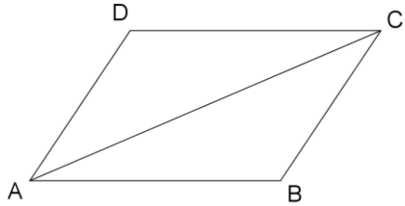
Pagal sąlygą turi būti smailiojo kampo kosinusas, nes bukojo kampo kosinusas yra neigiamas.
Pagal kosinusų teoremą: $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\angle A$;

$BD = \sqrt{16 + 36 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3}} = 6$ (cm).

Ats.: 6cm.

149. Lygiagretainio kraštinės lygios $\sqrt{2}$ ir $\sqrt{5}$, o smailiojo kampo tarp jų sinusas lygus $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. Raskite ilgesniosios įstrižainės ilgį.

Duota: ABCD – lygiagretainis; AD=$\sqrt{2}$; AB=$\sqrt{5}$; sin∠A = $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.



***Apskaičiuoti*:** BD.

Sprendimas:

Iš lygybės $\cos^2\angle A + \sin^2\angle A = 1$;
$\cos^2\angle A = 1 - \sin^2\angle A$;

$\cos\angle A=\sqrt{1-sin^2\angle A}=\sqrt{1-\frac{90}{100}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$;

$\cos\angle B = (180^o - \angle A) = -\cos\angle A = -\frac{\sqrt{10}}{10}$;

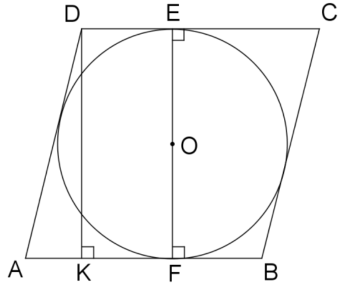
BC = AD = $\sqrt{2}$.

Iš trikampio ABC pagal kosinusų teoremą:
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle A$;

$AC = \sqrt{5+2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}} = \sqrt{7+2} = 3$.

Ats.: 3.

150. Apie skritulį apibrėžtas lygiagretainis, kurio smailusis kampas α. Apskaičiuokite lygiagretainio plotą, kai skritulio plotas lygus 3π ir cos∠α=0,8.



Duota: ABCD – lygiagretainis;
skritulys O**;** $S_o=3\pi$**;** $\angle A=\alpha$;
$\cos\angle\alpha=0{,}8$.

Apskaičiuoti: S_{ABCD}.

Sprendimas:

Jei apie skritulį apibrėžtas keturkampis, tai jo priešingų kraštinių ilgių sumos tarpusavyje lygios: AB+DC=AD+BC;
lygiagretainio priešingos kraštinės lygios: 2AB=2AD; AB=AD, tai ABCD – rombas.

$S_o=\pi\cdot OF^2$; $\pi\cdot OF^2=3\pi$; $OF=\sqrt{3}$;

$EF=2OF=2\sqrt{3}$; $DK \parallel EF$, $DK\perp AB$; $DK=EF=2\sqrt{3}$;

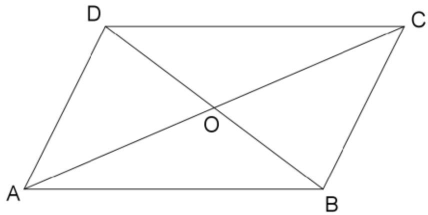
$OF\perp AB$ – liestinė ⊥ spinduliui, lietimosi tašką.

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\angle A}=\sqrt{1-0{,}64}=0{,}6$; Iš stataus trikampio ADK:
$AD=\dfrac{DK}{\sin\alpha}=\dfrac{2\sqrt{3}}{0{,}6}=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$;

$S_{ABCD}=AD^2\cdot\sin\alpha=\dfrac{100*3}{9}\cdot 0{,}6=20.$

Ats.: 20.

151. Lygiagretainio įstrižainės lygios 14 ir 18, o kampo tarp jų kosinusas lygus $\frac{11}{21}$. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą.



Duota: ABCD – lygiagretainis; DB = 14; AC=18; $\cos\angle AOD = \frac{11}{21}$.

Apskaičiuoti: P_{ABCD}.

Sprendimas:

$P_{ABCD}=2(AB+AD) = 2(14+8)=44$;

Iš trikampio AOD: $AD^2=AO^2 + DO^2 - 2 \cdot AO \cdot DO \cdot \cos\angle AOD$;
$AO=\frac{1}{2}AC=9$; $DO=\frac{1}{2}DB=7$

$AD=\sqrt{81 + 49 - 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot \frac{11}{21}}=\sqrt{64}=8$;

Iš trikampio AOB: $AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2 \cdot AO \cdot OB \cdot \cos\angle AOB$;

$\cos\angle AOB= \cos(180^o-\angle AOB)= - \cos\angle AOB= - \frac{11}{21}$;

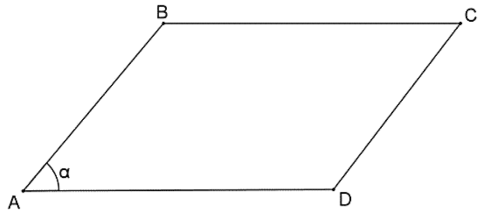
$AB=\sqrt{81 + 49 + 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot \frac{11}{21}} = \sqrt{81 + 49 + 66} = \sqrt{196} = 14$;
$P = 2(14 + 8) = 44$.

Ats.: 44.

152. Dvi lygiagretainio kraštinės lygios 34 ir 10, o kampo tarp jų tangentas lygus $\frac{15}{8}$. Apskaičiuokite lygiagretainio plotą.

Duota: ABCD – lygiagretainis;
$\angle A = \alpha$; AB= 10; AD= 34;
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$.

Apskaičiuoti: S_{ABCD}.



Sprendimas:

Lygiagretainio plotas lygus dviejų kraštinių ir tarp jų esančio kampo sinuso sandaugai.

Iš sąlygos $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$;

Iš lygybės $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ gauname $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$;

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+64}} = \sqrt{\frac{64}{289}} = \frac{8}{17} \ ;$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17}\ ;$$

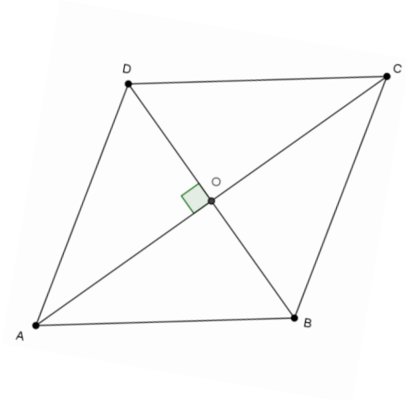
$$S_{\text{ABCD}} = 34 \cdot 10 \cdot \frac{15}{17} = 300.$$

Ats.: 300.

IV skyrius

ROMBAS

153. Kampai, kuriuos sudaro rombo įstrižainės su jo kraštinėmis, sutinka kaip 2:3. Apskaičiuokite rombo kampus.



Duota: rombas ABCD; ∠DAO: ∠ADO=2:3.

Apskaičiuoti: ∠ A; ∠ D.

Sprendimas:

Rombo įstrižainės dalija rombo kampus pusiau; rombo įstrižainės susikerta stačiu kampu;
t.y. AC⊥BD;

$\frac{\angle \text{DAO}}{\angle \text{ADO}} = \frac{2}{3};$

$\angle\text{DAO} = \frac{2}{3}\angle\text{ADO};$ $\angle\text{DAO} + \angle\text{ADO} = 90^{o};$

$\frac{2}{3}\angle\text{ADO} + \angle\text{ADO} = 90^{o};$ $\frac{5}{3}\angle\text{ADO} = 90^{o};$

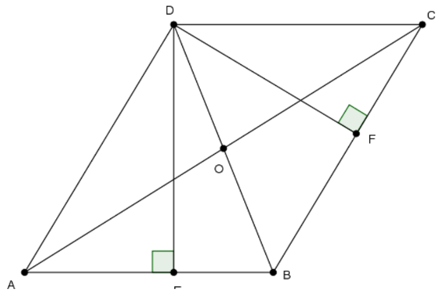
$\angle\text{ADO} = 54^{o};$ $\angle\text{ DAO} = \frac{2}{3}\cdot 54^{0} = 36^{0};$

$\angle\text{A} = 2\angle\text{DAO} = 72^{0};$

$\angle\text{ D} = 2\angle\text{ADO} = 108^{0};$

Ats.: 72^{0}; 108^{0}.

154. Aukštinės, nubrėžtos iš rombo viršūnės, sudaro 30^0 kampą. Apskaičiuokite: a) rombo kampus; b) kampus, kuriuos sudaro rombo įstrižainės su jo kraštinėmis.



Duota: ABCD-rombas; DE⊥ AB; DF⊥BC; ∠EDF=30º.

Apskaičiuoti: a) ∠A; ∠D;
b) ∠DAO; ∠ADO.

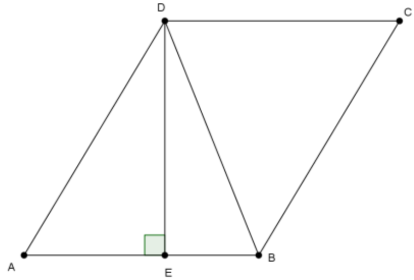
Sprendimas:

a) EDFB - keturkampis; jo kampų suma 360º;
∠DEB = ∠DFB = 90º - duota; ∠EDF=30º - duota;
∠ABC=180º-30º=150º;
∠A=180º-150º=30º;
∠A+∠B=180º.

b) Rombo įstrižainės dalija rombo kampus pusiau.
∠DAO=$\frac{1}{2}$ ∠A = 15º; ∠ADO = $\frac{1}{2}$∠D = 75º.

Ats.: a) 30º; 150º; b) 15º; 75º.

155. Aukštinė, nubrėžta iš rombo bukojo kampo viršūnės, dalija rombo kraštinę pusiau. Apskaičiuokite rombo kampus ir perimetrą, jei trumpesnioji jo įstrižainė lygi 2cm.



Duota: ABCD - rombas;
DE ⊥ AB; AE = EB;
DB = 2cm.

Apskaičiuoti: ∠A; ∠D; P_{ABCD}.

Sprendimas:

Status ΔADE = stačiam ΔDEB – pagal statinius (AE=EB – duota, DE – bendra);

AD=DB=2cm;

Rombo kraštinės yra lygios, vadinasi AB=2cm;

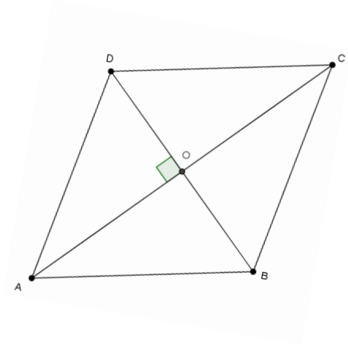
P_{ABCD} = 4AD = 8cm;

ΔADB – lygiakraštis;

∠A=60º; ∠D=180º-∠A=120º.

Ats.: 60º; 120º; 8cm.

156. Rombo trumpesnė įstrižainė lygi 6cm, o smailusis kampas 60^0. Apskaičiuokite kitą rombo įstrižainę, perimetrą ir plotą.



Duota: ABCD – rombas; BD = 6cm; $\angle A=60^0$.

Apskaičiuoti: AC; PABCD; SABCD.

Sprendimas:

$\angle A + \angle D = 180^o$;
$\angle D = 120^o$; $\angle ADB = 60^o$;

ΔABD – lygiakraštis;

AB = AD = 6cm; $P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 24$(cm);

Rombo įstrižainės susikerta stačiu kampu ir susikirsdamos dalijasi pusiau. $OB=\frac{1}{2}DB=3$cm;

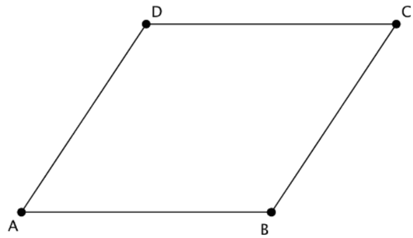
Iš stataus ΔAOB: $AO^2=AB^2-OB^2$
$AO = \sqrt{6^2-3^2}=\sqrt{27}=\sqrt{9\cdot 3}=3\sqrt{3}$ (cm)

$AC = 2AO=6\sqrt{3}$ (cm);

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC\cdot BD = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 6 = 18\sqrt{3}$ (cm^2).

Ats.: $6\sqrt{3}$ cm; 24 cm; $18\sqrt{3}$ cm^2.

157. Apskaičiuokite rombo kampus, jei jo perimetro ir kvadrato santykis su jo plotu lygus 32.



Duota: ABCD – rombas;

$\frac{(P_{ABCD})^2}{S_{ABCD}} = 32.$

Apskaičiuoti: $\angle A, \angle B.$

Sprendimas:

$P_{ABDC} = 4 \cdot AB;$

$S_{ABCD} = AB^2 \cdot \sin\angle A;$

$\frac{(4AB)^2}{AB^2 \cdot \sin<A} = 32;\qquad \frac{16AB^2}{AB^2 \cdot \sin<A} = 32;$

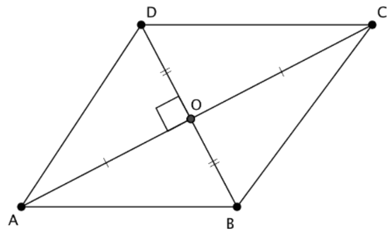
$\sin\angle A = \frac{1}{2};\quad \angle A = 60°;$

$\angle A + \angle D = 180°(\ \angle A \text{ ir } \angle D \text{ vienašaliai});$

$\angle D = 180° - \angle A = 180° - 60° = 120°.$

Ats.: $60°; 120°.$

158. Apskaičiuokite rombo plotą, jei: a) jo kraštinė lygi 20 cm, o viena įstrižainė 24 cm; b) jo kraštinė lygi 10 cm, o viena įstrižainė 16 cm.



Duota: ABCD – rombas;
a) AB = 20 cm, AC = 24 cm;
b) AB = 10 cm, AC = 16cm;

Apskaičiuoti: S_{ABCD};

Sprendimas:

AC ⊥ BD, AO = OC, DO = OB (rombo savybės).

a) $AO = \frac{1}{2}AC = 12$ (cm); iš stataus ΔAOB: $OB^2 = AB^2 - AO^2$;

$OB = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ (cm)
$DB = 2OB = 32$ (cm) ;

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 32 = 384 \text{ (cm}^2\text{)}$$

b) $AO = \frac{1}{2}AC = 8$ (cm); iš stataus ΔAOB: $OB^2 = AB^2 - AO^2$;

$OB = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (cm);

$DB = 2OB = 12$ (cm);

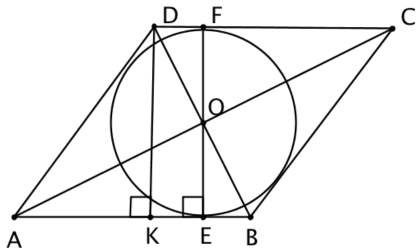
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 96 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Ats.: 384 cm²; 96 cm².

159. Į rombą, kurio smailusis kampas lygus 30°, įbrėžtas skritulys. Apskaičiuokite rombo plotą, jei skritulio plotas lygus 9π cm².

Duota: ABCD – rombas; $\angle A = 30°$; $S_{skrit} = 9\pi\ (cm^2)$.

Apskaičiuoti: S_{ABCD}.



Sprendimas:

$S_o = \pi OE^2 = 9\pi; OE^2 = \frac{S}{\pi}$;

$OE^2 = \frac{9\pi}{\pi} = 9;$

$OE = 3$ (cm);

$OE \perp AB$ - liestinė stati spinduliui lietimosi taške.

$DK \perp AB$; $DK \parallel EF$;

$DK = EF$ (atstumas tarp dviejų tiesių);

$DK = 2OF = 6$ (cm);

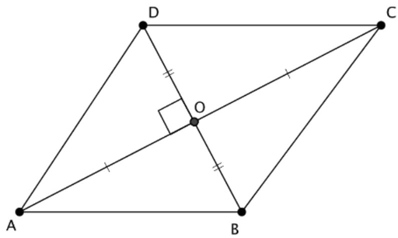
DK - rombo aukštinė.

Iš stataus ΔADK: $\sin\angle A = \frac{DK}{AD}$; $AD = \frac{DK}{\sin 30°}$; $\frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$ (cm).

$$S_{ABCD} = AD^2 \cdot \sin\angle = 12^2 \cdot \sin 30° = 144 \cdot \frac{1}{2} = 72\ (cm^2).$$

Ats.: 72 cm².

160. Rombo, kurio plotas lygus 24 cm^2, viena įstrižainė lygi 5 cm. Apskaičiuokite rombo kraštinę.



Duota: ABCD – rombas;

$S_{ABCD} = 24\ cm^2$; BD = 6 cm.

Apskaičiuoti: AB.

Sprendimas:

$\mathrm{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}\mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD}$; $\frac{1}{2}\mathrm{AC} \cdot 6 = 24$; $\mathrm{AC} = 8$ (cm);

Rombo įstrižainės susikirsdamos dalijasi pusiau.

$\mathrm{AO} = \frac{1}{2}\mathrm{AC} = 4$ (cm);

$\mathrm{BO} = \frac{1}{2}\mathrm{BD} = 3$ (cm);

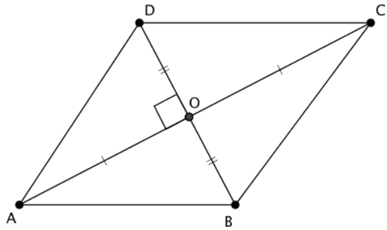
$\mathrm{AC} \perp \mathrm{BD}$;

Iš stataus ΔAOB: $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AO}^2 + \mathrm{BO}^2$; $\mathrm{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (cm).

Ats.: 5 cm.

161. Rombo plotas lygus 480cm², o jo įstrižainių santykis – 5:12. Apskaičiuokite rombo perimetrą.

Duota: ABCD – rombas;
S_{ABCD}=480cm²; BD:AC=5:12.



Apskaičiuoti: $P_{ABCD.}$

Sprendimas:

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}DB\cdot AC$; $\frac{BD}{AC}=\frac{5}{12}$; $BD=\frac{5}{12}AC$

$480=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{12}AC\cdot AC$; $\frac{5}{24}AC^2=480$; AC=48 cm²;

$BD=\frac{5}{12}\cdot 48=20$(cm);

$CA\perp BD$; $AD=\frac{1}{2}AC=24$; $OB=\frac{1}{2}BD=10$ – rombo savybė.

