Lietuvos matematikos mokytojų asociacija

P. Grebeničenkaitė

Stereometrijos kurso sisteminimas

Vilnius „Eugrimas“ 1996

UDK 514.1
Gr-189

Autorė

Petrutė Grebenčikaitė, mokytoja ekspertė

Recenzentai

Valerijonas Dumskis, ŠPI vyr. asistentas
Regina Plevokienė, Šiaulių Didždvario vidurinės m-klos
mokytoja metodininkė

ISBN 9986-752-00-0

Pratarmė

Leidinėlis skiriamas jauniems matematikos mokytojams, o taip pat moksleiviams, besirengiantiems brandos ir stojimo į aukštąsias mokyklas egzaminams. Rinkinyje pateikiama medžiaga leidžia susisteminti stereometrijos kurso žinias, atkreipia mokytojų dėmesį į dažniausiai moksleivių daromas klaidas.

Kiekvienas skyrius pradedamas trumpai išdėstyta teorine medžiaga, o po to pateikiami uždaviniai, jų sprendimai.

Didaktinė medžiaga pateikta A ir B lygiais. Autorė tiki, kad leidinėlis padės jaunam mokytojui rasti racionalesnį šio nelengvo kurso mokymo metodą, o moksleiviams – ugdyti erdvinę vaizduotę. Dėkoju recenzentams ir leidėjams, padėjusiems parengti šį leidinį.

Autorė

Stereometrija. Aksiomos. Išvados iš aksiomų

Informacinė medžiaga

1. Stereometrija nagrinėja erdvėje esančias figūras.
2. Stereometrijos kurse vartojamos pirminės sąvokos: taškas, tiesė, plokštuma.
3. Per tris taškus, nepriklausančius vienai tiesei, eina vienintelė plokštuma.
4. Tiesė, nubrėžta per du plokštumos taškus, yra toje plokštumoje.
5. Jeigu dvi plokštumos turi bendrą tašką, tai jos susikerta tiese, einančia per tą tašką.
6. Per tiesę ir jai nepriklausantį tašką galima nubrėžti vienintelę plokštumą.
7. Per dvi susikertančias tieses galima nubrėžti vienintelę plokštumą.
8. Per dvi lygiagrečias tieses galima nubrėžti vienintelę plokštumą.

Lygiagrečios tiesės erdvėje

1. Dvi tiesės erdvėje vadinamos lygiagrečiomis, jei jos yra vienoje plokštumoje ir nesusikerta.
2. Tiesės, kurios nesusikerta ir nėra vienoje plokštumoje, vadinamos prasilenkiančiomis.
3. Per tašką, esantį šalia tiesės, galima nubrėžti tik vieną tiesę, lygiagrečią duotajai.
4. Jeigu dvi tiesės lygiagrečios trečiajai, tai jos lygiagrečios ir viena kitai.

Tiesės ir plokštumos lygiagretumas

1. Tiesė ir plokštuma vadinamos lygiagrečiomis, jeigu jos nesusikerta.
2. Jeigu tiesė yra lygiagreti plokštumoje esančiai tiesei, tai ji lygiagreti ir tai plokštumai.

Plokštumų lygiagretumas

1. Dvi plokštumos vadinamos lygiagrečiomis, jeigu jos nesusikerta.
2. Dvi plokštumos lygiagrečios, jeigu viena jų lygiagreti kitoje plokštumoje esančioms dviem susikertančioms tiesėms.
3. Jeigu dvi lygiagrečias plokštumas kerta trečioji plokštuma, tai jų susikirtimo linijos yra lygiagrečios.
4. Per plokštumos tašką galima nubrėžti vieną ir tik vieną jai lygiagrečią plokštumą.

Tiesių statmenumas. Tiesės ir plokštumos statmenumas

1. Dvi tiesės erdvėje vadinamos statmenomis, jeigu jos sudaro 90° kampą.
2. Jei viena iš dviejų lygiagrečiu tiesių statmena trečiajai tiesei, tai ir kita tiesė statmena tai tiesei.

3. Tiesė, statmena kiekvienai plokštumoje esančiai tiesei, vadinama tai plokštumai statmena tiese.

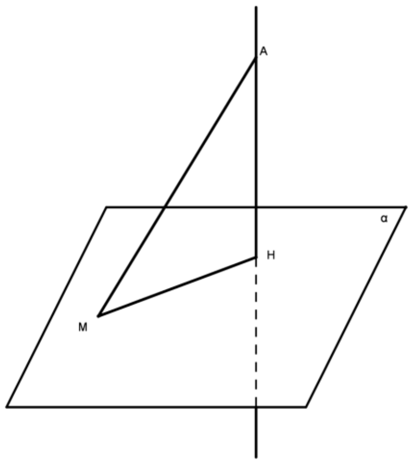
4. Jei viena iš dviejų tiesių yra statmena tai plokštumai, tai ir kita tiesė statmena tai plokštumai.

5. Jei tiesė statmena dviem susikertančioms tiesėms, esančioms plokštumoje, tai ji statmena ir tai plokštumai.

6. Per kiekviena erdvės tašką galima nubrėžti tik vieną plokštumai statmeną tiesę.

Statmuo ir pasvirosios

1. Nagrinėkime plokštumą α ir tašką A, nepriklausantį tai plokštumai. Per tašką A nubrėžkime tiesę, statmeną plokštumai α. Tos tiesės ir plokštumos α susikirtimo tašką pažymėkime raide H (1 pav.). Atkarpa AH vadinama statmeniu, nubrėžtu iš taško A į plokštumą α, o taškas H – to statmens pagrindu. Plokštumoje α pažymėkime kurį nors tašką M, nesutampantį su tašku H. Nubrėžkime atkarpą AM. Ji vadinama pasvirąja, nubrėžta iš taško A į plokštumą α. Atkarpa HM vadinama pasvirosios projekcija plokštumoje α.



1 pav.

2. Statmuo, nubrėžtas iš taško į plokštumą, yra trumpesnis už kiekvieną pasvirąją, nubrėžtą iš to taško į tą pačią plokštumą.

3. Statmens, nubrėžto iš taško A į plokštumą α, ilgis vadinamas atstumu nuo taško A iki plokštumos α.

4. Tiesė, nubrėžta plokštumoje per pasvirosios pagrindą ir statmena jos projekcijai toje plokštumoje, yra statmena pasvirajai. Ir atvirkščiai, jeigu tiesė, nubrėžta plokštumoje per pasvirosios pagrindą yra statmena pasvirajai, tai ji statmena ir jo projekcijai (trijų statmenų teorema).

Uždaviniai

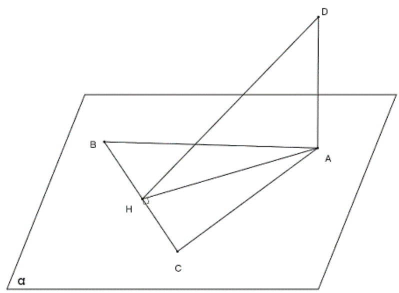
1. Lygiašonio trikampio ABC pagrindas BC lygus 12 m, šoninė kraštinė – 10 m. Iš viršūnės A nubrėžta atkarpa AD, statmena plokštumai ABC ir lygi 6 m. Raskite atstumą nuo taško D iki kraštinės BC.