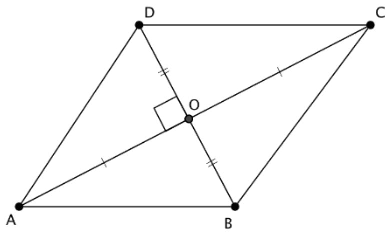
Iš stataus ΔAOB: $AB^2=AD^2+OB^2$;

$AB=\sqrt{24^2+10^2}=26$(cm).

$P_{ABCD}=4\cdot AB=4\cdot 26=104$ (cm).

Ats.: 104cm.

162. Rombo perimetras lygus 80cm, o jo įstrižainių santykis – 3:4. Apskaičiuokite rombo plotą.



Duota: ABCD – rombas;
P_{ABCD} = 80cm; BD:AC=3:4

Apskaičiuoti: $S_{ABCD.}$

Sprendimas:

$AC \perp BD$; $AO = \frac{1}{2}$ AC; OB = $\frac{1}{2}$

BD - rombo savybė.
P_{ABCD} = 4AB; 4AB = 80cm; AB = 20cm;

Iš stataus ΔAOB: $AB^2 = AO^2 + OB^2$;

$\frac{BD}{AC} = \frac{3}{4}$; $\frac{2OB}{2AO} = \frac{3}{4}$; $\frac{OB}{AO} = \frac{3}{4}$; $OB = \frac{3}{4}$ AO;

$DO^2 = AO^2 + (\frac{3}{4}AO)^2$;

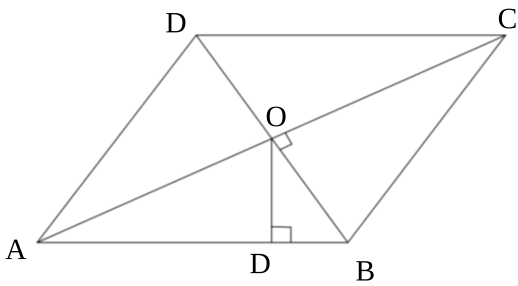
$400 = \frac{25}{16}AO^2$; AO = 16 cm ; $OB = \frac{3}{4} \cdot 16 = 12$(cm);

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} 2 \cdot AO \cdot 2 \cdot OB = 16 \cdot 2 \cdot 12 = 384$ (cm^2)

Ats.: $384cm^2$.

163. Viena rombo įstrižainė lygi 60cm, kraštinė 50cm. Apskaičiuokite įbrėžto į rombą skritulio spindulio ilgį.

Duota: ABCD – rombas;
BD = 60cm; AB = 50cm,
skritulys O; OD = R.



Apskaičiuoti: R.

Sprendimas:

OD ⊥ AB – liestinė
statmena spinduliui, nubrėžtam į liestinės tašką. Į rombą įbrėžto skritulio skersmuo OB = 30cm, yra lygus rombo aukštinei.
EF – rombo aukštinė.

$OE = \frac{1}{2}EF;$

Iš stataus ΔAOB:
$AO^2 = AB^2 – OB^2;$
$AO^2 = 50^2 - 30^2 = 40^2;$
AO = 40cm.

$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB;$

$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OE;$

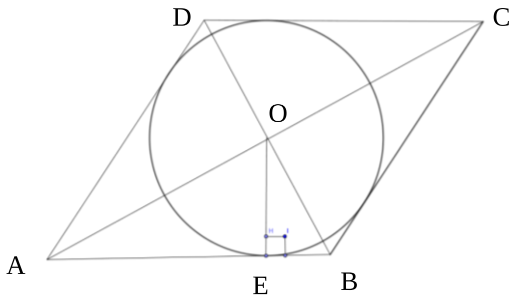
$AO \cdot OB = AB \cdot OE;$
$40 \cdot 30 = 50 \cdot OE;$
OE = 24.

Ats.: 24cm.

164. Rombo įstrižainė lygi 65. Į rombą įbrėžto skritulio spindulys lygus 30. Apskaičiuokite rombo perimetrą.

Duota: ABCD – rombas;
BD = 65; skritulys O;
OD $\perp$ AB; OE = R = 30.

Apskaičiuoti: $P_{ABCD.}$



Sprendimas:

OD $\perp$ AB – liestinė statmena spinduliui, nubrėžtam į liestinės tašką.

Rombo įstrižainės AC $\perp$ BD. $OB=\frac{1}{2}BD=\frac{65}{2}$;

Iš stataus ΔOBD: $BD^2=OB^2-OD^2$;

$BE=\sqrt{\left(\frac{65}{2}\right)^2-30^2}=\sqrt{2.5\cdot 62.5}=12.5$

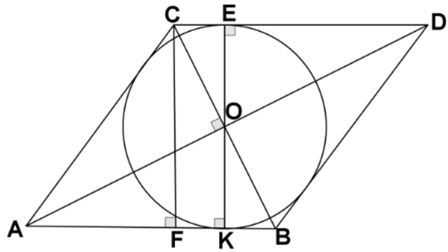
$OD^2 = AE\cdot BE$; $AE=\frac{OD^2}{BD}=\frac{900}{12.5}=72$;

AB = AE + BE = 84.5;
$P_{ABCD} = 4AB = 4\cdot 84.5 = 338$.

Ats.: 338.

165. Rombo smailusis kampas lygus 30°. Įbrėžto į rombą skritulio spindulys lygus $\sqrt{5}$. Apskaičiuokite rombo plotą.

Duota: rombas ABCD;
∠A = 30°; skritulys O;
OK ⊥ AB; OK = R = $\sqrt{5}$.



Apskaičiuoti: S_{ABCD}.

Sprendimas:

CF – rombo aukštinė, tai CF⊥ AB;

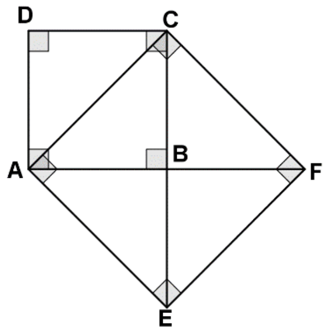
Į rombą įbrėžto skritulio skersmuo yra rombo aukštinė CF = 2;
OK = $2\sqrt{5}$;

Iš stataus ΔACF: AC = 2 CF = $4\sqrt{5}$;

$S_{ABCD} = AC^2 \cdot \sin \angle A = 16 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 40.$

Ats.: 40.

166. Duotas kvadratas, kurio kraštinė 1 m, jo įstrižainė yra kito kvadrato kraštinė. Raskite antro kvadrato įstrižainę.



Duota: kvadratai: ABCD ir AEFC;
AB = 1 m.

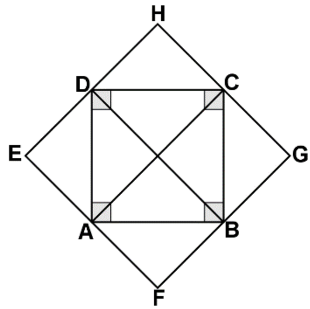
Apskaičiuoti: AF.

Sprendimas:

AF = 2 · AB = 2 m.

Ats.: 2 m.

167. Kvadrato įstrižainė lygi 12 cm. Per kvadrato viršūnę nubrėžtos tiesės lygiagrečios su jo įstrižainėmis. Pasakykite gauto keturkampio rūšį ir raskite jo perimetrą.



Duota: ABCD – kvadratas;
AC = 12 cm; EH ∥ AC ∥ FG; EF ∥ DB ∥ HG.

Apskaičiuoti: P_{EFGH}.

Sprendimas:

AC ⊥ BD, EH ∥ AC ∥ FG – duota sąlygoje, tai EH ⊥ HG ir

FG ⊥ HG;

Atstumai tarp lygiagrečių tiesių, tai EF = DB = HG;

Analogiškai FE ⊥ EH ir GH ⊥ EH, vadinasi EHGF – kvadratas.

$P_{EFGH} = 4\ EF = 4 \cdot AC = 4 \cdot 12 = 48$ (cm)

Ats.: 48 (cm).

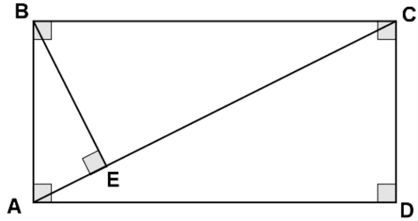
V skyrius

STAČIAKAMPIS

168. Statmuo, nuleistas iš stačiakampio stačiojo kampo viršūnės į įstrižainę, dalija statųjį kampą santykiu 2 : 3. Raskite kampus, kuriuos sudaro stačiakampio įstrižainės su jo kraštinėmis.

Duota: ABCD – stačiakampis;
BE ⊥ AC;
∠ABE : ∠EBC = 2 : 3.

Apskaičiuoti: ∠BAC; ∠BCA.



Sprendimas:

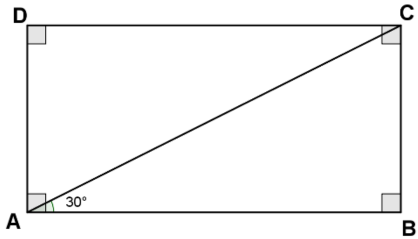
Iš viso lygių dalių 2 + 3 = 5, tai ∠ABE = $\frac{2}{5}$ ∠ABE = $\frac{2}{5} \cdot 90° = 36°$;

∠EBC = 90° - ∠ABE = 90° - 36° = 54°;

∠BCA = 90° - ∠BAC = 90° - 54° = 36°.

Ats.: 54°; 36°.

169. Stačiakampio įstrižainė lygi 20 cm ir su pagrindu sudaro 30° kampą. Apskaičiuokite stačiakampio perimetrą.



Duota: ABCD – stačiakampis;
AC = 20 cm; ∠CAB = 30°.

Apskaičiuoti: P_{ABCD}.

Sprendimas:

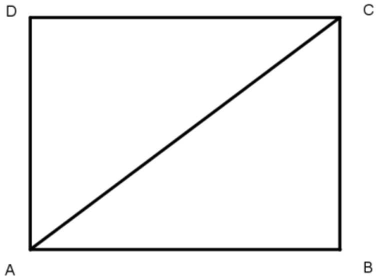
BC = $\frac{1}{2}$ AC = 10 cm – statinio prieš 30° kampą savybė;

cos ∠CAB = $\frac{AB}{AC}$; AB = AC · cos 30° = 20 · $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $10\sqrt{3}$;

P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(10 + $10\sqrt{3}$) = 20 + $20\sqrt{3}$ (cm).

Ats.: 20 + $20\sqrt{3}$ (cm).

170. Stačiakampio perimetras 14 m, o plotas- 12 m^2. Apskaičiuokite stačiakampio įstrižainę.



Duota: ABCD- stačiakampis;
P_{ABCD}= 14m; S_{ABCD}=12m^2.

Apskaičiuoti: AC.

Sprendimas:

$P_{ABCD} = 2(AB + CB)= 14;$

$AB + CB= 7;$

Tegul AB = x m (x > 0), tada CB = 7-x (m)

$S_{ABCD} = AB \cdot CB= 12;$

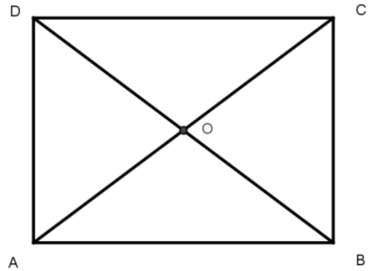
$x \cdot (7-x) =12; x^2 -7x +12 =0,$

Pagal Vijeto teorema iš stataus trikampio ABC.

Pagal Pitagoro teoremą $AC^2 = AB^2 + BC^2$;
$AC^2 = 16+9 = 25$ (m^2), AC = 5 m.

Ats.: 5m .

171. Stačiakampio įstrižainė susikerta 50˚ kampu. Apskaičiuokite kampus tarp stačiakampio įstrižainės ir jos kraštinių



Duota: ABCD- stačiakampis;
$AC \cap BD = O$; $\angle DAC = 50^\circ$.

Apskaičiuoti: $\angle DAC$; $\angle CAB$.

Sprendimas:

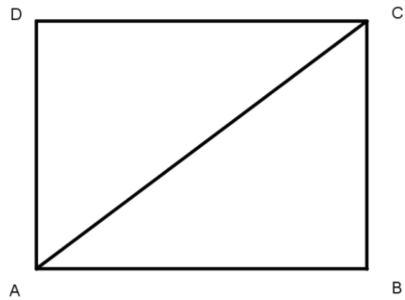
Stačiakampio įstrižainės yra lygios ir susikirsdamos dalijasi pusiau, todėl $\triangle DOA$- lygiašonis.

$\angle OAD = \angle ODA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOD) = \frac{1}{2}(180^\circ - 50^\circ) = 65^\circ$;
$\angle A = 90^\circ$;
$\angle CAB = 90^\circ - \angle DAO = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$.

Ats.: 65°; 25°.

172. Apskaičiuokite stačiakampio plotą, jai vien jo kraštinė sutinka su įstrižaine kaip 3:5, o kita kraštinė lygi 8cm.

Duota: ABCD- stačiakampis;
AB=8cm; BC : AC= 3:5.



Apskaičiuoti: S_{ABCD}.

Sprendimas:

$\frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$;

$AC=\frac{5}{3}BC$;

Iš stataus ΔABC: $AC^2 = AB^2 + BC^2$;
$\frac{25}{9}BC^2 = 64 + BC^2$;
$\frac{16}{9}BC^2 = 64$; $BC^2 = 36$; $BC = \pm 6$; $BC = 6$.

$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 8 \cdot 6 = 48\ (cm^2)$

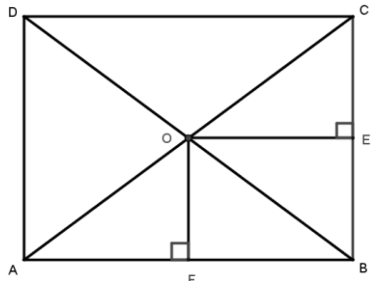
Ats.: $48cm^2$.

173. Statmenys, nuleisti iš stačiakampio įstrižainių susikirtimo taško į jo kraštines, atitinkamai lygūs 4cm ir 6cm. Apskaičiuokite stačiakampio perimetrą.

Duota: stačiakampis ABCD;
$AC \cap BD = O$; $OE \perp BC$;
$OF \perp AB$; $OE = 6cm$; $OF = 4cm$.

Apskaičiuoti: P_{ABCD}.

Sprendimas:



Stačiakampio įstrižainių susikirtimo taškas yra jo simetrijos centras.
Todėl $AB = 2OE = 12cm$.

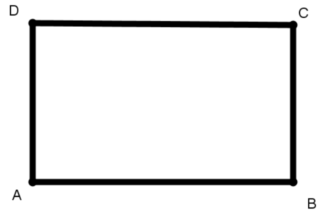
$BC = 2OF = 8cm$;
$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(12+8) = 40$ (cm).

Ats.: 40 cm.

174. Stačiakampio kraštinių santykis yra 4:9, o plotas 144 cm^2. Apskaičiuokite stačiakampio kraštinių ilgius.

Duota: ABCD – stačiakampis; BC:AB = 4:9; S_{ABCD} = 144 cm$^{2;}$

Apskaičiuoti: AB, BC.



Sprendimas:

$\frac{BC}{AB} = \frac{4}{9}$; BC = $\frac{4}{9}$ AB;

S_{ABCD} = AB · BC = AB · $\frac{4}{9}$ AB = 144

$AB^2 = 144 \cdot \frac{9}{4}$;

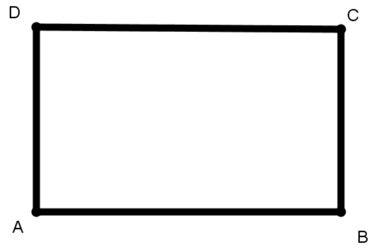
AB = 18;

BC = $\frac{4}{9} \cdot 18 = 8$.

Ats.: 18cm; 8cm.

175. Stačiakampio perimetras lygus 74dm, o plotas – 300dm^2. Apskaičiuokite stačiakampio kraštinių ilgius.

Duota: ABCD – stačiakampis;
P_{ABCD} = 74dm; S_{ABCD} = 300dm^2.



Apskaičiuoti: AB; BC.

Sprendimas:

$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 74$

$AB + BC = 37$

$AB = 37 – BC$; (1)

$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 300$; (2)

$BC = x$, $(x > 0)$

(1) įsistatome į (2): $(37 – x) \cdot x = 300$

$x^2 – 37x + 300 = 0$

$D = (-37)^2 – 4 \cdot 1 \cdot 300 = 1369 – 1200 = 169 = 13^2$

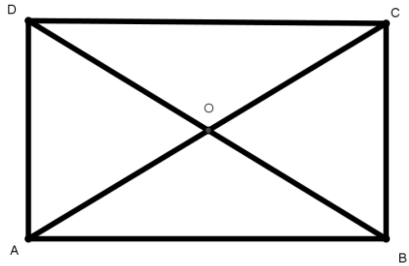
$x = \frac{37 \pm 13}{2}$; $x_1 = 20$; $x_2 = 12$.

Pagal brėžinį BC trumpesnė už AB, todėl BC = 12, o AB = 37 – 12 = 25.

Ats.: 25dm; 12dm**.**

176. Stačiakampio plotas lygus 12, o jo įstrižainių sudaromo kampo sinusas lygus 0,2. Raskite stačiakampio perimetrą.

Duota: ABCD – stačiakampis;
SABCD = 12; AC ∩ BD = O;
sin ∠AOD = 0,2.



Apskaičiuoti: $P_{ABCD.}$

Sprendimas:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin \angle AOD = 12;$

$AC = BD;\ \frac{1}{2}AC^2 \cdot 0{,}2 = 12;\quad AC = 2\sqrt{30};$

Stačiakampio įstrižainės lygios ir susikirsdamos dalijasi pusiau, todėl:

$AO = DO = \frac{1}{2}AC = \sqrt{30};$

Iš ΔAOD pagal kosinusų teoremą:

$AD^2 = AO^2 + DO^2 - 2AO \cdot DO \cdot \cos \angle AOD;$

$\cos \angle AOD = \sqrt{1 - sin^2\angle AOD} = \sqrt{1 - 0{,}04} = 0{,}4\sqrt{6};$

$(\angle AOD < 90°)$

$AD = \sqrt{30 + 30 - 2 \cdot 30 \cdot 0{,}4\sqrt{6}} = \sqrt{60 - 24\sqrt{6}};$

Iš ΔAOB pagal kosinusų teoremą:

$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos \angle AOB;$

$\cos \angle AOB = \cos(180° - \angle AOD) = -\cos \angle AOD = -0{,}4\sqrt{6};$

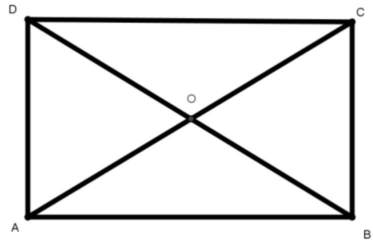
$AB = \sqrt{30 + 30 - 2 \cdot 30 \cdot (-0{,}4\sqrt{6})} = \sqrt{60 + 24\sqrt{6}}$;

$P_{ABCD} = 2(AD + AB) = 2(\sqrt{60 - 24\sqrt{6}} + \sqrt{60 + 24\sqrt{6}})$;

Ats.: $2(\sqrt{60 - 24\sqrt{6}} + \sqrt{60 + 24\sqrt{6}})$.

177. Stačiakampio perimetras lygus 48, o jo įstrižainių sudaromo kampo sinusas lygus 0,44. Apskaičiuokite stačiakampio įstrižainės ilgį.

Duota: ABCD – stačiakampis;
$P_{ABCD} = 48$; $AC \cap BD = O$;
$\sin \angle AOD = 0{,}44$;



Apskaičiuoti: AC.

Sprendimas:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle AOD$;

AC = BD, tai:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle AOD = \frac{1}{2} AC^2 \cdot 0{,}44 = 0{,}22\ AC^2$; *(1)*

P = 2(AD + DC); AD + DC = 24, todėl DC = 24 – AD;

$S_{ABCD} = AD \cdot DC = AD \cdot (24 - AD)$; *(2)*

Iš (1) ir (2) lygybių: $0{,}22\ AC^2 = AD \cdot (24 - AD)$; *(3)*

ΔADC – status, $AC^2 = AD^2 + DC^2 = AD^2 + (24 - AD)^2 = AD^2 + 576 - 48AD + AD^2 = 2AD^2 - 48AD + 576$;

Tegul AD = x (x > 0), tada iš (3) lygybės:

$0{,}22 \cdot (2x^2 - 48x + 576) = x\,(24 - x)\ |\cdot 50$

$11 \cdot (2x^2 - 48x + 576) = 50x\,(24 - x)$

$22x^2 - 528x + 6336 = 1200x - 50x^2$

$72x^2 - 1728x + 6336 = 0 \mid :72$

$x^2 - 24x + 88 = 0$

$D = 24^2 - 4 \cdot 88 = 576 - 352 = 224$

$x_1 = \frac{24 - \sqrt{224}}{2} = 12 - 2\sqrt{14};$

$x_2 = 12 + 2\sqrt{14};$

Tai $AD = 12 - 2\sqrt{14}$ arba $AD = 12 + 2\sqrt{14}$

$DC = 24 - (12 - 2\sqrt{14}) = 12 + 2\sqrt{14}$ arba $DC = 24 - (12 + 2\sqrt{14}) = 12 - 2\sqrt{14}$

Stačiakampio kraštinės tada $(12 + 2\sqrt{14})$ ir $(12 - 2\sqrt{14})$, o įstrižainė:

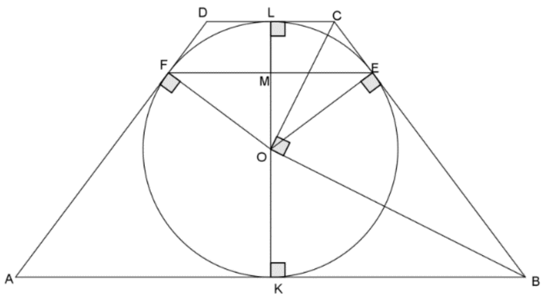
$AC = \sqrt{(12 + 2\sqrt{14})^2 + (12 - 2\sqrt{14})^2} = \sqrt{288 + 112} = \sqrt{400} = 20;$

Ats.: 20**.**

VI skyrius

TRAPECIJA

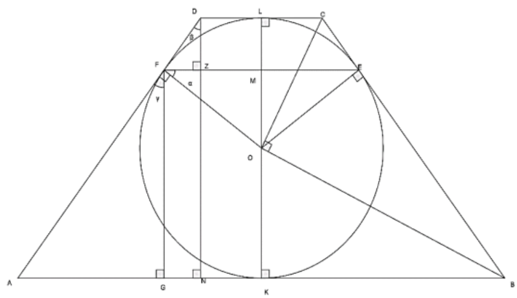
178. Apie apskritimą, kurio spindulys 10 cm, apibrėžta lygiašonė trapecija. Atstumas tarp šoninių kraštinių lietimosi su apskritimu taškų lygus 15 cm. Apskaičiuokite trapecijos plotą.



Duota: ABCD - trapecija; Apskritimas OOE = OF = R = 10cm; DC||AB; AD = BC; OF⊥AD; OE⊥BC; FE = 15cm.

Apskaičiuoti: S_{ABCD}.

Sprendimas:
Nusibrėžiame papildomų linijų.



KL-skersmuo; KM·ML=FM·ME (stygų savybė);
KL⊥DC; Tegul LM = x cm (x > 0).

Tada (20-x)·x =8· 8;
$x^2 - 20x + 64 = 0$; $x_1 = 4$; $x_2 = 16$.

Pagal brėžinį: LM = 4 cm ; MK= 16 cm

ME = $\frac{1}{2}$FE = 8cm

Iš stataus Δ OME: $OM^2 = OE^2 - ME^2$;

OM=$\sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

cosα = cosβ = cosγ= $\frac{FM}{OF} = \frac{8}{10}$ = 0,8; cosγ = $\frac{DZ}{FD}$;

DZ = LM = 4cm; 0,8 = $\frac{4}{FD}$; FD = $\frac{4}{0,8} = \frac{40}{8} = 5$cm;

$FZ^2 = FB^2 - DZ^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$; FZ =3cm;

DC = FE - 2·FZ = 16 - 2·3 = 10 (cm);

cosβ = $\frac{FG}{FA}$; 0,8 = $\frac{16}{FA}$; FA = $\frac{16}{0,8} = 20$cm;

$AG^2 = FA^2 - FG^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144$;

AG = 12cm;

AK = AG + FM = 12 + 8 = 20 (cm);

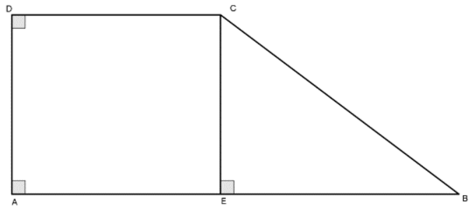
AB = AK + KB = 40cm

$$S_{ABCD} = \frac{DC + AB}{2} \cdot LK = \frac{10 + 40}{2} \cdot 20 = 25 \cdot 20 = 500(cm^2).$$

Ats.: $500cm^2$.

179. Stačiakampės trapecijos didesniojo pagrindo ilgis lygus 15cm; pasvirosios šoninės kraštinės ilgis 10cm; smailiojo kampo kosinusas lygus 0,8. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

Duota: ABCD-trapecija;
CD||AB; AB=15cm;
CB=10cm; cos∠B=0,8



Apskaičiuoti: S_{ABCD}

Sprendimas:

CE⊥AB; Iš stataus trikampio BCE: ; cos∠B = $\frac{EB}{CB}$;

EB = CB· cos∠B = 10·08=8 (cm);

AE = AB – EB = 15 – 8 = 7;
DC = AE = 7, nes DCAE - stačiakampis;
CE = CB· sin∠B;

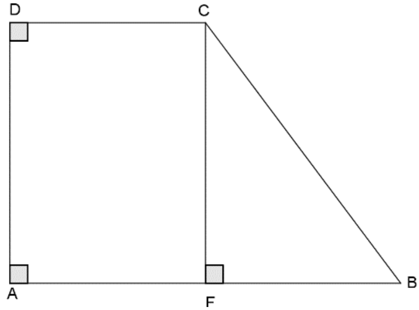
sin∠B=$\sqrt{1-cos^2\angle B}$=$\sqrt{1-0{,}64} = 0{,}6$;

CE=10·0.6=6 (cm);
$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD)\cdot$ CE $= \frac{1}{2} + (15 + 7)\cdot 6 = 66(cm^2)$

Ats.: $66cm^2$.

180. Stačiakampės trapecijos aukštinė lygi 8, o plotas lygus 96. Apskaičiuokite trapecijos perimetrą, kai pagrindų ilgių skirtumas lygus 6.

Duota: ABCD- trapecija; AB||CD, AD⊥AB; AD=8; $S_{ABCD} = 96$; AB-DC =6**.**



Apskaičiuoti: $\mathbf{P_{ABCD}}$

Sprendimas:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot AD$; CF⊥AB;

FB=AB-DC=6; CF=AD=8;

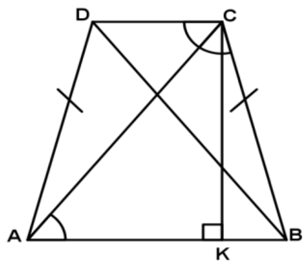
ΔCFB – status, tai $CB^2 = CF^2 + FB^2$; CB=$\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

P_{ABCD}=AB + DC + AD + CB = 24 + 8 + 10 = 42.

Ats.: 42.

181. Lygiašonės trapecijos įstrižainė dalija jos bukąjį kampą pusiau. Mažesnysis trapecijos pagrindas lygus 3cm, o perimetras 42cm. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

Duota: trapecija ABCD;AD = BC;
∠ACD = ∠ACB; DC = 3cm;
P_{ABCD} = 42cm.



Apskaičiuoti: S_{ABCD}

Sprendimas:

DC ‖ AB , tai ∠ACD = ∠ACB, bet
∠ACD = ∠ACB – duota, todėl ∠ACD = ∠ACB;

ΔABC – lygiašonis, tai AB = CB; CB = AD – duota;

P_{ABCD} = DC + 3AB; 3AB = 42 – 3; AB = 13cm;

CK ⊥ AB; KB = $\frac{1}{2}$ (AB – DC) = $\frac{1}{2}$ (13 – 3) = 5cm;

ΔKCB : $CK^2 = CB^2 - KB^2$;

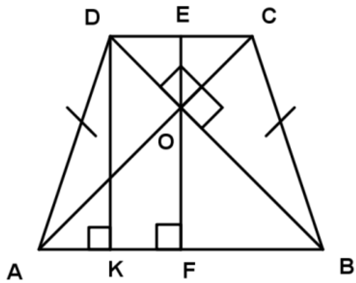
CK = $\sqrt{13^2 - 5^2}$ = 12cm;

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}$ (AB + DC) ·CK = $\frac{1}{2}$ (13 + 3) ·12 = 96 (cm^2)

Ats.: 96 cm^2.

182. Apskaičiuokite lygiašonės trapecijos plotą, jeigu jos įstrižainės viena kitai statmenos, o aukštinė lygi 3cm.

Duota: trapecija ABCD;AD = BC; AC ⊥ DB; DK ⊥ AB; DK = 3cm.



Apskaičiuoti: $S_{ABCD.}$

Sprendimas:

Nubrėžiu *EF* ⊥ *AB*, tai *EF* = *DK* = 3cm;

ΔDOC – status lygiašonis ir DE = EO.

Analogiškai OF = AF, tai EO + OF = DE + AF;

EF = $\frac{1}{2}$ (DC +AB).

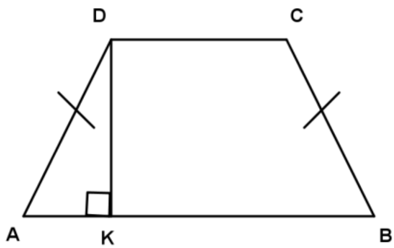
S_{ABCD} = $\frac{1}{2}$ (DC +AB) ·EF = EF^2 = DK^2 = 9 (cm).

Ats.: 9 cm^2.

183. Lygiašonės trapecijos pagrindai ir šoninė kraštinė sutinka kaip 10:4:5. Trapecijos plotas lygus 112 cm^2. Apskaičiuokite trapecijos perimetrą.

Duota: *ABCD* – trapecija; *AD* = *CB*; *AB*:*DC*:*AD* = 10:4:5; S_{ABCD} = 112 cm^2

Apskaičiuoti: P_{ABCD}



Sprendimas:

DK ⊥ AB; Tegul viena atkarpos dalis yra x (x > 0). AB = 10x; DC = 4x: AD = 5x;

AK = $\frac{1}{2}$ (AB – CD) = 3x; S_{ABCD} = $\frac{1}{2}$ (AB+DC) ·DK;

Iš stataus ΔADK:$DK^2 = AD^2 - AK^2$;
DK = $\sqrt{25x^2 - 9x^2} = 4x^2$; $\frac{1}{2}$ (10x + 4x) · 4x = 112;

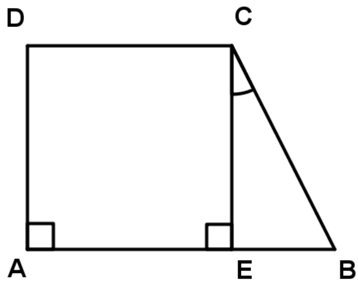
$28x^2 = 112$; $x^2 = 4$; x = 2cm; AB = 20 cm; DC = 8 cm; AD = 10 cm;

P_{ABCD} = AB + DC + 2 · AD = 20 + 8 + 2 · 10 = 48 cm

Ats.: 48 cm.

184. Stačiakampės trapecijos šoninė kraštinė lygi mažesniajam pagrindui ir sudaro su juo 120° kampą. Apskaičiuokite trapecijos plotą, jei didesnysis pagrindas lygus $3\sqrt{3}$.

Duota: trapecija ABCD;
$AD \perp AB$; $CB = CD$; $\angle C = 120^\circ$;
$AB = 3\sqrt{3}$.



Apskaičiuoti: S_{ABCD}.

Sprendimas:

$CE \perp AB$; $\angle ECB = 30^\circ$; $EB = \frac{1}{2}$ CB; $AE = DC = CB$;

$AB = AE + EB = CB + \frac{1}{2} CB = 1{,}5CB$; $1{,}5CB = 3\sqrt{3}$; $CB = 2\sqrt{3}$;

$DC = 2\sqrt{3}$;

Iš stataus ΔCEB:

$CE = CB \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$;

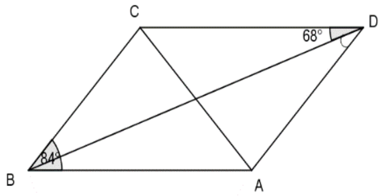
$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot CE = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) \cdot 3 = 7.5\sqrt{3}$.

Ats.: $7{,}5\sqrt{3}$.

185. Lygiagretainio ABCD įstrižainė BD sudaro su kraštine CD kampą lygų 68°. ∠ABC=84°. Raskite ∠ADB ir ∠BCD .

Duota: ABCD - lygiagretainis;
∠BDC=68°; ∠ABC=84°.

Apskaičiuoti: ∠ADB; ∠BCD.



Sprendimas:

∠ABC+ ∠BCD=180° - lygiagretainio kampų prie vienos kraštinės suma 180° ($DC \parallel AB, CB$ kirstinė; o šie kampai vidaus priešiniai. Jų suma 180°)

∠BCD = 180° - 84°=96°;

∠D = ∠B = 84°;

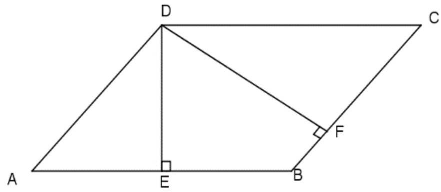
∠D = ∠ADB + ∠BDC = 84°;

∠ADB = 84° - 68° = 16°.

Ats.: 16°; 96°.

186. Lygiagretainio kraštinės lygios 6 cm ir 4 cm. Viena aukštinė lygi 5 cm. Raskite kitą aukštinę.

Duota: lygiagretainis ABCD; AB = 6 cm; AD = 4 cm; DF = 5 cm; DE ⊥ AB; DF ⊥ BC.



Apskaičiuoti: DE.

Sprendimas:

$S_{ABCD} = AB \cdot DE = BC \cdot DF$;

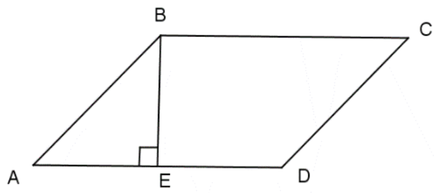
BC = AD = 4 cm - lygiagretainio priešingos kraštinės lygios.

$6 \cdot DE = 4 \cdot 5$;

$DE = \frac{20}{6} = 3\frac{1}{3}$ (cm).

Ats.: $3\frac{1}{3}$ cm.

187. Lygiagretainio aukštinė, nuleista į vieną kraštinę, yra 3 kartus trumpesnė už tą kraštinę. Lygiagretainio plotas lygus 48 cm² . Apskaičiuokite kraštinės ir aukštinės ilgius.



Duota: ABCD – lygiagretainis; $S_{ABCD} = 48\ cm^2$; $AD = 3BE$; $BE \perp AD$.

Apskaičiuoti: AD; BE.

Sprendimas:

$S_{ABCD} = AD \cdot BE$;

$3\ BE \cdot BE = 48$;

$BE^2 = 16$; $BE = 4$ cm.

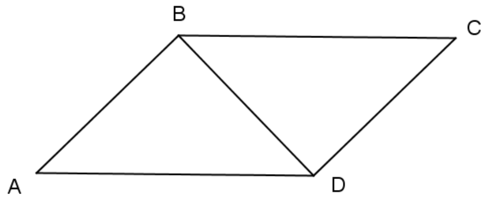
$AD = 3 \cdot 4 = 12$ (cm)

Ats.: 12 cm; 4 cm.

188. Lygiagretainio kraštinės yra 8 cm ir 10 cm ilgio, o jo įstrižainė – 6 cm ilgio. Apskaičiuokite šio lygiagretainio plotą.

Duota: ABCD – lygiagretainis; AB = 8 cm; AD = 10 cm; BD = 6 cm.

Apskaičiuokite: S_{ABCD}.



Sprendimas:

Imame trumpesniąją įstrižainę, nes ji guli prieš smailųjį lygiagretainio kampą. Ilgesnioji guli prieš bukąjį kampą, todėl turėtų būti didesnė už kraštines (trikampyje prieš didesnį kampą guli didesnė kraštinė).

$S_{ABCD} = 2\,S_{ABD}$; - lygiagretainio įstrižainė dalija lygiagretainį į du lygius (lygiapločius) trikampius.