Sprendimas.

1. Plokštumoje ABC nubrėžiame AH, statmeną BC (2 pav.). Taškus D ir H sujungiame atkarpa.

2. Pagal trijų statmenų teoremą DH statmena BC, nes AH statmena BC (DH – ieškomasis atstumas).

3. Iš stačiojo trikampio ADH:



2 pav.

$DH^2 = AD^2 + AH^2$,

$AD = 6$.

4. Iš stačiojo trikampio ACH:

$AH^2 = AC^2 – CH^2$,

$AH^2 = 10^2 – 6^2 = 64$

AH = 8 m.

5. $DH^2 = 6^2 + 8^2 = 100$

DH = 10 m.

Ats.: 10 m.

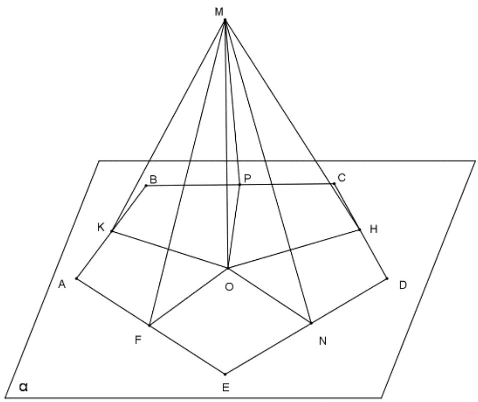
2. Taškas vienodu atstumu nutolęs nuo visų daugiakampio kraštinių. Įrodykite, kad jo projekcija sutampa su įbrėžto į daugiakampį apskritimo centru.

Sprendimas.

1. MK statmena AB, MP statmena BC, MH statmena CD, ... (3 pav.).

2. MK = MP = MH = … , MO statmena ABCDE.

3. Įrodykime, kad taškas O yra apskritimo, įbrėžto į daugiakampį ABCDE, centras. Pakanka įrodyti, kad taškas O vienodu atstumu nutolęs nuo visų šio daugiakampio kraštinių.



3 pav.

4. Sujungiame tašką O su daugiakampio ABCD... kraštinių taškais K, P, H, ... Tada OK statmena AB, OP statmena BC, OH statmena CD, ... (atvirkštinė trijų statmenų teorema).

5. OK = OP = OH = … (kaip lygiųjų pasvirųjų MK, MP, ... projekcijos).

6. Aišku, kad taškas O vienodu atstumu nutolęs nuo daugiakampio ABCD... kraštinių, t.y., O – įbrėžto apskritimo centras.

Didaktinė medžiaga

B lygis

1. Iš vieno taško nubrėžtos dvi pasvirosios. Jų atkarpų nuo to taško iki susikirtimo su plokštuma ilgiai yra 15 cm ir 20 cm. Vienos atkarpos projekcija plokštumoje lygi 16 cm. Rakite kitos atkarpos projekciją.

Ats.: 9 cm.

2. Į trikampį įbrėžto apskritimo spindulys lygus 0,7 m. Iš apskritimo centro nubrėžtas statmuo į trikampio plokštumą. Statmens ilgis – 2,4 m. Raskite atstumą nuo to statmens galo iki trikampio kraštinių.

Ats.: 2,5 m.

3. Iš lygiakraščio trikampio ABC viršūnės A nubrėžtas statmuo AD į trikampio plokštumą AD lygus 13 cm, BC – 6 cm. Apskaičiuokite atstumą nuo taško D iki kraštinės BC.

Ats.: 14 cm.

4. Iš stačiakampio ABCD viršūnės A nubrėžtas statmuo AK jo plokštumai. Atstumai nuo taško K iki kitų stačiakampio viršūnių lygūs 6 m, 7 m ir 9 m. Apskaičiuokite statmens AK ilgį.

Ats.: 2 m.

5. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 6 m, šoninė kraštinė – 5 m. Iš įbrėžto į tą trikampį apskritimo centro nubrėžtas 2 m ilgio statmuo trikampio plokštumai. Raskite atstumą nuo to statmens galo iki trikampio kraštinės.

Ats.: 2,5 m.

A lygis

1. Iš stačiojo trikampio ABC, kurio kampas C status, smailiojo kampo viršūnės nubrėžtas statmuo AD trikampio plokštumai. AC lygi a, BC – b, AD – c. Raskite atstumą nuo taško D iki viršūnių B ir C.

Ats.: BD = $\sqrt{a^2 + b^2 = c^2}$, CD = $\sqrt{a^2 + c^2}$.

2. Rombo ilgesnioji įstrižainė AC lygi d, jo smailusis kampas – 2α. Taškas O dalija AC santykiu 1:3. Iš taško o nubrėžtas statmuo OK rombo plokštumai OK lygus 0,25 d. Raskite atstumus nuo taško K iki rombo kraštinių arba jų tęsinių.

Ats.: 0,25d · $\sqrt{1 + \sin^2 \alpha}$, $0{,}25\text{d} \cdot \sqrt{1 + 9 \sin^2 \alpha}$.

3. Plokštumoje β nubrėžtos dvi lygiagrečios tiesės, ir vienoje jų pusėje pažymėtas taškas A. Atstumas nuo taško A iki vienos iš tų tiesių 13 kartų didesnis už atstumą iki kitos tiesės. Iš taško A nubrėžtas statmuo AK plokštumai β lygus 12 cm. Raskite taško K atstumą iki kiekvienos iš tiesių, jeigu tų atstumų santykis – 1:5.

Ats.: $2\sqrt{42}$ cm, $10\sqrt{42}$ cm.

4. Trikampio ABC kampas C status, atkarpa CD statmena trikampio plokštumai. Taškas D atkarpomis sujungtas su taškais A ir B. Raskite trikampio ADB plotą, jeigu CA lygi 3 dm, BC – 2 dm, o CD – 1 dm.

Ats.: 3,5 dm^2

5. Rombo ilgesnioji įstrižainė AC lygi a, smailusis kampas – 2α. Iš kraštinės DC vidurio taško O nubrėžtas statmuo OK trikampio plokštumai, lygus 0,5a. Raskite atstumą nuo taško K iki rombo kraštinių arba jų tęsinių.

Ats.: 0,5a, $0{,}5a\sqrt{1+4\sin^2\alpha}$, $0{,}5a\sqrt{1+\sin^2\alpha}$ ir $0{,}5a\sqrt{1+\sin^2\alpha}$.