Pagal Herono formulę:

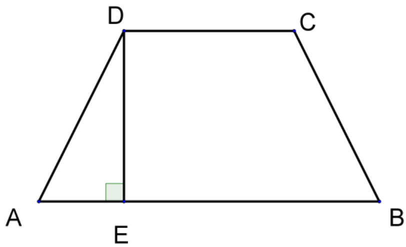
$S_{ABD} = \sqrt{p(-AB)(p-AD)(p-BD)}$; $p = \frac{1}{2}(AB + AD + BD) = \frac{1}{2}(10 + 8 + 6) = 12\ (cm)$

$S_{ABD} = \sqrt{12\ \cdot 2\ \cdot 4\ \cdot 6} = 24\ (cm^2)$;

$S_{ABCD} = 2 \cdot 24 = 48\ (cm^2)$.

Ats. : $48\ cm^2$.

189. Apskaičiuokite lygiašonės trapecijos perimetrą, jei jos pagrindai sutinka kaip 1: 3, o aukštinė lygi mažesniajam pagrindui ir lygi $\frac{3}{5}(2-\sqrt{2})$.



Duota: ABCD- trapecija;
AD = CB; DC:AB=1:3; DE⊥AB;
DE = DC = $\frac{3}{5}(2-\sqrt{2})$.

Apskaičiuoti: $P_{ABCD.}$

Sprendimas:

$$AB = 3DC = \frac{9}{5}(2-\sqrt{2}); \quad AE = DC = \frac{3}{5}(2-\sqrt{2});$$

Iš stačiojo trikampio ΔADE: $AD^2 = AE^2 + DE^2 = 2AE^2$.

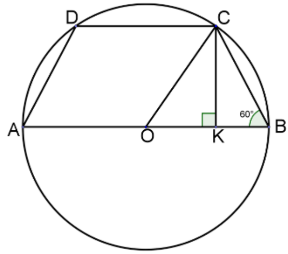
$$AD = 2\cdot\frac{9}{25}(4-4\sqrt{2}+2) = \frac{18}{25}(6-4\sqrt{2}) = \frac{36}{25}(3-2\sqrt{2});$$

$$P_{ABCD} = 2AD + DC + AB = \frac{72}{25}(3-2\sqrt{2}) + 4\cdot\frac{3}{5}(2-\sqrt{2}) =$$

$$=\frac{216}{25} - \frac{144}{25}\sqrt{2} + \frac{24}{5} - \frac{12}{5}\sqrt{2} = \frac{336}{25} - \frac{204}{25}\sqrt{2} = \frac{4}{25}(84-51\sqrt{2}).$$

Ats.: $\frac{4}{25}(84-51\sqrt{2})$.

190. Į skritulį, kurio spindulys R, įbrėžta lygiašonė trapecija. Jos ilgesnis pagrindas sutampa su skritulio skersmeniu, o kampas prie pagrindo lygus 60^0. Apskaičiuokite trapecijos plotą.



Duota: skritulys O; OC = R; AB = 2R; AD = CB; $\angle A = \angle B = 60^0$.

Apskaičiuoti: $S_{ABCD.}$

Sprendimas:

$OB=OC \Rightarrow \angle B=\angle OCB=60^0; \Rightarrow \Delta OBC$- lygiakraštis

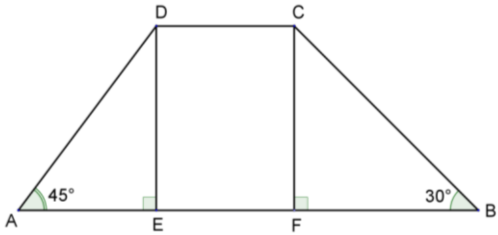
$CK\perp AB$. Iš stačiojo trikampio ΔCKB; $KB = CB \cdot \cos 60^0=\frac{1}{2}R$;

$CK=CB \cdot \sin 60^0=R\,\frac{\sqrt{3}}{2}$; $DC=AB-2KB=2R-2 \cdot \frac{1}{2}R = R$;

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot CK = \frac{1}{2}(2R + R) \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

Ats.: $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

191. Didesnysis trapecijos pagrindas lygus a, mažesnysis lygus b, kampai prie pagrindo- 30^0 ir 45^0. Apskaičiuokite trapecijos plotą.



Duota: ABCD- trapecija;
AB=a; DC=b; $\angle B=30^0$;
$\angle A=45^0$.

Apskaičiuoti: $S_{ABCD.}$

Sprendimas:

$DE \perp AB$; $CF \perp AB$;

EF = DC = b, nes DCFE- stačiakampis;

Tegul AE = x (x > 0) , tai DE = x; CF = x;

Iš stačiojo trikampio ΔCFB: $FB = CF \cdot ctg30^0$; $FB = x\sqrt{3}$;

AB = AE + EF + FB;

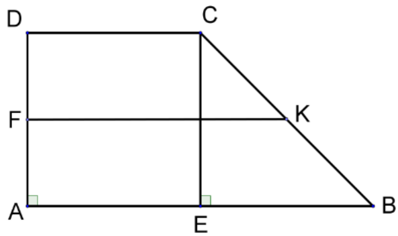
$$a = x + b + x\sqrt{3};\ \ x\left(1+\sqrt{3}\right) = a - b;$$

$$x = \frac{a-b}{1+\sqrt{3}} = \frac{(a-b)(1-\sqrt{3}}{1-3} = \frac{(a-b)(\sqrt{3}-1)}{2};$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot DE = \frac{1}{2}(a+b) \cdot \frac{(a-b)\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} = \frac{(a^2-b^2)(\sqrt{3}-1)}{4}$$

Ats.: $\frac{(a^2-b^2)(\sqrt{3}-1)}{4}$.

192. Stačiosios trapecijos įstrižainė lygi jos šoninei kraštinei. Apskaičiuokite jos šoninę kraštinę, jei aukštinė lygi 3, o vidurinė linija lygi $\frac{9\sqrt{3}}{2}$



Duota: ABCD- trapecija;
AD⊥AB; AF =FD; CK=KB;
AC=CB; CE⊥AB; CE=3;
FK= $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Apskaičiuoti: CB.

Sprendimas:

AC=CB - duota⇒ AE=EB=DC;

FK=$\frac{1}{2}(\mathrm{DC}+\mathrm{AB}) = \frac{1}{2}(\mathrm{DC}+2\mathrm{DC}) = \frac{3}{2}\mathrm{DC}$; $\frac{3}{2}\mathrm{DC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$;

$\mathrm{DC} = 3\sqrt{3}$; $\mathrm{AD} = \mathrm{CE} = 3 -$ duota;

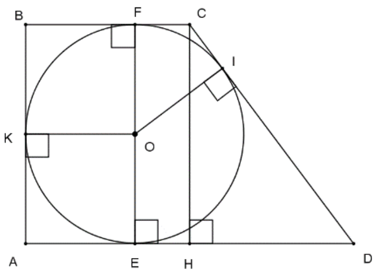
Iš stačiojo trikampio ΔADC: $\mathrm{A}C^2 = AD^2 + DC^2$;

$\mathrm{AC}\sqrt{9+27} = 6$; $\mathrm{CB} = \mathrm{AC} = 6$cm.

Ats.: 6.

193. Apie apskritimą apibrėžta stačioji trapecija, kurios trumpasis pagrindas lygus 6 cm. Raskite trapecijos plotą, kai apskritimo spindulys lygus r.

Duota: apskritimas O ;
ABCD – trapecija ;
$\angle A = \angle D = 90°$;
DC = 6 cm ; OE = r.



Apskaičiuoti: S_{ABCD}

Sprendimas:

CM = EF = 2r ; BC = 6 cm ;

Kadangi BF = OK = r, tai FC = 6 – r ;

Tegul DE = x (x > 0)

Iš taško C išeina dvi liestinės, tai CF = CI = 6 – r, tai DE = DI = x ;

Iš stataus ΔCHD: $CD^2 = CH^2 + HD^2$

CD = CI + DI = 6 – r + x ;

$HD = ED - EH = x - (6 - r)$
$(6 - r + x)^2 = (2r)^2 + (x - (6 - r))^2$
$(6 - r + x)^2 - (x - 6 + r)^2 = 4r^2$
$(6 - r + x - (x - 6 + r)) \cdot (6 - r + x + x - 6 + r) = 4r^2$
$(12 - 2r) \cdot 2x = 4r^2 \; ; \; \Big| : 2$
$x = 2r^2 : (12 - 2r) = r^2 : (6 - r)$, $ED = r^2 : (6 - r)$;

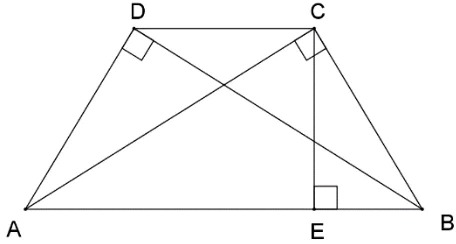
Tada $AD = 6 + ED = 6 + r^2 : (6 - r) = (36 - 6r + r^2) : (6 - r)$;

$S = 0{,}5\ (BC + AD) \cdot CH$;

$S = 0{,}5\ (6 + (36 - 6r + r^2) : (6 - r)) \cdot 2r =$
$= r \cdot (36 - 6r + 36 - 6r + r^2) : (6 - r) = r \cdot (r^2 - 12r + 72) : (6 - r).$

Ats.: $r \cdot (r^2 - 12r + 72) : (6 - r).$

194. Lygiašonės trapecijos pagrindai 10 cm ir 26 cm, o jos įstrižainės statmenos šoninėms kraštinėms. Apskaičiuokite trapecijos plotą.



Duota: ABCD – trapecija;
AD = CB; DC = 10 cm;
AB = 26 cm; $AC \perp CB$;
$BD \perp AD$.

Apskaičiuoti: S_{ABCD}

Sprendimas:

$CE \perp AB$;

EB = 0,5 (AB - DC) = 0,5(26 – 10) = 8 (cm).

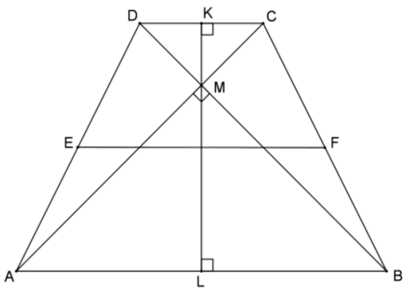
AE = AB – EB = 26 – 8 = 18 (cm) ;

Iš stataus ΔABC: $CE^2 = AE \cdot EB$;
$CE^2 = 18 \cdot 8 = 144$
CE = 12 (cm)

$S_{ABCD} = 0{,}5(AB + DC) \cdot CE = 0{,}5(26 + 10) \cdot 12 = 36 \cdot 6 = 216$ (cm^2)

Ats.: 216 cm^2.

195. Lygiašonės trapecijos vidurinė linija lygi 24 cm, o jos įstrižainės tarpusavyje statmenos. Apskaičiuokite trapecijos plotą.



Duota: ABCD – trapecija;
AD = CB; AE = ED;
CF = FB; EF = 24 cm;
AC ⊥ DB.

Apskaičiuoti: $S_{ABCD.}$

Sprendimas:

ΔDMC – lygiašoni ;

KL ⊥ AB;   DK = KM ;

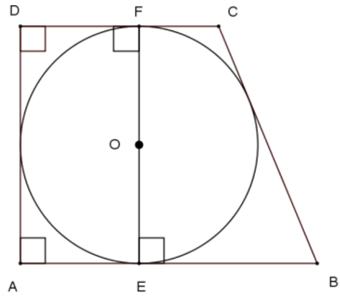
Analogiškai: ML = AL ;

KL = DK + ML = 0,5(DC + AB) = EF ;

$S_{ABCD} = 0{,}5(AB + CD) \cdot KL = EF \cdot EF = 24^2 = 576$ (cm^2)

Ats.: 576 cm^2.

196. Į stačiąją trapeciją įbrėžtas skritulys, kurio spindulys 2,5 cm. Pagrindams nestatmenos kraštinės ilgis 13 cm. Apskaičiuokite trapecijos plotą.



Duota: ABCD – trapecija ;
AD ⊥ AB ;
skritulys O; OF = r = 2,5 cm ;
CB = 13 cm

Apskaičiuoti: S_{ABCD}.

Sprendimas:

OF ⊥ DC – liestinė ⊥ spinduliui, lietimosi taške.

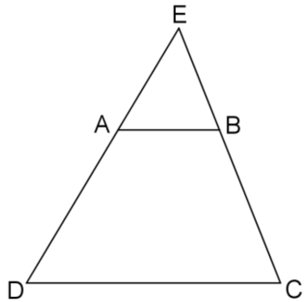
AD = FE = 2r = 5 cm;

DC + AB = AD + BC = 5 + 13 = 18 (cm) ;

$S_{ABCD} = 0{,}5(DC + AB) \cdot AD = 0{,}5 \cdot 18 \cdot 5 = 45$ (cm^2).

Ats.: 45 cm^2.

197. Trapecijos ABC (AB||CD) AB=4cm, CD=6cm. Viena šoninė kraštinė lygi 6cm. Kiek reikia ją pratęsti, kad susikirstų su kita šonine kraštine?



Duota: ABC – trapecija; AB||CD;
AB = 4cm; CD = 6cm; AD = 6cm;
AD∩CB = E.

Apskaičiuoti: AE.

Sprendimas:

ΔAEC~ΔAEB, nes AB||CD (duota).

Tiesė, lygiagreti trikampio kraštinei, atkerta trikampį panašų į duotąjį.

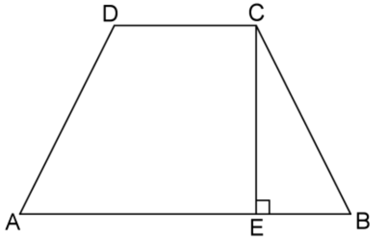
$\frac{DC}{AB} = \frac{DE}{AE}$; $\frac{6}{4} = \frac{6+AE}{AE}$;

6 AE = 24 + 4AE;

2AE=24; AE=12.

Ats.:12cm.

198. Lygiašonės trapecijos aukštinė yra lygi trumpesniajam pagrindui. Apskaičiuokite trapecijos plotą , kai jos smailusis kampas yra tris kartus mažesnis už bukąjį kampą.



Duota: ABCD – trapecija;
$AD = CB$; $CE \perp AB$; $CE = DC = a$;
$\angle DCB = 3\angle B$.

Apskaičiuoti: S_{ABCD}.

Sprendimas:

$\angle C+\angle B=180^\circ$; $3\angle B+\angle B=180^\circ$;

$4\angle B=180^\circ$; $\angle B=45^\circ$;

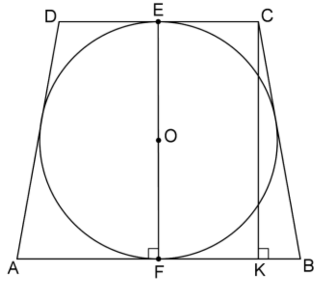
$\angle ECB=45^\circ$; $EB=CE=a$;

$AB = 2EB + DC = 3a$;

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AB + DC) \cdot CE = \frac{1}{2}(3a + a) \cdot a = 2a^2$.

Ats.: $2a^2$.

199. Apskaičiuokite ilgesnįjį lygiašonės trapecijos pagrindą, kai trapecijos šoninė kraštinė lygi 15, o į ją įbrėžto apskritimo spindulys lygus 6.



Duota: ABCD – trapecija;
AD = CB =15; apskritimas o;
OE = r = 6.

Apskaičiuoti: AB.

Sprendimas:

AB + CD = AD + CB;

CK⊥AB; CK = 2r = 12;

AB = DC + 2KB;

AB + CD = 30; DC + 2KB + CD = 30;

2DC + 2KB = 30; DC + KB = 30;

Iš stataus ΔCKB: $KB^2 = CB^2 - CK^2$;

$KB = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{3 \cdot 27} = 9$;

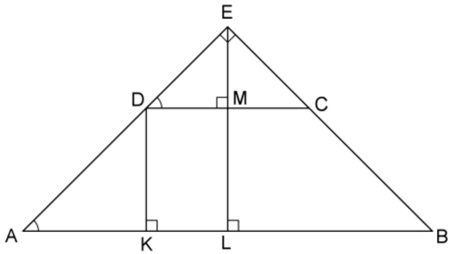
DC+9=30;

DC=21;

AB = 21 + 2 · 9 = 39.

Ats.: 39.

200. **Lygiašonės trapecijos šoninės kraštinės, pratęstos iki susikirtimo, sudaro statų kampą. Apskaičiuokite trapecijos didžiojo pagrindo ilgį, kai jos aukštinė lygi 2 cm, o plotas – 12cm^2.**



Duota: ABCD – trapecija;
AD = BC; AD ∩ BC = E;
AE ⊥ BE; DK ⊥ AB;
DK = 2cm; $S_{ABCD} = 12\text{cm}^2$.

Apskaičiuoti: AB.

Sprendimas:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot DK$; ∠A = ∠B = 45; AL = EL;

$12 = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot 2$;

DM = ME; AK = DK = 2 cm;

AB + DC = 12; AK = DK;

2AK + DC = 12;

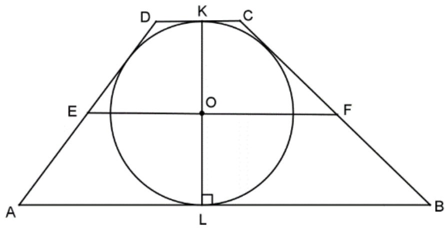
4 + 2DC = 12; DC = 4;

AB = 8 cm.

Ats.: 8 cm.

201. Trapecijos šoninių kraštinių ilgiai 3 cm ir 5 cm. Žinoma, kad į trapeciją galima įbrėžti apskritimą. Vidurinė trapecijos linija dalija trapeciją į dvi dalis, kurių plotų santykis 5:11. Apskaičiuokite trapecijos pagrindų ilgius.

Duota: trapecija ABCD, AE = ED; CF = FB; AD = 3 cm; CB = 5 cm; apskritimas O; $S_{EDCF} : S_{AEFB} = 5:1$.



Apskaičiuoti: DC; AB.

Sprendimas:

KL $\perp$ AB, KO = OL;

$S_{EDCF} = \frac{1}{2}(DC + EF) \cdot KO$; $S_{AEFB} = \frac{1}{2}(EF + AB) \cdot OL$;

$$\frac{\frac{1}{2}(DC+EF)\cdot KO}{\frac{1}{2}(EF+AB)\cdot OL} = \frac{5}{11};$$

AD + CB = AB + DC = 8 cm; EF = $\frac{1}{2}(AB + DC) = 4$;

$\frac{DC+4}{4+AB} = \frac{5}{11}$; 11 DC + 44 = 20 + 5 AB; 5AB = 24 + 11 DC;

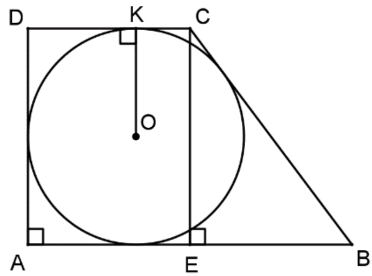
AB = $\frac{24+11\,DC}{5}$; $\frac{24+11\,DC}{5} + DC = 8 \mid \cdot 5$;

24 + 11 DC + 5 DC = 40; 16 DC = 16;

DC = 1 (cm); AB = 7 (cm).

Ats.: 1 cm; 7 cm.

202. Į stačiąją trapeciją įbrėžto apskritimo spindulys 2 cm. Raskite smailųjį trapecijos kampą, jei jos plotas lygus 120 cm².



Duota: trapecija ABCD; AD ⊥ AB, apskritimas O; OK = r = 2 cm; S_{ABCD} = 120 cm².

Apskaičiuoti: LB.

Sprendimas:

CE ⊥ AB; CE = 2 r = 4 cm;
AB + DC = AD + CB;
AB + DC = 4 + CB;

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}$ (AB + DC) · CE;

$\frac{1}{2}$ (AB + DC) · 4 = 120;

4 + CB = 60;

CB = 56;

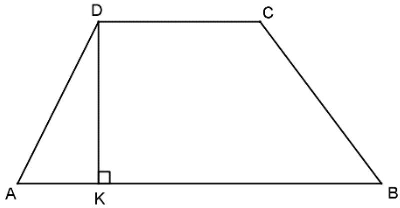
$\sin \angle B = \frac{CE}{CB} = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$; ∠B = arcsin$\frac{1}{14}$.

Ats.: arcsin$\frac{1}{14}$.

203. Lygiašonės trapecijos perimetras lygus 62 cm. Trumpesnysis trapecijos pagrindas lygus šoninei kraštinei, o kitas pagrindas ilgesnis už šoninę kraštinę 10 m. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

Duota: trapecija ABCD;
AD = DC = CB;
AB = AD + 10, P_{ABCD} = 52 m.

Apskaičiuoti: S_{ABCD}.



Sprendimas:

$P_{ABCD} = AB + 3\,DC = 62;$ $\quad AB = DC + 10;$

$4\,DC + 10 = 62;$ $\quad DC = 13.$

$DK \perp AB;\ AK = \frac{1}{2}(AB - DC) = \frac{1}{2}(23 - 10) = \frac{13}{2}$

Iš stataus ΔADK: $DK^2 = AD^2 - AK^2$;

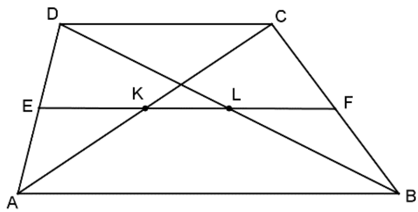
$DK = \sqrt{13^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{2} \cdot \frac{3 \cdot 13}{2}} = \frac{13}{2}\sqrt{3}.$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot DK = \frac{1}{2}(23 + 13) \cdot \frac{13}{2}\sqrt{3} = 9 \cdot 13\sqrt{3} =$
$117\sqrt{3}$ (m^2)

Ats.: $117\sqrt{3}$ (m^2).

204. Trapecijos pagrindai 12 ir 8. Rasite atkarpos, jungiančios įstrižainių vidurio taškus, ilgį.

Duota: ABCD – trapecija;
AB = 12; DC = 8;
AK = KC, DL = LB.



Apskaičiuoti: KL.

Sprendimas:

Trapecijos vidurinė linija dalija įstrižaines pusiau.
Todėl taškai K ir L $\in$ EF. EF yra vidurinė linija.

EL yra ΔADB vidurinė linija, tai EL = $\frac{1}{2}$ AB = 6;

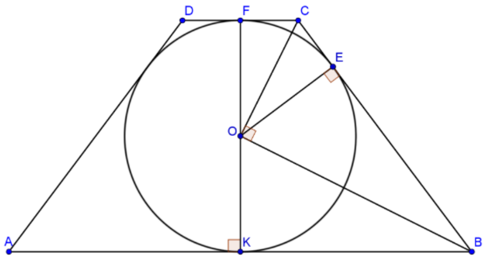
EK yra ΔADC vidurinė linija, tai EK = $\frac{1}{2}$ DC = 4;

KL = EL – EK; KL = 6 – 4 = 2.

Ats.: 2.

205. Į lygiašonę trapeciją įbrėžtas skritulys. Lietimosi taškas šoninė kraštinę dalija į dvi 2cm ir 8cm ilgio atkarpas. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

Duota: ABCD – trapecija; AD = BC; skritulys O; OE ⊥ CB; CE = 2cm; EB = 8cm;



Apskaičiuoti: S_{ABCD}.

Sprendimas:

CB = CE +EB = 10(cm);

Į trapeciją įbrėžtas apskritimas, tai: 2CB = AB +DC = 20(cm);

$\angle COB = 90°$, nes $\angle OCB + \angle OBC = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$;

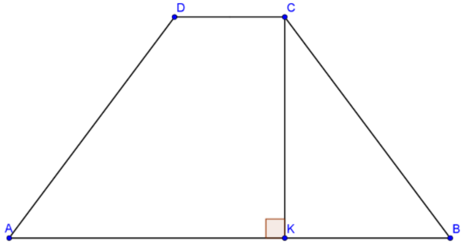
Iš stataus trikampio $\triangle COB$: $OE = \sqrt{CE \cdot EB} = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$(cm);

FK = 2OE = 8(cm);

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot FK = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 8 = 80(cm^2)$.

Ats.: 80cm^2.

206. Vienas lygiašonės trapecijos pagrindas lygus 17dm, o kitas – 5dm. Apskaičiuokite trapecijos perimetrą, jei jos plotas lygus 88dm^2.



Duota: ABCD – trapecija; AD = CB; AB = 17dm; DC = 5dm; S_{ABCD} = 88 dm^2.

Apskaičiuoti: P_{ABCD}.

Sprendimas:

CK ⊥ AB; $S_{ABCD}= \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot CK$;

$\frac{1}{2}(17+5) \cdot CK = 88$; CK = 8(dm);

$KB = \frac{1}{2}(AB – CD) = \frac{1}{2}(17\text{-}5) = 6$(dm);

Iš stataus trikampio △CKB: $CB = \sqrt{KB^2 + CK^2}$;

$CB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10(dm)$;

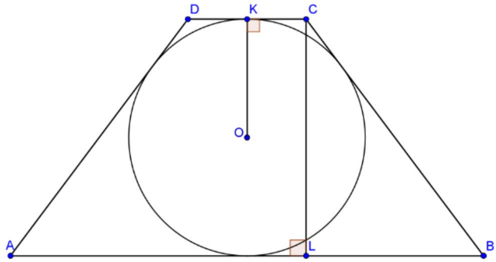
$P_{ABCD} = AB + CD + 2CB = 17 + 5 + 2 \cdot 10 = 42$(dm).

Ats.: 42dm.

207. Apie 4cm spindulio apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios perimetras lygus 68cm. Apskaičiuokite didesnįjį trapecijos pagrindą.

Duota: trapecija
ABCD; AD = BC;
P_{ABCD}= 68cm;
apskritimas O;
OK = r = 4cm;

Apskaičiuoti: AB.



Sprendimas:

Į trapeciją įbrėžtas trikampis, tai: AB + DC = 2CB = 34(cm);

CB = 17(cm);

CL ⊥ AB; CL = 2r = 8(cm);

Iš stataus trikampio △CLB:
$LB^2 = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{25 \cdot 9} = 15(\text{cm})$

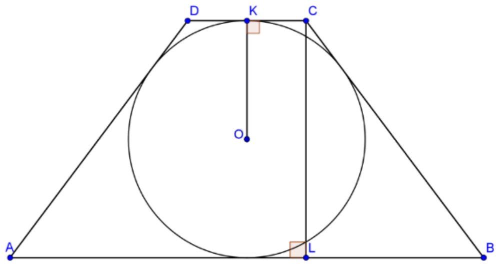
AB = DC + 2AB;
AB + DC = 34(cm), tai: DC + 2LB +DC = 34(cm); 2DC = 4(cm);
DC = 2(cm);

AB = 2 + 30 = 32 (cm);

Ats.: 32cm.

208. Apie apskritimą apibrėžtas lygiašonės trapecijos pagrindai yra 36cm ir 100cm ilgio. Apskaičiuokite apskritimo spindulio ilgį.

Duota: ABCD-trapecija;
AD = BC; DC = 36cm;
AB = 100cm;
apskritimas O; OK = r.



***Apskaičiuoti*:** r.

Sprendimas:

Į trapeciją įbrėžtas apskritimas, tai: AB + DC = 2CB; 2CB = 136(cm); CB = 68(cm);

CL ⊥ AB; LB = $\frac{1}{2}$(AB – DC) = $\frac{1}{2}$(100 – 36) = 32(cm);

Iš stataus trikampio △CLB:

$CL^2 = CB^2 - LB^2$;

Į trapeciją įbrėžto apskritimo skersmuo – trapecijos aukštinė:
CL = $\sqrt{68^2 - 32^2} = \sqrt{100 \cdot 36}$ = 60(cm);

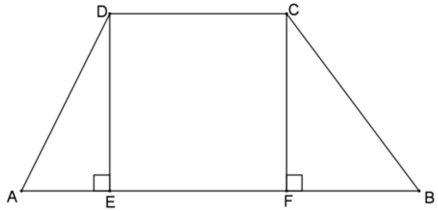
CL = 2r;
r = 30(cm).

Ats.: 30cm.

209. Trapecijos pagrindai yra 4cm ir 32cm ilgio, o jos kraštinės – 17cm ir 25cm ilgio. Apskaičiuokite trapecijos aukštinės ilgį.

Duota: trapecija ABCD;
DC = 4cm; AB = 32m;
AD = 17cm; CB = 25cm;
$DE \perp AB$.

Apskaičiuoti: DE.



Sprendimas:

$CK \perp AB$; CK = DE (atstumai tarp lygiagrečių tiesių yra lygūs), $AB \parallel DC$.

EK = DC = 4cm ;

KB = AB – EK – AE = 32 – 4 – AE = 28 – AE;

Iš stataus ΔAED: $DE^2 = AD^2 - AE^2$,
tai $AD^2 - AE^2 = CB^2 - KB^2$.

Iš stataus ΔCKB: $CK^2 = CB^2 - KB^2$;
$17^2 - AE^2 = 25^2 - (28 - AE)^2$

$(28 - AE)^2 - AE^2 = 25^2 - 17^2$

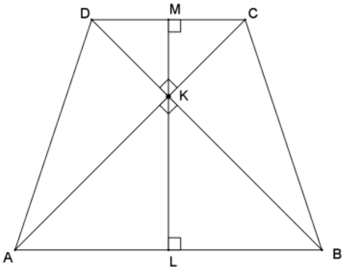
$(28 - 2AE)28 = 8 \cdot 42$

$28 - 2AE = 12$; $2AE = 16$; $AE = 8$

$DE = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{25 \cdot 9} = 15$(cm)

Ats.: 15cm.

210. Lygiašonės trapecijos pagrindai lygūs 5 ir 15, o jos įstrižainės susikerta stačiu kampu. Apskaičiuokite trapecijos plotą.



Duota: trapecija ABCD; AD = BC;
DC = 5; AB = 15; AC⊥BD.

Apskaičiuoti: S_{ABCD}

Sprendimas:

$S_{ADC} = \frac{1}{2}$ AC · DK (DC ⊥ AC);
$S_{ACB\,=} = \frac{1}{2}$ AC · BK (BK ⊥ AC);
$S_{ABCD} = = \frac{1}{2}$ AC · DK + $\frac{1}{2}$ AC · BK = $\frac{1}{2}$ AC (DK + BK) = $\frac{1}{2}$ AC · DB ;

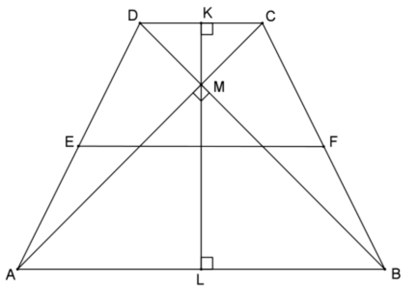
Lygiašonės trapecijos įstrižainės lygios. Tai DK = KC ir AD = KB.
Reiškia ΔDKC ir ΔAKB yra statūs.
Lygiašoniai: kampas CDK ir kampas AKB – statūs.
MK ir KL – pusiaukraštinės ir pusiaukampinės.

Iš stataus ΔDKL: $\cos 45^0 = \frac{DM}{DK}$; DM = $\frac{1}{2}$DC = 2.5 = $\frac{5}{2}$;
DK = $\frac{5}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$;

Iš stataus ΔKLB $\cos 45^0 = \frac{LB}{KB}$; LB = $\frac{1}{2}$AB = $\frac{15}{2}$;
KB = $\frac{15}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15}{\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$;
AC = DB = $\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{15\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$;
$S_{ABCD} = \frac{1}{2}$ AC · DB = $\frac{1}{2}(10\sqrt{2})^2 = 100$ (ploto vienetų).

Ats.: 100.

211. Lygiašonės trapecijos vidurinė linija lygi 10cm, o jos įstrižainė susikerta stačiu kampu. Apskaičiuokite trapecijos plotą.



Duota: trapecija ABCD; AB = BC; AE = ED; CF = FB; EF = 10cm; AC⊥BD.

Apskaičiuoti: S_{ABCD}

Sprendimas:

$EF = \frac{1}{2}(DC + AB) = 10;$

AC = DB, tai DM = MC ir AM = MB.
Vadinasi ΔDMC ir ΔAMB - statūs lygiašoniai.

Tai DK = KM ir ML = LB.

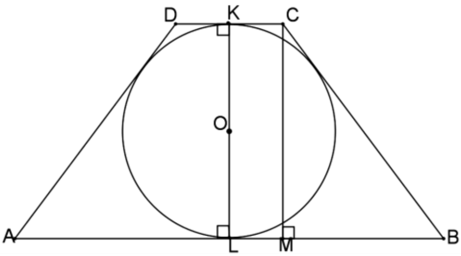
Tada $KL = DK + LB = \frac{1}{2}DC + \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(DC+AB) = 10$ (cm);

$S_{ABCD} = 10 \cdot 10 = 100$ (cm^2).

Ats.: 100cm^2.

212. Apie apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios pagrindai 9cm ir 25cm ilgio. Apskaičiuokite trapecijos aukštinės ir šoninės kraštinės ilgį.

Duota: trapecija ABCD; apskritimas O; AB = BC; AB = 25cm; DC = 9cm; KL⊥CB.



Apskaičiuoti: KL; CB.

Sprendimas:

CM⊥AB; CM⊥KL;

AB + CB = 2CB;

2CB = 34 cm; CB = 17 cm;

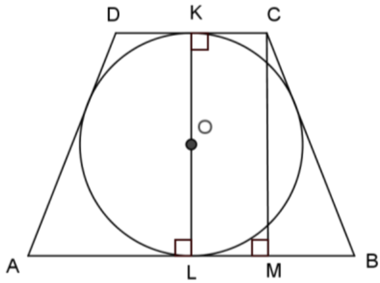
MB = $\frac{1}{2}$(AB – CD) = 8 cm;

Iš stataus ΔCBM:
$CM^2 = CB^2 - MB^2$;

CM=$\sqrt{17^2 - 8^2}$ = $\sqrt{9 \cdot 25}$= 15 cm.

Ats.: 15cm; 17cm.

213. Apie apskritimą, kurio skersmuo lygus 15 cm, apibrėžta lygiašonė trapecija. Jos šoninė kraštinė lygi 17 cm. Apskaičiuokite trapecijos pagrindų ilgius.



Duota: KL = 2r = 15cm;
ABCD – trapecija

Apskaičiuoti: DC, AB.

Sprendimas:

CM⊥AB; CM=KL=15cm;

Iš st. $_\Delta$CMB: $MB^2=CB^2-CM^2$;

$\mathrm{MB} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{2 \cdot 32} = 8(\mathrm{cm})$;

AB + DC = 2CB; AB = DC + 2MB;

2DC + 2MB = 2BC;

DC + MB = BC;

DC = CB - MB = 9(cm);

AB = DC + 2MB = 9 + 16 = 25(cm).

Ats.: 9cm; 25cm.

214. Lygiašonės trapecijos plotas lygus 180 cm^2, vidurinės linijos ilgis – 45cm, o šoninės kraštinės ilgis – 5 cm. Apskaičiuokite trumpesniojo trapecijos pagrindo ilgį.

Duota: ABCD – trapecija;
AD = BC = 5 cm;
AE = ED; BF = FC;
EF = 45 cm; CK⊥AB;
S_{ABCD} = 180 cm^2.

Apskaičiuoti: DC.

Sprendimas:

S_{ABCD}=EF·CK;

45·CK=180;
CK=4 cm

Iš stataus $_\Delta$CBK: KB^2=CB^2-CK^2;

$\mathrm{KB} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3(\mathrm{cm});$

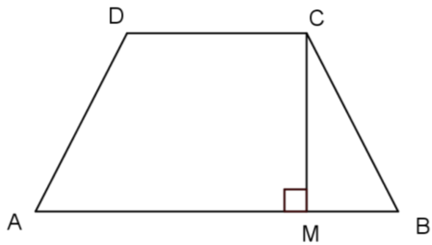
$\mathrm{EF} = \frac{1}{2}(\mathrm{AB} + \mathrm{CD}) = \frac{1}{2}(\mathrm{CD} + 2\mathrm{KB} + \mathrm{CD}) = \mathrm{CD} + \mathrm{KB};$

CD + 3 = 45;
CD = 42cm

Ats.: 42cm.

215. Lygiašonės trapecijos plotas lygus 72 cm2, šoninės kraštinės ilgis – 10 cm, o aukštinės ilgis yra 6cm. Apskaičiuokite ilgesniojo trapecijos pagrindo ilgį.

Duota: ABCD – trapecija;
AD = BC = 10 cm; CM ⊥ AB; CM = 6cm;
$S_{ABCD} = 72\ cm^2$.



Apskaičiuoti: AB.

Sprendimas:

Iš stataus $\triangle CMB$: $MB^2 = BC^2 - CM^2$;

$$MB = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8(\text{cm});$$

AB = DC + 2MB = DC + 16;

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot CM = \frac{1}{2}(DC + 16 + DC) \cdot CM;$$

(DC + 8)·6 = 72;

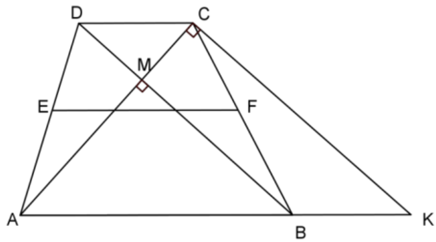
DC = 4(cm);

AB = 4 + 16 = 20cm.