Plokštumų statmenumas

Informacinė medžiaga

1. Viena kitai statmenomis plokštumomis vadinamos dvi susikertančios plokštumos, kampas tarp kurių lygus 900.
2. Jei viena iš dviejų plokštumų eina per tiesę, statmeną kitai plokštumai, tai tos plokštumos viena kitai statmenos.
3. Plokštuma, statmena dviejų plokštumų susikirtimo tiesei, yra statmena kiekvienai tų plokštumų

Uždaviniai

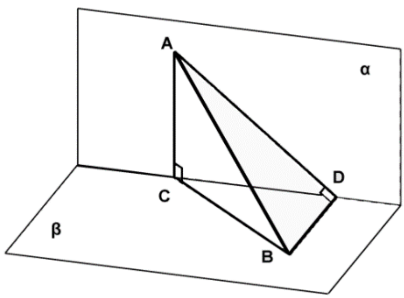
1. Iš taškų A ir B, esančių dviejose statmenose plokštumose, nubrėžti statmenys AC ir BD tų plokštumų susikirtimo tiesei. Raskite atkarpos AB ilgį, kai AC lygi 6 m, BD – 7 m, CD – 6 m.

Sprendimas.

1. Trikampiai ABC ir ABD statieji, nes AC statmena CB ir BD statmena AD (4 pav.).

2. Kadangi AC statmena CD ir α statmena β, tai AC statmena β ir AC statmena CB.

3. $AB^2 = AC^2 + CB^2 = AC^2 + (BD^2 + CD^2)$,



4 pav.

$AB = \sqrt{6^2+7^2+6^2}$,

AB = 11 m. **Ats.:** 11 m.

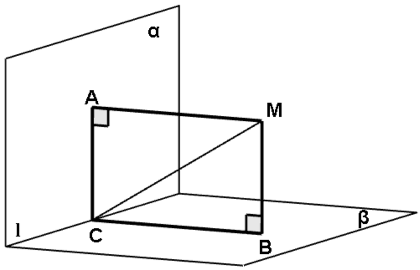
2. Taškas M nutolęs nuo dviejų viena kitai statmenų plokštumų atstumais a ir b. Raskite taško M nuotolį nuo plokštumų susikirtimo tiesės l.

Sprendimas.

1. Per tašką M nubrėžiame plokštumą, statmeną tiesei l. Ji kerta tiesę l taške C. Nubrėžiame statmenis MA ir MB (5 pav.). MACB – stačiakampis, kurio kraštinė MA lygi a, o MB – b. Jo įstrižainė CM – ieškomasis dydis.

2. MC randame iš stačiojo trikampio AMC:

MC = $\sqrt{a^2 + b^2}$.



5 pav.

Ats.: $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Didaktinė medžiaga

B lygis

1. Iš taškų A ir B, esančių dviejose statmenose plokštumose, nubrėžti statmenys AC ir BD tų plokštumų susikirtimo tiesei. Raskite atkarpos AB ilgį, kai AD lygi 4 m, BC – 7m, CD – 1m.

Ats.: 8 m.

2. Plokštumos α ir β statmenos viena kitai. Atstumas nuo plokštumos α taško A iki plokštumų susikirtimo tiesės c lygus 0,5 m. Plokštumoje β nubrėžta tiesė b, lygiagreti tiesei c ir nutolusi nuo jos 1,2 m atstumu. Raskite atstumą nuo taško A iki tiesės b.

Ats.: 1,3 m.

A lygis

1. Plokštumos α ir β statmenos viena kitai. Tiesė a, statmena jų susikirtimo linijai, pasvirusi į plokštumą α kampu φ. Įrodykite, kad kampas tarp α ir β lygus 90^0-φ.

2. Statmenų plokštumų α ir β susikirtimo tiesė yra c. Plokštumoje α nubrėžta tiesė a lygiagreti c, plokštumoje β – tiesė b lygiagreti c. Atstumas tarp tiesių a ir c lygus 1,5 m, o tarp tiesių b ir c – 0,8. Raskite atstumą tarp tiesių a ir b.

Ats.: 1,7 m.

3. Atkarpos AB ilgis – a. Jos galai priklauso statmenoms plokštumoms α ir β. Yra žinoma, kad kampas tarp AB ir α lygus 300, o kampas tarp AB ir β – 450. Raskite atstumus nuo taškų A ir B iki plokštumų susikirtimo linijos.

Ats.: $\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{2}$.

Kampai tarp tiesių ir plokštumų

Informacinė medžiaga

1. Kampų tarp tiesės ir plokštumos, kertančios tą tiesę ir jai nestatmenos, vadinamas kampas tarp tiesės ir jos projekcijos plokštumoje.
2. Kampas tarp plokštumos ir jai statmenos tiesės lygus 90°.
3. Dvisieniu kampu vadinama figūra, kurią sudaro tiesė a bei dvi pusplokštumės, turinčios bendrą kraštinę a, bet nepriklausančios vienai plokštumai.
4. Dvisienio kampo ir jo briaunai statmenos plokštumos sankirta vadinama dvisienio kampo tiesiniu kampu.
5. Dvisienio kampo dydžiu vadinamas jo tiesinio kampo dydis.
6. Kampas tarp dviejų plokštumų lygus kampui tarp dviejų toms plokštumoms statmenų tiesių.

Uždaviniai

1. Atkarpa kurios ilgis- 10 m, kerta plokštumą. Atkarpos galai nutolę nuo plokštumos per 2 cm ir 3 cm. Raskite kampą tarp atkarpos ir plokštumos.

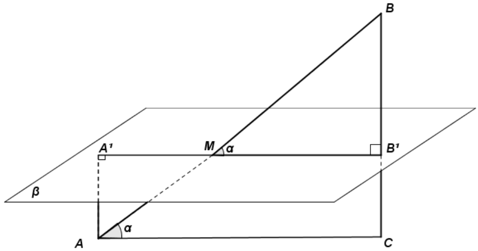
Sprendimas.

1. AA^1 statmena γ, BB^1 statmena γ, vadinasi, AA^1 lygiagreti BB^1 (6 pav.). Per tiese AA^1 ir BB^1 nubrėžiame plokštumą β. Nagrinėjame trikampį BB^1M, esantį plokštumoje β. BB^1 lygi 3, kampas B lygus 90°, o kampas BMB^1 lygus α (jis- ieškomas kampas).
2. Nubrėžiame AC, statmeną BB^1. Iš stačiojo trikampio ABC:
3. $AB=10$, $BC=BB^1+B^1C= BB^1+AA^1=5$

4. Ieškomas kampas α lygus kampui BAC.

Sinα = $\frac{BC}{AB}$ = 0,5.
Aišku, α=30°.

Ats.: 30°.

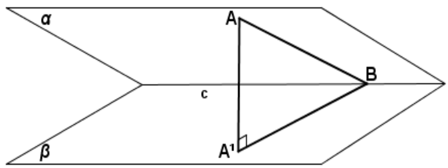


6 pav.

2. Dvi plokštumos susikerta 30° kampu. Vienos jų taškas A nutolęs nuo kitos plokštumos atstumu a. Raskite atstumą nuo to taško iki plokštumų susikirtimo tiesės.

Sprendimas.

1. α ir β- plokštumos, A- plokštumos α taškas (7 pav.).
2. Nubrėžiame statmenį AA‘ į plokštumą β ir statmenį AB į plokštumų susikirtimo tiesę C.
3. A‘B statmena C (trijų statmenų teorema).



7 pav.

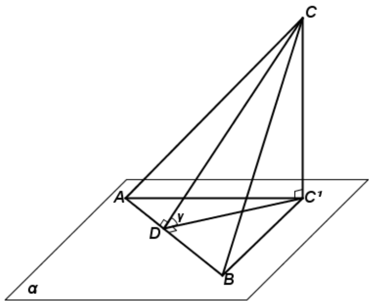
4. Stačiojo trikampio ABA‘ kampas prie viršūnės B lygus 30°.
5. AB = $\frac{AA'}{\sin 30°} = a : \frac{1}{2} = 2a$,

AB = 2a.

Ats.: 2a.

3. Per trikampio ABC kraštinę AB nubrėžta plokštuma, su trikampio plokštuma sudaranti kampą φ. Iš viršūnės C nubrėžtas statmuo CC^1 į plokštumą α. Raskite trikampio ABC^1 plotą, jei trikampio ABC plotas lygus k.

Sprendimas.



1. Nubrėžiame trikampio ABC aukštinę CD (8pav.).

2. SABC = $\frac{1}{2}AB \cdot CD = k$.

3. Pasvirosios C_1D projekcija C^1D yra trikampio ABC_1 aukštinė. Pagal trijų statmenų teoremą kampas CDC_1 yra kampas tarp plokštumų ABC ir α. Vadinasi kampas CDC_1 lygus φ.

4. Iš stačiojo trikampio CDC_1 randame aukštinę C_1D:

$C_1D = CD \cdot \cos\varphi$

Trikampio ABC^1 plotas lygus:

$S = \frac{1}{2}AB \cdot C_1D = \frac{1}{2}AB \cdot CD \cdot \cos\varphi = k \cdot \cos\varphi$.

Ats.: $k \cdot \cos\varphi$

Didaktinė medžiaga

B lygis

1. Stačiojo trikampio statiniai lygūs 7m ir 24m. Raskite atstumą nuo stačiojo trikampio viršūnės iki plokštumos, kuri eina per įžambinę ir su trikampio plokštuma sudaro 30° kampą.

Ats.: 3,36m.

2. Du lygiašoniai trikampiai turi bendrą pagrindą, jų plokštumos sudaro 60° kampą. Bendras pagrindas lygus 16m; vieno trikampio šoninė kraštinė lygi 17m, o kito trikampio šoninės kraštinės viena kitai statmenos. Raskite atstumą tarp trikampio viršūnių.

Ats.: 13m.

3. Iš taško, nutolusio nuo plokštumos atstumu a, nubrėžtos dvi pasvirosios, sudarančios su plokštuma 45° ir 30° kampus, o viena su kita- statųjį kampą. Raskite atstumą tarp pasvirųjų galų.

Ats.: $a\sqrt{6}$.

A lygis

1. Per stačiojo trikampio ABC (kampas lygus 90°) statinį AC nubrėžta plokštuma α, su trikampio plokštuma sudaranti kampą φ. Raskite atstumą nuo viršūnės B iki plokštumos α, kai AB lygi c, o AC- b.

Ats.: $\sqrt{c^2 - b^2} \cdot \sin\varphi$.

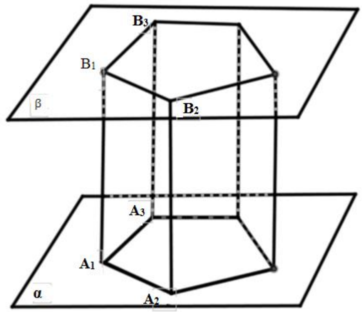
2. Stačiojo lygiašonio trikampio statinis yra pasviręs į plokštumą α, einančią per įžambinę, 30° kampu. Įrodykite, kad kampas tarp plokštumos α ir trikampio plokštumos lygus 45°.
3. Per lygiašonio trikampio ABC pagrindą BC nubrėžta plokštuma α. Atstumas nuo taško A iki tos plokštumos lygus 4cm. Raskite kampą tarp plokštumos α ir trikampio plokštumos, kai AC lygi 12cm, o AB ir AC- 10cm.

Ats.: 30°.

Prizmė

Informacinė medžiaga

1. Briaunainis, kurį sudaro du lygūs daugiakampiai $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$, esantys lygiagrečiose plokštumose, bei lygiagretainių $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, …, $A_nA_1B_1B_n$, vadinamas prizme (9 pav.).



9 pav.

Daugiakampiai $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$ vadinami prizmės pagrindais, o lygiagretainiai $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, …, $A_nA_1B_1B_n$ – prizmės šoninėmis sienomis.

2. Prizmė, kurios pagrindai yra $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$, žymima šitaip: $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$. Ji vadinama n-kampe prizme.

3. Statmuo, nubrėžtas iš vieno prizmės taško į kito pagrindo plokštumą, vadinamas prizmės aukštine.

4. Prizmė, kurios šoninės briaunos statmenos pagrindams, vadinama stačiąja, priešingu atveju – pasviąja. Stačiosios prizmės aukštinė lygi jos šoninei briaunai.

5. Stačioji prizmė, kurios pagrindai yra taisyklingieji daugiakampiai, vadinama taisyklingąja prizme.

6. Prizmės paviršiaus plotu vadinama visų jos sienų plotų suma, o prizmės šoninio paviršiaus plotu – jos šoninių sienų plotų suma.

7. Stačiosios prizmės šoninio paviršiaus plotas lygus prizmės pagrindo perimetro ir aukštinės sandaugai, t. y., $S=P\cdot H$.

Uždaviniai

1. Stačiosios trikampės prizmės pagrinde nubrėžtas statusis trikampis, kurios įžambinė lygi 3 cm, o smailusis kampas – α. Per įžambinę nubrėžta plokštuma sudaranti kampą β. Ši plokštuma kerta prizmės briauną, nubrėžtą iš pagrindo stačiojo kampo viršūnės. Raskite pjūvio plotą (10 pav.)

Sprendimas.

1. Iš stačiojo trikampio ABC (kampas C lygus 90˚):

BC = 3sinα.

2. Iš stačiojo trikampio ECB:

EC = BC•sin(90˚–α) = 3sinα·cosα =

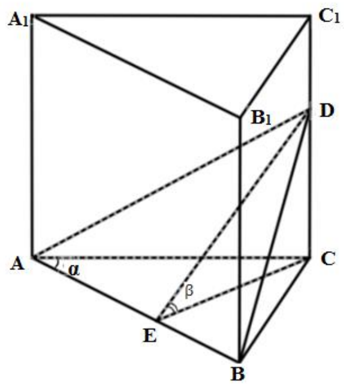
= 1,5sin2α.

3. Iš stačiojo trikampio EDC:

$ED = \frac{EC}{\cos\beta} = \frac{3\sin 2\alpha}{2\cos\beta}$.