Ats.: 20cm.

216. Trapecijos įstrižainės statmenos viena kitai ir yra 5 ir 12m ilgio. Apskaičiuokite trapecijos vidurinės linijos ilgį ir plotą.

Duota: ABCD – trapecija;
$AC \perp BD$; $AC = 5$m;
$BD = 12$m; $AE = ED$;
$BF = FC$.



Apskaičiuoti: EF; S_{ABCD}.

Sprendimas:

Pratęsiu AB ir atidedu BK=DC; DCKB – lygiagretainis;

$AC \perp KC$; $CK = DB = 12$(m);

$AK^2 = AC^2 + KC^2$;

$$AK = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13(\text{m});$$

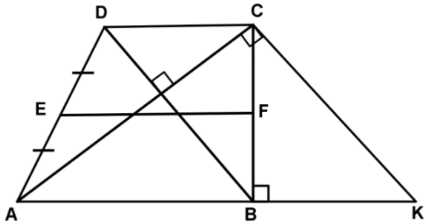
$$EF = \frac{1}{2}(AB + DC) = \frac{1}{2}(AB + BK) = \frac{1}{2}AK = 6{,}5(\text{m});$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} = \frac{1}{2}BD \cdot AM + \frac{1}{2}BD \cdot MC = \frac{1}{2}BD(AM + MC) =$$

$$= \frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30(\text{m}^2).$$

Ats.: 6,5 m; 30m^2.

217. Trapecijos vidurinė linija yra 5 m ilgio, o įstrižainės statmenos viena kitai. Viena iš jų yra 8 m ilgio. Apskaičiuokite trapecijos plotą ir kitos įstrižainės ilgį.



Duota: trapecija ABCD;
AE = ED; BF = FC; EF = 5m;
AC⊥BD; AC = 8m.

Apskaičiuoti: S_{ABCD} ; BD

Sprendimas:

Pratęsiame AB ir atidedame BK = DC; BKCD – lygiagretainis.

BD = CK; BK = DC; AK = AB+BK = AB+DC;

EF = $\frac{1}{2}$ (AB + DC); AK = 10; AC⊥CK (jei tiesė statmena vienai iš lygiagrečių tiesių, tai ji statmena ir kitai).

Iš stataus Δ AKC:

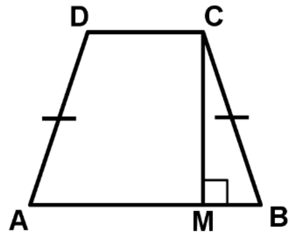
$CK^2 = AK^2 - AC^2$; $CK = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (m)

BD = 6m;

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$ (m^2).

Ats.: 24m^2 ; 6m.

218. Lygiašonės trapecijos pagrindų santykis yra 3:7. Trapecijos aukštinė lygi 24 cm. Apskaičiuokite trapecijos plotą, jei jos šoninė kraštinė lygi 26 cm.



Duota: trapecija ABCD; DC:AB = 3:7;
CM⊥AB; CM = 24cm; AD = BC = 26cm.

***Apskaičiuoti*:** S_{ABCD}.

Sprendimas:

Tegul viena dalis x cm (x>0) , tada AB = 7x;

DC = 3x;

MB = $\frac{1}{2}$ (AB – DC) = 2x;

Iš stataus Δ CMB:

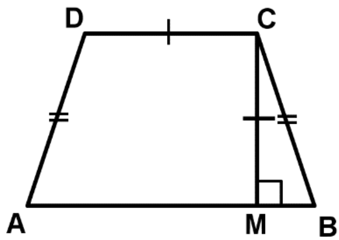
$MB^2 = CB^2 - CM^2$; MB = $\sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{2 \cdot 50} = 10$;

2x = 10; x = 5;

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB+DC) \cdot CM = \frac{1}{2}(7x+3x) \cdot 24 = 5 \cdot 5 \cdot 24 = 700$ (cm^2).

Ats.: 700 cm^2.

219. Lygiašonės trapecijos pagrindų santykis 3:11. Trapecijos perimetras lygus 48mm, o aukštinė lygi trumpesniajam pagrindui. Apskaičiuokite trapecijos plotą.



Duota: trapecija ABCD;
$DC:AB = 3:11$; $P_{ABCD} = 48$mm;
$CM \perp AB$; $CM = DC$; $AD = BC$.

Apskaičiuoti: S_{ABCD}.

Sprendimas:

Tarkime, kad 1 dalis lygi x mm (x>0) Tada DC = 3x mm,
AB = 11x mm.
$MB = \frac{11x-3x}{2} = 4x$ (mm)

ΔMCB status: $CB^2 = CM^2 + MB^2$
$CB^2 = 9x^2 + 16x^2 = 25x^2$ (mm^2)
$CB = 5x$ (mm)

$P_{ABCD} = 2\cdot AD + DC + AB$;
$2\cdot 5x+3x+11x = 48$
$24x = 48$
$x = 2$.

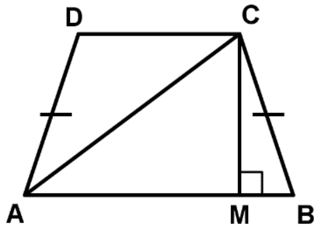
$DC = 3\cdot 2 = 6$ (mm)
$AB = 11\cdot 2 = 22$ (mm)
$CM = 3\cdot 2 = 6$ (mm)

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(DC + AB)\cdot CM$;
$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(6+22)\cdot 6 = 28\cdot 3 = 84$ (mm^2)

Ats.: 84 mm^2.

220. Vienas lygiašonės trapecijos pagrindas lygus 12 cm, o kitas – 18 cm. Kampo prie didesniojo pagrindo sinusas lygus $\frac{8}{\sqrt{73}}$. Apskaičiuokite trapecijos plotą ir įstraižainės ilgį.

Duota: trapecija ABCD; DC = 12cm; AB = 18cm; $\sin \angle B = \frac{8}{\sqrt{73}}$; AD = BC.



Apskaičiuoti: S_{ABCD}; AC.

Sprendimas:

$CM \perp AB$; $MB = \frac{1}{2}(AB - CD) = \frac{1}{2}(18-12) = 3$ (cm);

$1 + ctg^2\angle B = \frac{1}{\sin^2 \angle B}$; $ctg^2\angle B = \frac{1}{\frac{64}{73}} - 1 = \frac{73}{64} - 1 = \frac{9}{64}$;

$ctg\angle B = \frac{3}{8}$; $ctg\angle B = \frac{MB}{CM}$;

$CM = \frac{MB}{ctg\angle B} = \frac{3}{\frac{3}{8}} = 8$ (cm);

AM = AB-MB = 18-3= 15 (cm);

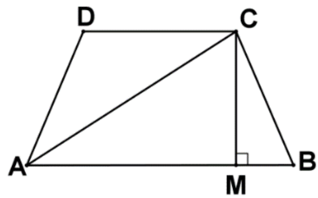
Iš stataus Δ AMC: $AC^2 = AM^2 + MC^2$;
$AC = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ (cm);

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot CM = \frac{1}{2}(18+12) \cdot 8 = 120$ (cm^2).

Ats.: 120cm^2; 17cm.

221. Vienas lygiašones trapecijos pagrindas lygus 8 cm, o kitas - 12cm. Prie didesniojo pagrindo kampo kosinusas lygus 0,4. Apskaičiuokite trapecijos plotą ir įstrižainės ilgį.

Duota: trapecija ABCD; AD = BC;
AB = 12 cm; DC = 8 cm;
cos ∠B = 0,4.



Apskaičiuoti: AC, S_{ABCD}.

Sprendimas:

CM ⊥ AB; MB $= \frac{1}{2}(AB - DC) = \frac{1}{2}(12 - 8) = 2$ (cm);

1 + tg² ∠B = $\frac{1}{cos^2\angle B}$; tg² ∠B = $\frac{1}{0,16} - 1 = \frac{0,84}{0,16} = \frac{21}{4}$;
tg ∠B = $\frac{\sqrt{21}}{2}$;

Iš stataus ΔMBC tg ∠B = $\frac{CM}{MB}$;
CM = MB · tg ∠B = $2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{2} = \sqrt{21}$;

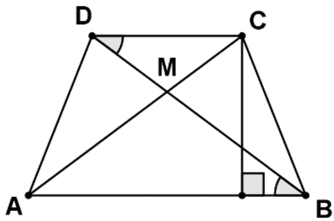
Iš stataus Δ ACM : $AC^2 = CM^2 + AM^2$;
AM = AB – MB = 12 – 2 = 10 (cm);

AC = $\sqrt{21 + 100} = 11$ (cm);

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot CM = \frac{1}{2}(12 + 8) \cdot \sqrt{21} = 10\sqrt{21}$ (cm²);

Ats.: 11 cm; $10\sqrt{21}$ cm².

222. Lygiašonės trapecijos įstrižainių susikirtimo taškas dalija įstrižainę santykiu 1:2. Apskaičiuokite trapecijos plotą, jei jos šoninė kraštinė lygi 5cm, o aukštinė – 3 cm.



Duota: trapecija ABCD;
AD = BC = 5 cm; $AC \cap BD = M$;
AM : MC = 2 : 1; CL ⊥ AB;
CL = 3 cm.

Apskaičiuoti: $S_{ABCD.}$

Sprendimas:

Iš stataus ΔCLB: $\mathrm{LB}^2 = \mathrm{CB}^2 - \mathrm{CL}^2$; $\mathrm{LB} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (cm);

Pagal lygius kampus $\Delta\mathrm{AMB} \sim \Delta\mathrm{DMC}$ (DC || AB, ∠CDB = ∠DBA ir ∠DMC = ∠AMB).

Vadinasi $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{DC}} = \frac{2}{1}$;   AB = 2DC;

$\mathrm{LB} = \frac{1}{2}(\mathrm{AB} - \mathrm{DC}) = \frac{1}{2}(2\mathrm{DC} - \mathrm{DC}) = \frac{1}{2}\mathrm{DC}$;

$\frac{1}{2}\mathrm{DC} = 4$; DC=8 (cm).

AB=16 cm;

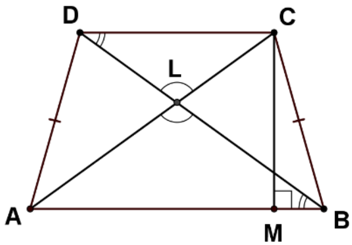
$S_{\mathrm{ABCD}} = \frac{1}{2}(\mathrm{AB} + \mathrm{DC}) \cdot \mathrm{CL} = \frac{1}{2}(16 + 8) \cdot 3 = 36$ (cm^2).

Ats.: 36 cm^2.

223. Apskaičiuokite lygiašonės trapecijos plotą, jei jos šoninė kraštinė lygi 30 cm, aukštinė - 24 cm, o įstrižainių susikirtimo taškas dalija įstrižainę santykiu 3:7.

Duota: trapecija ABCD;
AD = BC = 30 cm; CM ⊥ AB;
CM = 24 cm; $AC \cap DB = L$;
AL:LC = 7:3.

Apskaičiuoti: $S_{ABCD.}$



Sprendimas:

Iš stataus ΔMBC: $MB^2 = BC^2 - CM^2$;
$MB = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{6 \cdot 54} = 18\ (cm)$;

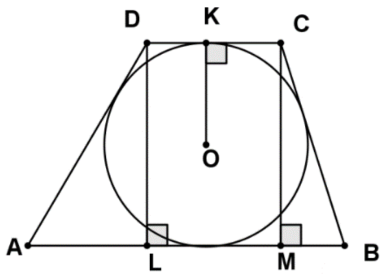
Pagal lygius kampus $\Delta ABL \sim \Delta CDL$ (DC || AB, ∠DLC = ∠ALB, kryžminiai ir ∠CDL = ∠LBA, atitinkamieji).
Vadinasi $\frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{LC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{DC}} = \frac{7}{3}$; $\mathrm{AB} = \frac{7}{3}\mathrm{DC}$;

$\mathrm{MB} = \frac{1}{2}(\mathrm{AB} - \mathrm{DC}) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}\mathrm{DC} - \mathrm{DC}\right) = \frac{2}{3}\mathrm{DC}$;
$\frac{2}{3}\mathrm{DC} = 18$;
DC = 27 (cm).

$\mathrm{AB} = \frac{7}{3} \cdot 27 = 63(\mathrm{cm})$.
$S_{\mathrm{ABCD}} = \frac{1}{2}(\mathrm{AB} + \mathrm{DC}) \cdot \mathrm{CM} = \frac{1}{2}(63 + 27) \cdot 24 = 1080\ (\mathrm{cm}^2)$.

Ats.: 1080 (cm^2).

224. Trapecijos pagrindų skirtumas lygus 14 cm, o šoninės kraštinės lygios 13 cm ir 15 cm. Į šią trapeciją galima įbrėžti apskritimą. Apskaičiuokite šio apskritimo spindulį.



Duota: trapecija ABCD; $AB - CD = 14\ (cm)$; BC = 13 (cm); AD = 15 (cm); apskritimas O.

Apskaičiuoti: OK.

Sprendimas:

CM statmena į AB; DL statmena į AB.
CM= DL=2·OK (į trapeciją įbrėžto apskritimo skersmuo lygus trapecijos aukštinei).

$\mathrm{AL} + \mathrm{MB} = \mathrm{AB} - \mathrm{DC} = 14$; $\mathrm{AL} = 14 - \mathrm{MB}$;

Iš stataus $\Delta\mathrm{ADL}$: $\mathrm{DL}^2 = \mathrm{AD}^2 - \mathrm{AL}^2$

Iš stataus $\Delta\mathrm{CMB}$: $\mathrm{CM}^2 = \mathrm{CB}^2 - \mathrm{MB}^2$;
$15^2 - (14 - \mathrm{MB})^2 = 13^2 - \mathrm{MB}^2$;
$15^2 - 13^2 = (14 - \mathrm{MB})^2 - \mathrm{MB}^2$;

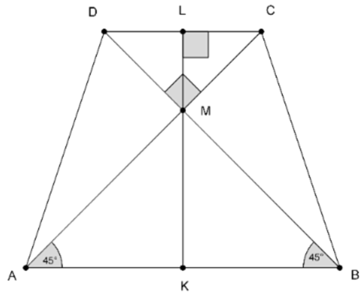
(15 + 13)(15 - 13) = (14 – MB - MB)(14 – MB + MB);

28 · 2 = (14 - 2MB) · 14;
14 - 2MB = 4;
MB = 5 (cm);

$\mathrm{CM} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (cm); OK = 6 (cm);

Ats.: 6 cm.

225. Vienas lygiašonės trapecijos pagrindas lygus 40cm, o kitas – 24cm. Trapecijos įstrižainės viena kitai statmenos. Apskaičiuokite trapecijos plotą.



Duota: trapecija ABCD;
DC = 24cm; AC ⊥ BD; AD = BC.

Apskaičiuoti: S_{ABCD}.

Sprendimas:

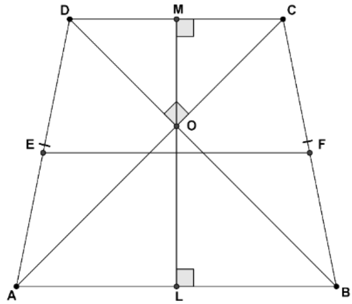
Lygiašonės trapecijos įstrižainės yra lygios, todėl AM = BM DM = CM; LK ⊥ AB.

ML = DL = $\frac{1}{2}$ DC;
MK = AK = $\frac{1}{2}$AB;
LK = ML + MK = $\frac{1}{2}$ (AB + DC).

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot LK = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot \frac{1}{2}(AB + DC) =$
$= \frac{1}{4}(AB + DC)^2 = \frac{1}{4}(40 + 24)^2 = 1024\ (cm^2)$.

Ats.: 1024 cm^2.

226. Lygiašonės trapecijos vidurinės linijos ilgis lygus 15 cm, o įstrižainės viena kitai statmenos. Apskaičiuokite trapecijos plotą.



Duota: trapecija ABCD; AD = BC; AE = ED; BF = FC; EF = 15cm.

Apskaičiuoti: $S_{ABCD.}$

Sprendimas:

Lygiašonės trapecijos įstrižainės lygios: DB = AC.

ΔDOC ir ΔAOB – statūs ir lygiašoniai, tai OM ir OL yra pusiaukraštinės ir aukštinės, tai ΔDMO ir ΔBOL yra status lygiašoniai trikampiai.

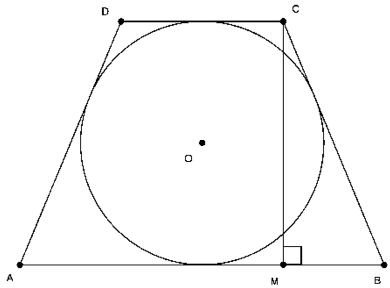
DM = MO ir OL = LB $\frac{1}{2}$AB.

EF = $\frac{1}{2}(DC + AB)$ = $\frac{1}{2}DC + \frac{1}{2}AB = MO + OL = ML.$

$S_{ABCD} = EF^2 = 16^2 = 256(cm^2)$.

Ats.: 256 cm^2**.**

227. Apie skritulį apibrėžtas lygiašonės trapecijos pagrindai lygūs 9cm ir 16 cm. Apskaičiuokite trapecijos plotą.



Duota: trapecija ABCD;
AD = BC; DC = 9cm;
AB = 16cm.

Apskaičiuoti: S_{ABCD}.

Sprendimas:

Kadangi apibrėžtinių keturkampių priešingų kraštinių sumos lygios, tai AD + CB = AB + DC;

AB + DC = 9 + 16 = 25 (cm);

AD = CB = 25 : 2 = 12.5 (cm);

$CM \perp AB$; $MB = \frac{1}{2}(AB - CD) = \frac{1}{2}(16 - 9) = 3.5$ (cm);

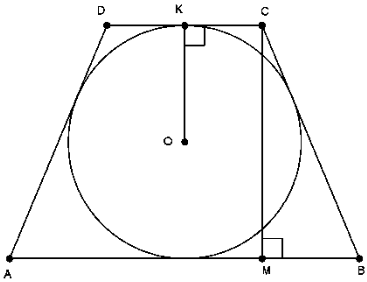
Iš stataus trikampio Δ CMB: $CM^2 = CB^2 - MB^2$;

$CM = \sqrt{12.5^2 - 3.5^2} = \sqrt{144} = 12$ (cm).

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot CM = \frac{1}{2}(16 + 9) \cdot 12 = 150\ (cm^2)$.

Ats.: 150 cm^2.