4. $S = \frac{1}{2}AB \cdot ED = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3\sin 2\alpha}{2\cos\beta} =$

$= \frac{9\sin 2\alpha}{4\cos\beta}$.



10 pav.

Ats.: $\frac{9\sin 2\alpha}{4\cos\beta}$.

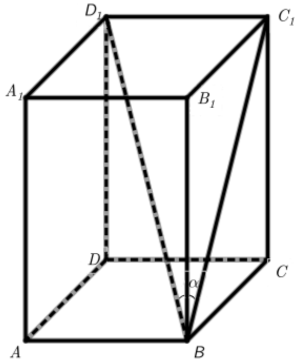
2. Taisyklingosios keturkampės prizmės įstrižainė lygi k ir su šonine siena sudaro kampą α. Raskite prizmės šoninio paviršiaus plotą (11 pav.)

Sprendimas.

1. $D_1B = k$.

2. Kadangi D_1C_1 statmena sienai BCC_1B_1, tai BC_1 yra įstrižainės D_1B projekcija, kampas D_1BC_1yra lygus α, o trikampis D_1C_1B statusis, (kampas C_1statusis).

3. $S_{šon}= 4aH$, kur a – pagrindo kraštinė, o H – prizmės aukštinė.



11 pav.

4. Iš stačiojo trikampio D_1BC_1:

$D_1C_1 = a = k \cdot \sin\alpha$.

$C_1B = k \cdot \cos\alpha$.

5. Iš stačiojo trikampio BB_1C_1:

$BB_1 = H = \sqrt{BC_1{}^2 - B_1C_1{}^2} = \sqrt{k^2\cos^2\alpha - k^2\sin^2\alpha} = k\sqrt{\cos 2\alpha}$.

6. $S_{šon}= 4aH = 4k\sin\alpha \cdot k \cdot \sqrt{\cos 2\alpha} = 4k^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{\cos 2\alpha}$.

7. Pastaba. $\text{tg}\alpha = \frac{D_1C_1}{BC_1} = \frac{B_1C_1}{BC_1} < 1$, t. y. $\alpha < 45°$, todėl $\cos 2\alpha > 0$.

Ats.: $4k^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{\cos 2\alpha}$.

Didaktinė medžiaga

B lygis

1. Stačiosios prizmės pagrindo kraštinės lygios 29 cm, 25 cm, 6 cm, o šoninė briauna lygi ilgiausiajai pagrindo aukštinei. Raskite viso prizmės paviršiaus plotą.

Ats.:1320 cm^2.

2. Taisyklingosios trikampės prizmės šoninis paviršius lygus 43,2 cm^2, jos šoninės sienos įstrižainė lygi 10,4 cm. Raskite prizmės aukštinę.

Ats.: 10,3 cm, 1,4 cm.

3. Stačiosios prizmės pagrindas – lygiašonė trapecija, kurios lygiagrečiųjų kraštinių ilgiai – 8 cm ir 2 cm, o trapecijos smailusis kampas lygus 60°. Kampas tarp prizmės įstrižainės ir pagrindo plokštumos lygus 45°. Raskiteprizmės šoninio paviršiaus plotą.

Ats.: ≈159.

A lygis

1. Plokštuma, nubrėžta per taisyklingosios trikampės prizmės pagrindo kraštinę ir prieš ją esančios briaunos vidurį, su pagrindo plokštuma sudaro 45°.Pagrindokraštinė – 1.Raskiteprizmės šoninį paviršių.

Ats.:$31^2\sqrt{3}$

2. Stačiosios prizmės pagrindas – lygiašonis trikampis, kurio dviejų kraštinių, sudarančių bukąjį kampą α, ilgis lygus a. Kampas tarp didžiausią plotą turinčios šoninės sienos įstrižainės ir pagrindo plokštumos lygus φ. Raskite viso prizmės paviršiaus plotą.

Ats.:$a^2\cdot(4\cdot(1+\sin\frac{\alpha}{2})\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\mathrm{tg}\varphi + \sin\alpha)$.

3. Stačiosios prizmės šoninė briauna lygi 6 cm. Jos pagrindas – statusis trikampis, kurio statiniai – 3 cm ir 2 cm. Per kiekvieną statinį nubrėžta plokštuma, su pagrindo plokštuma sudaranti 60°. Raskite gautų pjūvių plotus.

Ats.: 6 cm^2.

4. Stačiosios keturkampės prizmės pagrindas – rombas. Jo įstrižainių pjūvių plotai lygūs 12cm^{2}ir 16 cm^2. Koks prizmės šoninis paviršius?

Ats.: 40 cm^2.

5. Taisyklingosios keturkampės prizmės pagrindo plotas lygus 7, o šoninės sienos įstrižainė su pagrindu sudaro kampą α. Raskite prizmės įstrižainės ilgį, kai tgαlygus $\sqrt{5}$.

Ats.:7.

6. Taisyklingosios keturkampės prizmės įstrižainė lygi į ir su pagrindo plokštuma sudaro $22°30'$ kampą. Raskite prizmės šoninį paviršių.

Ats.: 25.

Gretasienis

Informacinė medžiaga

1. Gretasieniu vadinama prizmė, kurios pagrindas yra lygiagretainis.
2. Gretasienio įstrižainės vidurio taškas yra jo simetrijos centras.
3. Priešingosios gretasienio sienos yra lygios ir lygiagrečios.
4. Visos gretasienio įstrižainės susikerta viename taške, kuris dalija jas pusiau.
5. Gretasienis, kurio šoninės briaunos statmenos pagrindo plokštumai, vadinamas stačiuoju.
6. Statusis gretasienis, kurio pagrindas yra stačiakampis, vadinamas stačiakampiu gretasieniu.
7. Stačiakampis gretasienis, kurio visi trys matmenys yra lygūs, vadinamas kubu.

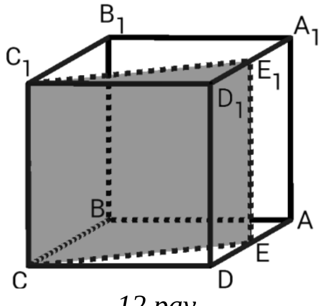
Uždaviniai

1. Stačiakampyje gretasienyje AD lygi 3, DC – 4, CC_1 – k. Per briauną CC_1 ir AD vidurio tašką nubrėžta pjūvio plokštuma. Raskite pjūvio plotą (12 pav.).

Sprendimas.

1. Tegul E – atkarpos AD vidurio taškas. Plokštuma EE_1C_1C statmena plokštumai ABCD, nes eina per tiesę C_1C, statmeną gretasienio pagrindo plokštumai. Todėl EE_1C_1C – stačiakampis.

2. Randame stačiakampio EE_1C_1C plotą:



12 pav.

$S = EC \cdot CC_1$.

Trikampis EDC status ir turi statųjį kampą EDC.

$ED = 1{,}5$.

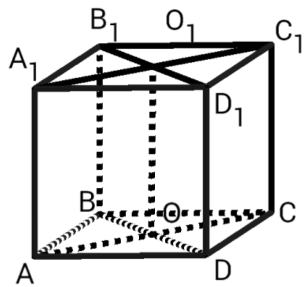
$EC = \sqrt{4^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{18{,}25}$.

Tada stačiakampio EE_1C_1C plotas lygus:

$S = k \cdot \sqrt{18{,}25}$.

Ats.: $k \cdot \sqrt{18{,}25}$.

2. Stačiojo gretasienio pagrindas – rombas. Įstrižainių pjūvių plotai lygūs Q_1 ir Q_2. Raskite gretasienio šoninio paviršiaus plotą (13 pav.).



13 pav.

Sprendimas.

1. Iš status ΔAOD:

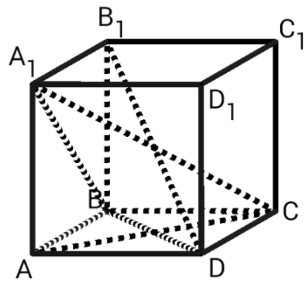
$$AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot AC\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot BD\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BD^2}.$$

2. $S_{šon.} = 4 \cdot AD \cdot AA_1 = 2 \cdot AA_1 \cdot \sqrt{AC^2 + BD^2} =$

$= 2\sqrt{(AA_1 \cdot AC)^2 \cdot (AA_1 \cdot BD)^2} = 2\sqrt{Q_1^2 Q_2^2}$.

Ats.: $2\sqrt{Q_1^2 Q_2^2}$.

3. Stačiojo gretasienio pagrindas yra rombas, kurio smailiojo kampo didumas lygus 60°, o kraštinės ilgis 8 cm. Stačiojo gretasienio šoninės briaunos ilgis lygus 4 cm. Raskite duotojo gretasienio įstrižainių ilgius (14 pav.).



14 pav.

Sprendimas.

1. ΔABD – lygiakraštis, todėl BD = 8 cm.

2. $BD^2 + AC^2 = 4AB^2$.

$64 + AC^2 = 4 \cdot 64$.

$AC^2 = 3 \cdot 64$.

$AC = 8\sqrt{3}$ cm.

3. Iš status ΔBB_1D:

$B_1D = \sqrt{{BB_1}^2 + BD^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ cm.

4. Iš stataus ΔAA_1C:

$A_1C = \sqrt{4^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 192} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$ cm.

Ats.: $4\sqrt{5}$ cm; $4\sqrt{13}$ cm.

Didaktinė medžiaga

B lygis

1. Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinės lygios $\sqrt{18}$ cm ir 7 cm, kampas tarp jų lygus 135°, o šoninė briauna lygi 12 cm. Raskite gretasienio įstrižaines.

Ats.: ≈15,9 cm; 13 cm.

2. Kambario matmenys – 6 m x 5 m x 3 m. Jo sienas norima išklijuoti tapetais. Tapetų ritinėlio matmenys – 0,5 m x 7 m. Atraižų plotas lygus langų ir durų plotui. Kiek tapetų ritinėlių reikia sienoms išklijuoti?

Ats.: 19.

3. Stačiojo gretasienio šoninė briauna lygi 1 m, pagrindo kraštinės lygios 23 dm, o pagrindo įstrižainių santykis – 2:3. Raskite įstrižainių pjūvių plotus.

Ats.: 2 m^2; 3 m^2.

A lygis

1. Raskite stačiojo gretasienio šoninio paviršiaus plotą. Jo aukštinė – h, pagrindas – rombas, gretasienio įstrižainės su pagrindo plokštuma sudaro kampus α ir β.

Ats.: $2h^2\sqrt{\text{ctg}^2\alpha + \text{ctg}^2\beta}$.

2. Kubo briauna lygi a. Raskite atstumą nuo kubo viršūnės iki jo įstrižainės.

Ats.: $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

3. Kiek reikia 1,5 m pločio brezento, norint pasisiūti stačiakampio gretasienio pavidalo palapinę su dvišlaičiu stogu, jei jos ilgis lygus 2,3 m, plotis – 1,4 m, šoninių sienų aukštis – 0,85 m, aukštis ties viduriu – 1,2 m? Palapinė abiejuose galuose uždaroma. Siūlėms bei atliekoms sunaudota 15% brezento.

Ats.: 8 m.

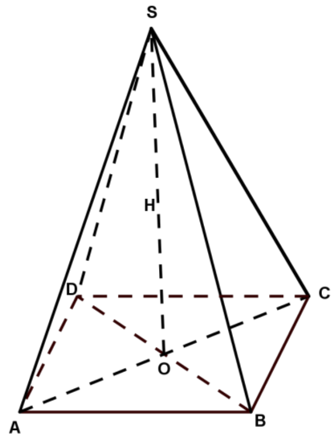
4. Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinės, kurių ilgiai lygūs 3 ir 4, sudaro 60° kampą. Šoninė briauna lygi pagrindo kraštinių geometriniam vidurkiui. Raskite gretasienio didesniosios įstrižainės ilgį.

Ats.: 7.

Piramidė

Informacinė medžiaga

1. Briaunainis, kurio viena siena yra bet koks daugiakampis, o kitos sienos – trikampiai, turintys bendrą viršūnę, vadinamas piramide. 15 paveiksle pavaizduota piramidė SABCD, kur ABD – pagrindas, taškas S – viršūnė. Trikampiai SAB, SBC, SCD, SDA vadinami šoninėmis sienomis. Tiesės SA, SB, SC, SD vadinamos piramidės šoninėmis briaunomis. Statmuo SO, nubrėžtas iš viršūnės į pagrindo plokštumą, vadinamas piramidės aukštine ir žymimas H.



15 pav.

2. Piramidės pjūvis, nubrėžtas per viršūnę ir pagrindo įstrižainę, vadinamas įstrižainiu piramidės pjūviu.

3. Piramidė vadinama trikampe, keturkampe ir t.t., jeigu jos pagrindas – trikampis, keturkampis ir t.t.

4. Piramidė, kurios pagrindas taisyklingasis daugiakampis, o piramidės viršūnės projekcija – to daugiakampio centras, vadinama taisyklingąja.

5. Taisyklingosios piramidės šoninės sienos – lygūs lygiašoniai trikampiai.

6. Taisyklingosios piramidės šoninės sienos aukštinė vadinama piramidės apotema.

7. Trikampė piramidė dar vadinama tetraedru.

8. Jeigu tetraedro visos keturios sienos – taisyklingieji trikampiai, tai tetraedras vadinamas taisyklinguoju.

9. Piramidės pagrindui lygiagreti plokštuma, kertanti piramidę, nuo jos nukerta panašią į ją piramidę. Likusioji piramidės dalis vadinama nupjautine piramide.

10. Nupjautinės piramidės sienos, esančios lygiagrečiose plokštumose, vadinamos piramidės pagrindais, kitos sienos – šoninėmis sienomis. Nupjautinės piramidės šoninės sienos – trapecijos. Nupjautinė piramidė, kuri gaunama iš taisyklingosios piramidės, irgi vadinama taisyklingąja.