228. Apie skritulį apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios ilgesnysis pagrindas lygus 18cm. Apskaičiuokite trapecijos plotą, jei skritulio spindulys lygus 6cm.



Duota: trapecija ABCD;
AD = BC; AB = 18 cm;
apskritimas O; OK ⊥ DC;
OK = r = 6 cm.

Apskaičiuoti: S_{ABCD}.

Sprendimas:

CM ⊥ AB; CM = 2OK = 12cm;

$$MB = \frac{1}{2}(AB - DC) = 9 - \frac{1}{2}DC;$$

2BC = AB + DC; BC = $9 + \frac{1}{2}$ DC;

Iš statumo požymių CMB: $CM^2 = CB^2 - MB^2$;
$CM^2 = CB^2 - MB^2$;

$$12^2 = \left(9 + \frac{1}{2}\,DC\right)^2 - \left(9 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}DC\right)^2;$$

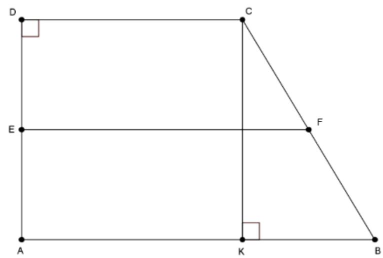
144 = 18 · DC;
DC = 8 cm.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot CM = \frac{1}{2}(18 + 8) \cdot 12 = 156(cm^2).$$

Ats.: 156 cm^2.

229. Stačiakampės trapecijos plotas lygus 20cm, vidurinė linija lygi 5cm, o smailiojo kampo sinusas lygus 0,4. Apskaičiuokite trapecijos parametrą.

Duota: trapecija ABCD;
$AD \perp AB$; $S_{ABCD} = 20cm^2$;
AE = ED; BF = FC; EF = 5cm;
$\sin\angle B = 0,4$.



Apskaičiuoti: P_{ABCD}.

Sprendimas:

$S_{ABCD} = EF \cdot AD$;

$5 \cdot AD = 20$; $AD = 4$(cm)

$CK \perp AB$; CK = AD = 4 cm (atstumai tarp lygiagrečių tiesių yra lygūs)

Iš stataus Δ CKB: $\sin\angle B = \frac{CK}{CB}$;

$$CB = \frac{CK}{\sin\angle B} = \frac{4}{0,4} = 10 \text{ (cm)};$$

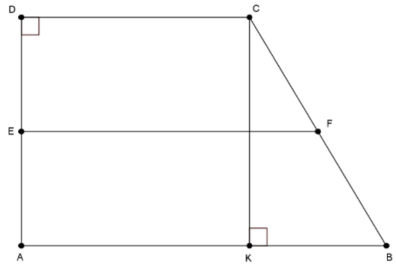
DC + AB = 2EF = 10 (cm);

P_{ABCD} = DC + AB + AD + CB = 10 + 4 + 10 = 24 (cm).

Ats .: 24 cm.

230. Stačiakampės trapecijos perimetras lygus 20cm, vidurinė linija lygi 6cm, o smailiojo kampo sinusas lygus $\frac{1}{3}$. Apskaičiuokite trapecijos aukštinės ilgį.

Duota: trapecija ABCD;
$AD \perp AB$; $P_{ABCD} = 20$cm;
AE = ED; BF = FC; EF = 6cm;
$\sin\angle B = \frac{1}{3}$.



Apskaičiuoti: AD.

Sprendimas:

AB + CD = 2EF = 12(cm);

$CK \perp AB$; CK = AD;

Iš st. Δ CKB: $\sin\angle B = \frac{CK}{CB}$; $\frac{1}{3} = \frac{AD}{CB}$; $CB = 3AD$;

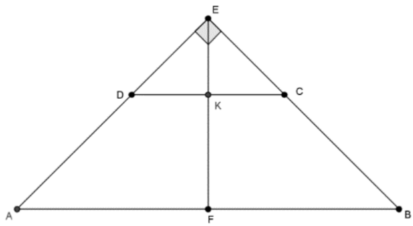
P_{ABCD} = AD + DC + AB + CB = 20;

AD + 12 + 3AD = 20;

4AD = 8 (cm); AD = 2 (cm).

Ats.: 2cm.

231. Lygiašonės trapecijos šoninių kraštinių tęsiniai susikerta stačiu kampu. Apskaičiuokite trapecijos apatinio pagrindo ilgį, jei jos viršutinis pagrindas yra 4cm ilgio, o aukštinė – 2cm ilgio.



Duota: ABCD – trapecija; AD = BC; DC = 4cm; KF⊥AB; KF = 2cm; AE⊥BE.

Apskaičiuoti: AB.

Sprendimas:

$\angle A = \angle B = 45°$

$KE = KD = \frac{1}{2} DC = 2(cm);$

$EF = EK + KF = 2 + 2 = 4(cm);$

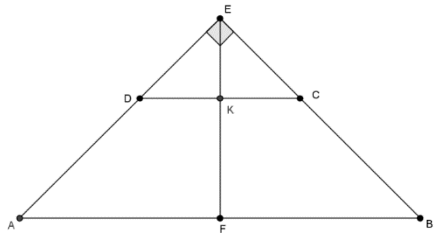
$AF = EF = 4(cm);$

$AB = 2AF = 8cm;$

Ats.: 8cm.

232. Lygiašonės trapecijos šoninių kraštinių tęsiniai susikerta stačiu kampu. Apskaičiuokite trapecijos aukštinės ilgį, jei trapecijos pagrindai yra 5cm ir 11cm ilgio.

Duota: trapecija ABCD;
AD = BC; AE⊥BE;
DC = 5cm; AB = 11cm;
KF⊥AB.



Apskaičiuoti: KF.

Sprendimas:

$\angle A = \angle B = 45°$;

$EF = AF = \frac{1}{2}AB = 5{,}5(\text{cm})$;

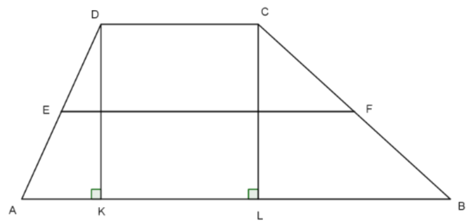
$EF = DK = \frac{1}{2}DC = 2{,}5(\text{cm})$;

$KF = EF – EK = 5{,}5 – 2{,}5 = 3(\text{cm})$;

Ats.: 3cm.

233. Trapecijos vidurinė linija lygi 18 cm, o šoninės kraštinės – 17 cm ir 25 cm. Apskaičiuokite trapecijos trumpesniojo pagrindo ilgį, jei jos plotas lygus 270 cm^2.

Duota: ABCD – trapecija;
AE = ED; BF = FC;
EF = 18 cm; AD = 17 cm;
BC = 25 cm; S_{ABCD} = 270 cm^2



Apskaičiuoti: DC.

Sprendimas:

$$EF = \frac{1}{2}(AB + DC);$$

$AB + DC = 36cm;\ \ DK \perp AB; CL \perp AB; DK = CL;$

$S_{ABCD} = EF \cdot DK;\ \ 18 \cdot DK = 270;\ \ DK = 15\ \ ;$
$AK^2 = AD^2 - DK^2;\ \ AK = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{2 \cdot 32} = 8(cm);$
$LB^2 = CB^2 - CL^2;\ \ LB = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{10 \cdot 40} = 20(cm);$

AB = DC + AK + LB; 2DC + AK + LB = 36;

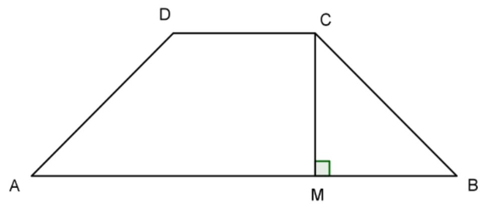
2DC = 36 – 8 – 20 = 8;

DC = 4cm.

Ats.: 4cm.

234. Lygiašonės trapecijos aukštinė lygi 8cm, o plotas lygus $120cm^2$. Apskaičiuokite trapecijos ilgesniojo pagrindo ilgį, jei jos smailusis kampas lygus 45°.

Duota: trapecija ABCD;
AD = BC;
$\angle A = \angle B = 45°$;
$S_{ABCD} = 120cm^2$;
$CM \perp AB$; $CM = 8cm$.



Apskaičiuoti: AB.

Sprendimas:

Iš stataus ⊿CMB: $\angle MCB = 45°$; $\Rightarrow$ $CM = MB = 8cm$.

AB = DC + 2MB;

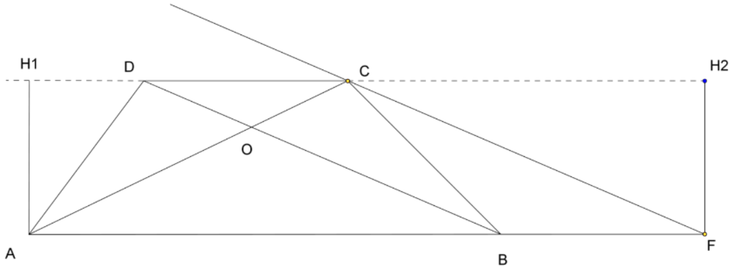
$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot CM$; $\frac{1}{2}(DC + 2MB + DC) \cdot 8 = 120$;

DC + M B = 15; DC = 15 – 8 = 7(cm)

AB = 7 + 2 · 8 = 25(cm).

Ats.: 25cm.

235. Per trapecijos ABCD mažesniojo pagrindo viršūnę C nubrėžta atkarpa lygiagreti įstrižainei BD ir kertanti tiesę AB taške F.
Įrodykite: a) $S_{ADC} = S_{CDF}$; b) $S_{ABCD} = S_{ACF}$; c) kampas tarp įstrižainių, esantis prieš didesnį pagrindą lygus $\angle ACF$.



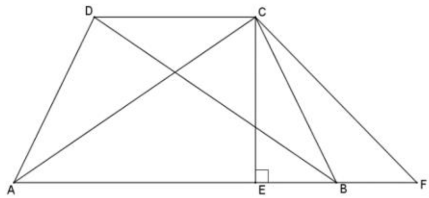
a) DC yra trikampio ADC ir DCF bendra kraštinė. AH1 ir FH2 yra lygios aukštinės. Vadinasi $S_{ADC} = S_{CDF}$
Įrodyta.

b) $S_{ABCD} = S_{ADC} + S_{ACF}$
$S_{ACF} = S_{ACB} + S_{CBF}$
(a) dalyje įrodyta, kad $S_{ADC} = S_{CDF}$, o ACB – bendras.
Vadinasi $S_{ABCD} = S_{ACF}$
Įrodyta.

c) Reikia įrodyti, kad $\angle AOB = \angle ACF$.
Atkarpa OB ir CF – lygiagrečios (iš sąlygos), AC – kirstinė.
$\angle AOB$ ir $\angle ACF$ – atitinkamieji.
Tai remiantis lygiagrečių tiesių teorema (jei dvi lygiagrečias tieses kertame trečia, tai susidarę atitinkamieji kampai yra lygūs).
$\angle AOB = \angle ACF$.
Įrodyta.

236. Lygiašonės trapecijos įstrižainė lygi 10 cm, o jos plotas lygus $48 cm^2$. Apskaičiuokite trapecijos aukštinę.

Duota: Trapecija ABCD; AD = BC; AC = BD = 10 cm; $S_{ABCD} = 48 cm^2$; $CE \perp AB$.



Apskaičiuokite: CE.

Sprendimas:

Lygiašonės trapecijos įstrižainės yra lygios. Pratęsiame AB ir atidedame BF = DC; DCFB – lygiagretainis (keturkampis, kurio dvi priešingos kraštinės yra lygiagrečios).

CF = DB = 10 cm; $S_{\Delta ACF} = S_{ABCD}$, nes $S_{\Delta CBF} = S_{\Delta ADC}$ (DC = BF, CE aukštinė)

Pažymime CE = h, AE = EF = c; ΔACF – lygiašonis.

$$\begin{cases} CE \cdot EF = SAFC; \\ CE^2 + EF^2 = CF^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c \cdot h = 48 \\ c^2 + h^2 = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c^2 + 2c \cdot h + h^2 = 196 \\ c \cdot h = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c+h)^2 = 196 \\ c \cdot h = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c+h = 14 \\ c \cdot h = 48 \end{cases}$$

$c = 14 - h$

$14h - h^2 = 48$

$h^2 - 14h + 48=0$

$h_1= 6; h_2 = 8$

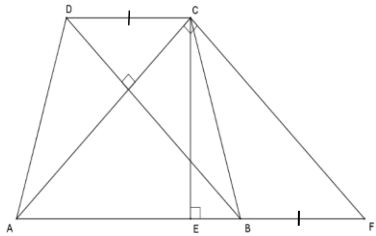
Ats.: 6 cm arba 8 cm.

237. Trapecijos įstrižainės statmenos viena kitai, aukštinė lygi 4, viena įstrižainė lygi 5. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

Duota: trapecija ABCD;
$AC \perp BD$, $CE \perp AB$; $AC = 5$,
$CE = 4$.

Apskaičiuokite: S_{ABCD}

Sprendimas:



Pratęsiu AB ir atidedame BF = DC.

BFCD – lygiagretainis, $S_{CBF} = S_{ACD}$, nes DC = BF, aukštinė CE – bendra kraštinė.

$S_{ABCD} = S_{ACF}$; $AC \perp CF$, nes $CF \parallel BD$.
$AE^2 = AC^2 - CE^2$;

$$AE = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3;$$

$$CE^2 = AE \cdot EF;$$

$$EF = \frac{CE^2}{AE} = \frac{16}{3};$$

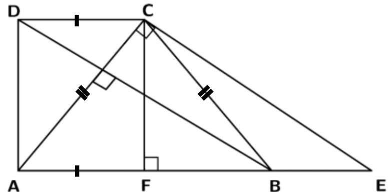
$$AF = AE + EF = 3 + \frac{16}{3} = \frac{25}{3};$$

$$S_{ABCD} = S_{AFC} = \frac{1}{2} AF \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{3} \cdot 4 = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$$

Ats.: $16\frac{2}{3}$ kv. vnt.

238. Stačiosios trapecijos įstrižainės statmenos tarpusavyje. Pagrindų santykis 4. Apskaičiuokite įstrižainių santykį.

Duota: trapecija ABCD;
$\frac{AB}{DC} = \frac{4}{1}$; AC $\perp$ DB .



Apskaičiuokite: $\frac{DB}{AC}$.

Sprendimas:

Pratęsiame kraštinę AB ir tęsinyje atidedame atkarpą BE = DC; DBEC – lygiagretainis Iš sąlygos AC $\perp$ DB, bet DB $\parallel$ CE, vadinasi AC $\perp$ CE.

AF = DC = BE; $\frac{AB}{DC} = \frac{4}{1}$; AB = 4DC;

AE = AB + BE; AE = 5DC; FE = 4DC;
CF aukštinė, tai CF $\perp$ AB; CF = AD;

$\triangle$ ACE status, tai $CF^2 = AF \cdot FE$;
$CF = \sqrt{DC \cdot 4DC} = 2DC$;

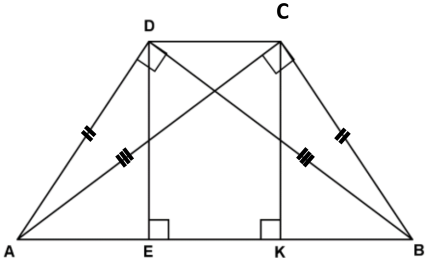
$\triangle$ ACF status , tai $AC^2 = AF^2 + CF^2$;
$AC = \sqrt{DC^2 + 4DC^2} = DC\sqrt{5}$;

$\triangle$ ADB status, tai $DB^2 = AD^2 + AB^2$;
$DB = \sqrt{DC^2 + 16DC^2} = DC\sqrt{17}$;
$\frac{DB}{AC} = \frac{DC\sqrt{17}}{DC\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{85}}{5}$.

Ats.: $\frac{\sqrt{85}}{5}$.

239. Lygiašonės trapecijos mažesnės pagrindas lygus 7cm, įstrižainė lygi 20cm ir ji yra statmena šoninei kraštinei. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

Duota: trapecija ABCD; DC = 7cm, AD = BC; AC ⊥ BC; AC = 20cm.



Apskaičiuokite: $S_{ABD.}$

Sprendimas:

DE ⊥ AB; CK ⊥ AB; ED = DC = 7cm; KB = AE = x; x > 0

△ACB status, tai $AC^2 = AB \cdot AK$; AB = 7+2x; AK = 7+x;

$20^2 = (7+2x) \cdot (7+x)$; $400 = 49 + 14x + 7x + 2x^2$;

$2x^2 + 21x - 351=0$;
$D = 21^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-351) = 57^2$;

$x_1 = \frac{-21+57}{4} = 9$; $x_2<0$;

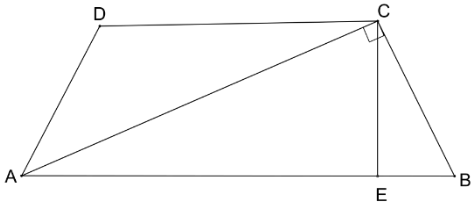
$AB = 7+2 \cdot 9 = 25$; $AD = 16$; $CK^2 = CA^2 - AK^2$;

$CK = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{36 \cdot 4} = 12$;

$S_{ABD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot CK = \frac{1}{2}(25+7) \cdot 12 = 192\ (cm^2)$.

Ats.: 192 cm^2.

240. Lygiašonės trapecijos įžambinė statmena šoninei kraštinei. Pagrindų kvadratų skirtumas a². Apskaičiuokite aukštinę.



Duota: $AB^2 - DC^2 = a^2$;

$CE \perp AB$.

Apskaičiuokite : CE.

Sprendimas:

$EB = \frac{1}{2}(AB - CD)$;

$AE = AB - EB = AB - \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}(AB + CD)$;

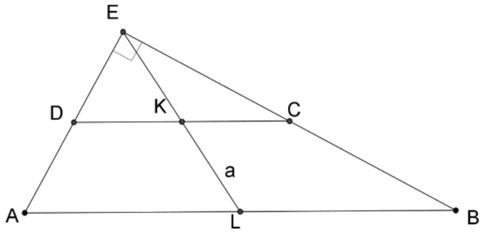
Iš statinio ΔABC; $CE^2 = AE \cdot EB$;

$CE^2 = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot \frac{1}{2}(AB - CD) = \frac{1}{4}(AB^2 - CD^2) = \frac{1}{4}$ a.

Ats. : $\frac{1}{2}a$.

241. Trapecijos kampų prie didesnio pagrindo suma 90°. Vidurinė linija lygi m. Atkarpa, jungianti pagrindų vidurio taškus, lygi a. Apskaičiuoti trapecijos pagrindus.

Duota : trapecija ABCD; ∠A + B ═ 90°; AE ═ ED; BF ═ FC; EF ═ m; DK ═ KC; AL ═ LB; KL ═ a.



Apskaičiuoti : DC, AB.

Sprendimas:

∠A + ∠B = 90°, vadinasi ∠E = 90°, tai ΔAEB – status ir ΔDEC – status.

EL yra ΔAEB pusiaukraštinė, tai EL = $\frac{1}{2}\ AB$, o EK yra ΔDEC pusiaukraštinė, tai EK = $\frac{1}{2}DC$.

Tegul DK = x (x > 0) , o EK = y (y > 0).
Tada turime, kad EL = a + x , DC = 2x.

AD = 2m – 2x ir EL = $\frac{1}{2}\ AD\ =\ \frac{1}{2}$ (2m – 2x) = m – x.

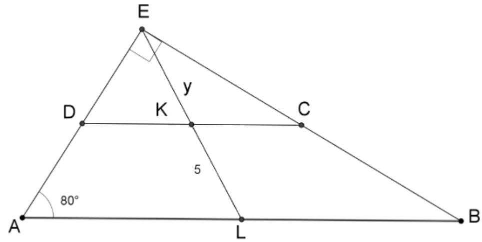
Sulyginame EL išreikštuosius ir gauname a + x = m – x; 2x = m – a
DC = m – a , o AB = 2m – (m – a) = 2m – m + a = m + a.

Ats.: m – a ir m + a.

242. Trapecijos kampai prie mažesnio pagrindo 170° ir 100°. Vidurio linija lygi 10 cm. Atkarpa, jungianti pagrindų vidurio taškus, lygi 5 cm. Apskaičiuokite trapecijos pagrindus.

Duota: trapecija ABCD;
∠D = 100° ; AE = ED;
EF = 10 cm; DK = KC ;
AL = LB; KL = 5 cm;

Apskaičiuoti: AB, DC;



Sprendimas:

DC + AB = 2 · 10 = 20 (cm);
DC = x (x > 0) , todėl AB = 20 – x;
EK = y (y > 0);

Iš ΔDEC : $y = \frac{1}{2}$ DC $= \frac{1}{2} x$;
Iš ΔAEL ; EL = y + 5 ;

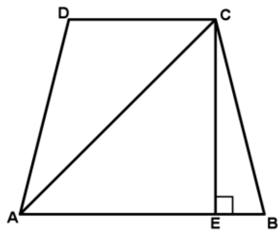
EL $= \frac{1}{2}$ AB $= \frac{1}{2}(20 - x) = 10 - \frac{1}{2}x = 10 - y$.

Tada y + 5 = 10 – y;
2y = 5; y = 2,5 cm, tai $\frac{1}{2}x = 2{,}5$;
x = 5 cm, DC = 5 cm;
AB = 20 – 5 = 15 cm;

Ats.: 5 cm ; 15 cm.

243. Lygiašonės trapecijos šoninė kraštinė lygi 10cm. Įstrižainė dalija plotą santykiu 3:7. Apskaičiuokite aukštinę, jei įstrižainės ilgis lygus 17cm.

Duota: trapecija ABCD; AD=BC=10 cm; AC=17 cm; CE $\perp$ AB; $S_{ACD} : S_{ACB} = 3 : 7$



Apskaičiuoti : CE

Sprendimas:

$S_{ACD} = \frac{1}{2}$ DC $\cdot$ CE; $S_{ABC} = \frac{1}{2}$ AB $\cdot$ CE;

$\frac{SACD}{SABC} = \frac{0,5\ DC \cdot CE}{0,5\ AB \cdot CE} = \frac{3}{7}$; $\frac{DC}{AB} = \frac{3}{7}$; AB = $\frac{7}{3}$ DC;

EB = $\frac{1}{2}$ (AB-DC) = $\frac{1}{2}$ ($\frac{7}{3}$ DC – DC) = $\frac{2}{3}$ DC ;

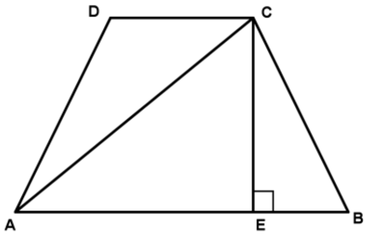
Iš stačiojo Δ ACE : $CE^2=AC^2-AE^2$;
AE = AB – EB = $\frac{7}{3}$ DC - $\frac{2}{3}$ DC = $\frac{5}{3}$ DC ;

Iš stačiojo Δ CEB : $CE^2=CB^2-EB^2$;
$AC^2-AE^2 = CB^2-EB^2$;

289 - $\frac{25}{9}$ DC^2 = 100 - $\frac{4}{9}$ DC^2 ; $\frac{21}{9}$ DC^2 = 189; DC = 9 (cm);

EB = $\frac{2}{3} \cdot 9 = 6$ (cm);
CE = $\sqrt{100-36}$ = 8 (cm).
Ats.: 8 cm.

244. Lygiašonės trapecijos šoninė kraštinė lygi 26 dm. Įstrižainė dalija plotą santykiu 2 : 7. Apskaičiuokite trapecijos plotą, jei įstrižainė lygi 30 dm.



Duota: trapecija ABCD; AD= BC = 26dm; $S_{ACD} : S_{ABC} = 2 : 7$;
AC = 30 dm.

Apskaičiuoti: S_{ABCD}.

Sprendimas:

$\frac{SADC}{SABC} = \frac{0{,}5\ DC \cdot CE}{0{,}5\ AB \cdot CE} = \frac{2}{7}$;
$\frac{DC}{AB} = \frac{2}{7}$; $AB = \frac{7}{2} DC$;

$EB = \frac{1}{2}(AB - DC) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2} DC - DC\right) = \frac{5}{4} DC$;
$AE = AB - EB = \frac{7}{2} DC - \frac{5}{4} DC = \frac{9}{4} DC$;

Iš stačiojo Δ ACE : $CE^2 = AC^2 - AE^2$;
Iš stačiojo Δ ECB : $CE^2 = CB^2 - EB^2$;

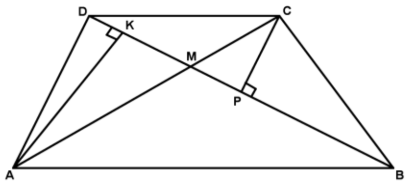
$AC^2 - AE^2 = CB^2 - EB^2$;
$30^2 - \frac{81}{16} DC^2 = 26^2 - \frac{25}{16} DC^2$;
$\frac{56}{16} DC^2 = 56 \cdot 4$; $DC = 8$ (dm);
$AB = \frac{7}{2} \cdot 8 = 28$ (dm) ;

$CE = \sqrt{30^2 - 18^2} = \sqrt{48 \cdot 12} = 24$ (dm);

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot CE = \frac{1}{2}(28 + 8) \cdot 24 = 432$ (dm).
Ats.: 432 dm^2.

245. Įstrižainės dalija trapeciją į keturis trikampius. Apskaičiuokite trapecijos plotą, jei prie pagrindų esančių trikampių plotai yra 4cm^2 ir 9 cm^2.

Duota : trapecija ABCD;
S_{DMC} = 4 cm^2;
AC ∩ BD = M; S_{ABM} = 9 cm^2.



Apskaičiuoti: S_{ABCD}.

Sprendimas:

CP ⊥ DB ; AK ⊥ DB;

DC ‖ AB, DB – kirstinė, tai priešiniai kampai CDB ir DBA yra lygūs;

∠DMC = ∠BMA , nes kryžminiai kampai.
Tai pagal 2 lygius kampus ΔDMC ~ ΔBMA;

$$\frac{S_{\Delta DMC}}{S_{\Delta BMA}} = \left(\frac{DM}{BM}\right)^2 = \frac{4}{9}\ ;$$

$\frac{DM}{BM} = \frac{2}{3}$; BM = $\frac{3}{2}$ DM ; DM = $\frac{2}{3}$ BM ;

$S\Delta_{DMC} = \frac{1}{2}$ DM · CP = 4 (cm^2)

$S\Delta_{CMB} = \frac{1}{2}$ BM · CP = $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}$ DM · CP = $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$DM · CP = $\frac{3}{2} \cdot 4 = 6$ (cm^2)

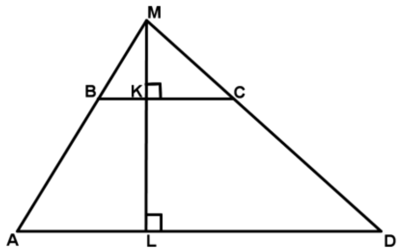
$S_{ABM} = \frac{1}{2}$ · BM · AK = 9 (cm^2) ;

$S_{ADM} = \frac{1}{2} DM \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} MB \cdot AK = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} MB \cdot AK = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6\ (cm^2)$

$S_{ABCD} = S_{DMC} + S_{AMB} + S_{AMD} + S_{BMC} = 4 + 9 + 6 + 6 = 25\ (cm^2)$.

Ats.: 25 cm^2 .

246. Trapecijos ABCD (AD ║ BC) pagrindų santykis 5:3. S_{AMD} = 50 cm2. Taškas M yra tiesių AB ir CD susikirtimo taškas. Apskaičiuokite trapecijos plotą.



Duota: trapecija ABCD;
AD ║ BC; AD : BC = 5:3;
AB ∩ CD = M;
$S_{AMD} = 50$ cm^2.

Apskaičiuoti : S_{ABCD} .

Sprendimas:

BC ║ AD, MD – kirstinė, tai ∠MCB = ∠MDA, nes priešiniai kampai.
<M – bendras, tai pagal 2 lygius kampus ΔBMC ∼ ΔMAD;

$$\frac{S_{AMD}}{S_{BMC}} = \left(\frac{AD}{BC}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2;$$

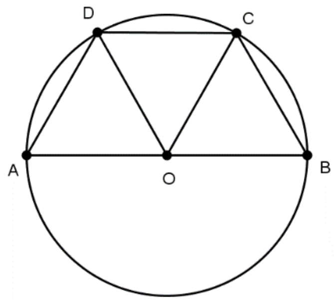
$$\frac{50}{S_{BMC}} = \frac{25}{9}\ ;$$

S_{BMC} = 18 (cm^2);

$S_{ABCD} = S_{AMD} – S_{BMC}$ = 50-18 = 32 (cm^2).

Ats.: 32 cm^2.

247. Į skritulį, kurio spindulys R, įbrėžta lygiašonė trapecija. Ilgesnysis pagrindas sutampa su skritulio skersmeniu. Apskaičiuokite trapecijos plotą, kai jos kampas prie pagrindo lygus 60°.



Duota: skritulys O; trapecija ABCD; AD=BC; ∠A=∠B=60°.

Apskaičiuoti: S_{ABCD}.

Sprendimas:

Nubrėžti spindulius OC ir OD.

OC=OB=OA=OD=R;

∠OBC=∠OCB=60° ⇒ΔOCB – lygiakraštis, analogiškai ir ΔAOD – lygiakraštis.

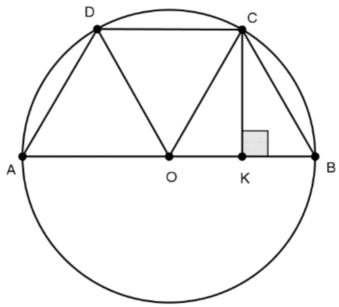
∠OCD=∠ODC=120°-60°=60°; ⇒ ΔODC – lygiakraštis;

$S_{ABCD}=3S_{OBC}=3\cdot\frac{OB^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

Ats.: $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

248. Trapecijos pagrindai 20cm ir 12cm. Apie trapeciją apibrėžto apskritimo centras priklauso didesniajam pagrindui. Apskaičiuokite trapecijos įstrižaines ir šonines kraštines.

Duota: trapecija ABCD; O∈AB; apskritimas O; AB=20cm; DC=12cm.



Apskaičiuoti: AD; BC; AC; BD

Sprendimas:

Trapecija ABCD – lygiašonė, nes AB||DC ⇒ AD=BC (lankai tarp II stygų yra lygūs).

Be to AB + DC = AD + BC;

20 + 12 = 2BC;
BC = 16cm;

AD = 16cm; CK⊥AB; KB= $\frac{1}{2}$ (20-12)=4(cm);

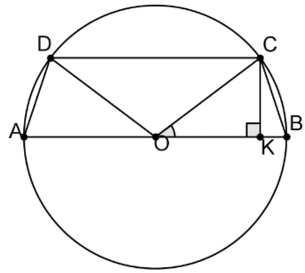
AK = AB – KB = 20 – 4 = 16(cm).

Iš stataus ΔACK: $CK^2 = CB^2 - KB^2 = 16^2 - 4^2$;

$CK = \sqrt{12 \cdot 20} = \sqrt{240}$; $AC = \sqrt{16^2 + 16^2 + 4^2} = \sqrt{496} = 4\sqrt{31}$ (cm).

Ats.: 16cm; 16cm; $4\sqrt{31}$ cm; $4\sqrt{31}$ cm.

249. Apskaičiuokite lygiašonės trapecijos plotą, jeigu jos aukštinė lygi $12\sqrt[4]{3}$, o šoninė kraštinė iš apibrėžto apie trapeciją apskritimo centro matoma $60°$ kampu.



Duota: trapecija ABCD;
AD = BC; ∠COB=60°; CK⊥AB;
$CK = 12\sqrt[4]{3}$.

Apskaičiuoti: S_{ABCD}.

Sprendimas:

OB = OC = OA - to paties apskritimo spinduliai.

$$\angle OCB = \angle OBC = \frac{1}{2}(180° - 60°) = 60° \Rightarrow \Delta OBC - \text{lygiakraštis.}$$

$$\text{Iš stataus } \Delta OCK: \sin\angle COK = \frac{CK}{OC}; OC = \frac{CK}{\sin\angle COK} = \frac{12\sqrt[4]{3}}{\sin 60°} =$$

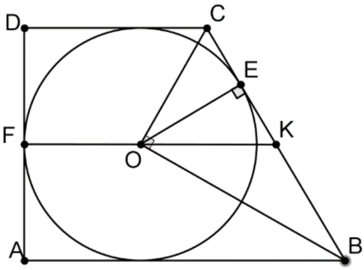
$$= \frac{12\sqrt[4]{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 24\sqrt[4]{\frac{1}{3}}.$$

$$\Delta AOD = \Delta OCB \Rightarrow \angle DOC = 60°, OC = OD \Rightarrow \Delta DOC - \text{lygiakraštis.}$$

$$S_{ABCD} = 3 \cdot S_{\Delta COB} = 3 \cdot \frac{OC^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{24^2\sqrt{\frac{1}{3}}}{4} = 144\sqrt{3}\ (\text{kvad. vnt.})$$

Ats.: $144\sqrt{3}$ kvadr. vnt.

250. Į stačiąją trapeciją įbrėžto apskritimo centras nutolęs nuo šoninės kraštinės galų per 8 cm ir 4 cm. Apskaičiuokite trapecijos vidurio liniją.



Duota: trapecija ABCD;
OC = 4 cm; OB = 8 cm;
AD⊥AB;
AF =F D; BK = KC.

Apskaičiuoti: FK**.**

Sprendimas:

$\angle COK = 90°, nes\ \angle COK = \frac{1}{2}(\angle C + \angle B) -$ įbrėžto apskritimo centras yra pusiaukampinių susikirtimo taške.

$\mathrm{CB}^2 = \mathrm{OC}^2 + \mathrm{OB}^2; \mathrm{CB} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$(cm).

$$\mathrm{OC}^2 = \mathrm{CB} \cdot \mathrm{CE}; \mathrm{CE} = \frac{\mathrm{OC}^2}{\mathrm{CB}} = \frac{16}{4\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}\ \text{(cm)};$$

$$\mathrm{OE}^2 = \mathrm{OC}^2 - \mathrm{CE}^2; \mathrm{OE} = \sqrt{16 - \frac{16}{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}\ \text{(cm)};$$

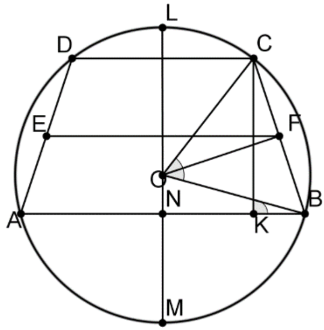
$$\mathrm{CK} = \mathrm{KB} = \frac{1}{2}\mathrm{CB} = 2\sqrt{5}; \mathrm{OE} = \mathrm{OF};$$

$$\mathrm{OK} = \mathrm{CK} = \mathrm{R};$$

$$\mathrm{FK} = \mathrm{OF} + \mathrm{OK} = \frac{8\sqrt{5}}{5} + 2\sqrt{5} = \frac{18\sqrt{5}}{5}\ (cm).$$

Ats.: $\frac{18\sqrt{5}}{5}$ cm.

251. Lygiašonės trapecijos pagrindų santykis $\frac{5}{12}$. Aukštinė lygi 17 cm. Vidurio linija lygi aukštinei. Apskaičiuokite apie trapeciją apibrėžto apskritimo spindulį.



Duota: trapecija ABCD;
CK⊥AB; CK = 17cm; AD = BC;
AE = ED; BF = FO; EF = CK;
$\mathrm{DC} : \mathrm{AB} = \frac{5}{12}$.

***Apskaičiuoti*:** OB.

Sprendimas:

$\mathrm{DC} = 5\mathrm{x}; \mathrm{AB} = 12\mathrm{x};$

$$\mathrm{EF} = \frac{1}{2}(\mathrm{AB} + \mathrm{DC});$$

$$17 = \frac{1}{2} \cdot 17\mathrm{x}; \mathrm{x} = 2;$$

$\mathrm{DC} = 10; \mathrm{AB} = 24.$
$\mathrm{AN} = \mathrm{NB} = 12; \mathrm{ON} = \mathrm{x};$

$\mathrm{LN} = \mathrm{R} + \mathrm{x}; \mathrm{MN} = \mathrm{R} - \mathrm{x}; \mathrm{AN} \cdot \mathrm{NB} = \mathrm{LN} \cdot \mathrm{DB};$

$12^2 = (\mathrm{R} + \mathrm{x})(\mathrm{R} - \mathrm{x});$
$\mathrm{R}^2 - \mathrm{x}^2 = 144; \mathrm{R}^2 - 4 = 144; \mathrm{R}^2 = 148;$
$\mathrm{R} = 2\sqrt{37}$

$\mathrm{OB} = 2\sqrt{37};$

Ats.: $2\sqrt{37}$.