11. Taisyklingosios piramidės šoninis paviršius lygus jos pagrindo pusperimetrio ir apotemos sandaugai.

12. Taisyklingosios nupjautinės piramidės šoninis paviršius lygus jos pagrindų pusperimetrių sumos ir apotemos sandaugai.

13. Jeigu piramidės visos šoninės briaunos lygios, tai viršūnės projekcija – apie pagrindą apibrėžto apskritimo centras.

14. Jeigu piramidės visi dvisieniai kampai prie pagrindo lygūs, tai viršūnės projekcija – į pagrindą įbrėžto apskritimo centras.

Uždaviniai

1. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninio paviršiaus plotas 5 kartus didesnis už pagrindo plotą. Raskite piramidės sienos kampo prie viršūnės didumą (16pav.).

Sprendimas.

1. Tegul $S_{\text{šon}} = 5S_{BCA}$, AC = a, o $\angle ASC = \varphi$ (16 pav.).

2. $S_{BCA} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

3. $S_{\text{šon}} = 3 \cdot S_{ASC} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot SK =$

$= \frac{3a}{2} \cdot AK \cdot \text{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{3a^2}{4} \cdot \text{ctg}\frac{\varphi}{2}$.

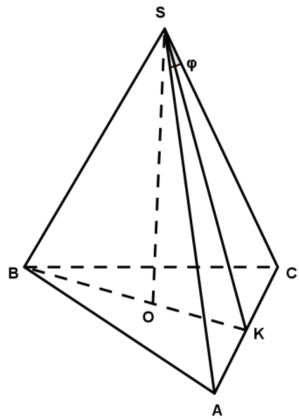
4. Kadangi $S_{\text{šon}} = 5 \cdot S_{BCA}$, tai

$= \frac{3a^2}{4} \cdot \text{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{4}$,

$\text{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$,

$\frac{\varphi}{2} = \text{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{3}$,

$\varphi = 2 \cdot \text{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{3}$.



16 pav.

Ats.: $2 \cdot \text{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

2. Taisyklingosios nupjautinės keturkampės piramidės pagrindų kraštinių ilgiai lygūs 8 cm ir 6 cm. Šoninės briaunos ilgis lygus 5 cm. Raskite nupjautinės piramidės šoninio paviršiaus plotą (17 pav.).

Sprendimas.

1. $AB = 8$ cm, $A_1B_1 = 6$ cm, $AA_1 = 5$cm.

2. Brėžiame $A_1M \perp AB$

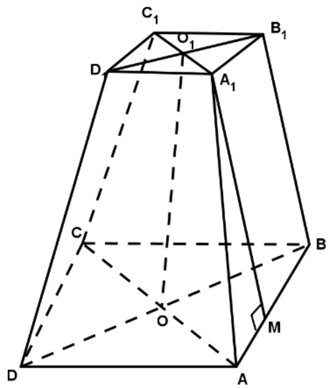
$AM = (8 – 6) : 2 = 1.$

$AM_1 = \sqrt{AA_1^2 - AM^2}$

$= \sqrt{25-1} = \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} =$

$= 2\sqrt{6}$ (cm).

3. $S_{šon} = 4 \cdot \frac{A_1B_1+AB}{2} \cdot A_1M = 4 \cdot \frac{8+6}{2} \cdot 2\sqrt{6} = 56\sqrt{6}$ (cm^2).



17 pav.

Ats.: $56\sqrt{6}$ cm^2.

3. Atstumas nuo taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo centro iki šoninės sienos lygus d. Dvisienis kampas prie pagrindo lygus φ. Raskite piramidės šoninio paviršiaus plotą (18 pav.).

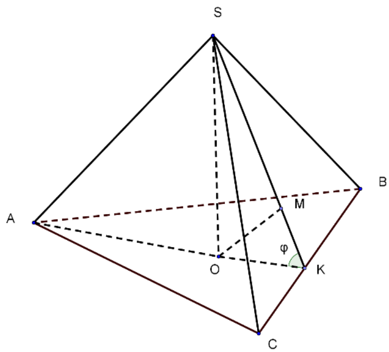
Sprendimas.

1. OM = d, SKA = φ.

2. $S_{šon.} = \frac{3}{2}\ BC \cdot SK$

3. Iš trikampio OMK:

$OK = \frac{OM}{\sin\varphi} = \frac{d}{\sin\varphi}$.



18 pav.

4. Iš trikampio SOK:

$$SK = \frac{OK}{\cos\varphi} = \frac{d}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi} = \frac{2d}{\sin\varphi};$$

$$OK = \frac{1}{3}AK;\ AK = \frac{3d}{\sin 2\varphi}.$$

5. Iš trikampio AKC:

$$AC = \frac{AK}{\sin 60°} = \frac{3d}{\sin\varphi} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6d}{\sqrt{3} \cdot \sin\varphi}.$$

6. $S_{šon} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6d}{\sqrt{3} \cdot \sin\varphi} \cdot \frac{2d}{\sin 2\varphi} = \frac{6d^2\sqrt{3}}{\sin\varphi \cdot \sin 2\varphi}.$

Ats.: $\frac{6d^2\sqrt{3}}{\sin\varphi \cdot \sin 2\varphi}$.

Didaktinė medžiaga

B lygis

1. Piramidinio stogo pagrindas yra kvadratas, kurio matmenys – 4,5 m x 4,5m, o sienos su pagrindo plokštuma sudaro 45▫ kampus. Kiek 70 cm x 140 cm skardos lakštų reikia uždengti stogui? Atliekoms pridėkite 10% stogo ploto.

Ats.: 33.

2. Piramidės pagrindas – statusis trikampis, kurio statiniai lygūs 3 cm ir 4 cm, o visos šoninės briaunos lygios 6,5 cm. Raskite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

Ats.: ≈36,9 cm^2.

3. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės aukštinė lygi 7 cm, pagrindų kraštinės lygios 10 cm ir 2 cm. Apskaičiuokite piramidės šoninę briauną.

Ats.: 9 cm.

A lygis

1. Piramidės pagrindas yra kvadratas, jos aukštinė eina per vieną pagrindo viršūnę. Pagrindo kraštinės ilgis lygus 20 dm, o aukštinės – 21 dm. Raskite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

Ats.: 10 m^2.

2. Bokštą sudaro taisyklingoji keturkampė nupjautinė piramidė, kurios pagrindų kraštinės lygios 12 m ir 10,5 m, o aukštinė 3,8 m. Ant jos pastatyta piramidė, kurios aukštinė lygi 3,4 m. Kiek skardos reikėtų visam bokštui padengti, jei užlenkimams ir atliekoms skiriama 20%?

Ats.: 367 m^2.

4. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinės lygios a ir $a\sqrt{3}$, šoninė siena pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu γ. Raskite piramidės viso paviršiaus plotą.

Ats.: $\frac{2a^2\cdot(1+2\cos\gamma)}{\cos\gamma}$.

3. Norime pasiūlyti keturšlaitę taisyklingosios piramidės pavidalo palapinę. Jos pagrindo kraštinės ilgis – 2,5 m, aukštis ties viduriu – 1,8m. Kiek reikia 1,6 m pločio brezento, jei atliekoms ir siūlėms pridedama 10%?

Ats.: 7,6 m.

4. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė siena su pagrindo plokštuma sudaro 30◦ kampą, o apie pagrindą apibrėžto apskritimo spindulys lygus 2. Raskite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

Ats.: 6.

5. Piramidės pagrindas – lygiašonis trikampis, kurio kraštinės – 40, 25 ir 25. Piramidės aukštinė nubrėžta per kampo, esančio prieš 40 ilgio kraštinę, viršūnę ir lygi 8. Apskaičiuokite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

Ats.: 540 .

6. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinės ilgis lygus a, jos šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro 45◦ kampą. Raskite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

Ats.: $\frac{1}{4}a^2\sqrt{15}$.

Ritinys

Informacinė medžiaga

1. Ritiniu vadinamas kūnas, kurį sudaro tarp dviejų lygiagrečių plokštumų esančios visų lygiagrečių tiesių, kertančių vienoje tų plokštumų esantį skritulį, atkarpos. Tos atkarpos, kurių vienas galas yra skritulio apskritimo taškas, vadinamos ritinio sudaromosiomis.

2. Ritinio paviršių sudaro ritinio pagrindai – du lygūs skrituliai, esantys lygiagrečiose plokštumose, ir šoninis paviršius.

3. Stačiuoju ritiniu vadinamas ritinys, kurio sudaromosios statmenos pagrindų plokštumoms. Toliau nagrinėsime tik statųjį ritinį, kurį vadinsime tiesiog ritiniu.

4. Ritinio spinduliu vadinamas jo pagrindo spindulys.

5. Ritinio aukštine vadinamas atstumas tarp pagrindų plokštumų.

6. Ritinio ašimi vadinama tiesė, einanti per pagrindų centrus.

7. Ritinio pjūvis, gautas, ritinį perkirtus plokštuma, einančia per ritinio ašį, vadinamas ašiniu pjūviu.

8. Į ritinį įbrėžta prizmė vadinama tokia prizmė, kurios pagrindai – lygūs daugiakampiai, įbrėžti į ritinio pagrindus. Jos šoninės briaunos yra ritinio sudaromosios.

9. Apie ritinį apibrėžta prizme vadinama tokia prizmė, kurios pagrindai – lygūs daugiakampiai, apibrėžti apie ritinio pagrindus.

Uždaviniai

1. Plokštuma, nubrėžta lygiagrečiai ritinio ašiai, dalija apskritimą santykiu m:n. Pjūvio plotas lygus S. Raskite ritinio šoninio paviršiaus plotą.

Sprendimas.

1. Tegul S_{ABCD} = S ir ∪ALD: ∪AKD = m:n (19pav.).

2. ∪ALD+∪AKD = 2π.

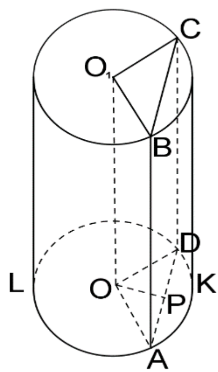
3. ∪ALD = $\frac{m}{n}$∪AKD.

4. $\frac{m}{n}$∪AKD + ∪AKD = 2π.

5. ∪AKD = $\frac{2\pi n}{m+n}$.

6. ∠AOD = $\frac{2\pi n}{m+n}$.

7. ∠POD = $\frac{\pi n}{m+n}$.



19 pav.

8. $S_{šon}$ = 2π·OD·AB.

9. SABCD = AD·AB.

10. S = AD·AB.

11. AB = $\frac{S}{AD}$.

12. $S_{šon} = 2\pi\cdot OD\cdot\frac{S}{AD} = \pi\cdot S\cdot\frac{OD}{PD} = \frac{\pi\cdot S}{\sin\angle POD} = \frac{\pi\cdot S}{\sin\frac{\pi\cdot n}{m+n}}$.

Ats.: $\frac{\pi\cdot S}{\sin\frac{\pi\cdot n}{m+n}}$.

2. Ritinio ašinio pjūvio įstrižainė, kurios ilgis lygus 8cm, su pagrindo plokštuma sudaro 60º kampą. Raskite ritinio šoninio paviršiaus plotą.

Sprendimas.

1. AC = 8cm;

2. $\triangle$CAD – statusis:

$\frac{CD}{AC}$ = sin60º.

CD = $8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$(cm).

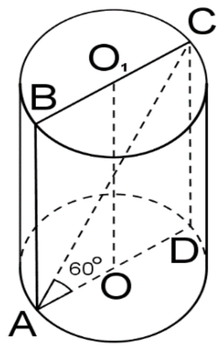
$\frac{AD}{AC} = $ cos60º.

3. AD = $8 \cdot \frac{1}{2} = 4$(cm).

4. AO = OD = 4:2 = 2(cm).

5. $S_{šon}$ = 2πRH.

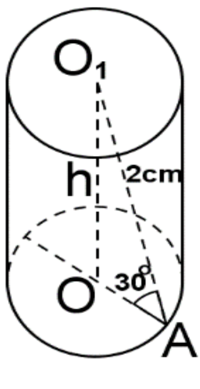
$S_{šon} = 2\pi \cdot 2 \cdot 4\sqrt{3} = 16\pi\sqrt{3}$ (cm²).



20 pav.

Ats.: $16\pi\sqrt{3}$ cm².

3. Paveiksle pavaizduota ritinio atkarpa, jungianti apatinio pagrindo spindulio OA galo tašką A su viršutinio pagrindo centru O1, sudaro su pagrindo plokštuma 30º kampą ir jos ilgis yra lygus 2cm. Raskite ritinio viso paviršiaus plotą.



21 pav.

Sprendimas.

1. Iš stataus $\triangle O_1OA$:
$AO = R$; $O_1A = 2cm$.
2. $h = 2:2 = 1(cm)$
$\frac{R}{2} = \cos 30°.$
$\frac{R}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
$R = \sqrt{3}(cm).$
3. $S_{visas} = 2\pi\sqrt{3} \cdot 1 + 2 \cdot 2\pi\left(\sqrt{3}\right)^2 = 2\pi\sqrt{3} + 6\pi = 2\pi(\sqrt{3} + 3)(cm^2)$

Ats.: $2\pi(3 + \sqrt{3})cm^2$.

Didaktinė medžiaga

B lygis

1. Reikia nudažyti ritinio formos baką. Bako pagrindo skersmuo lygus 1,5 m, aukštis – 3m. Nudažyti 1 kvadratiniam metrui reikia 200g dažų. Kiek dažų reikės visam bakui nudažyti?

Ats.: $\approx$ 3,6kg.

2. Ritinio ašinio pjūvio plotas lygus Q. Raskite šoninio paviršiaus plotą.

Ats.: πQ

3. Ritinio aukštinė lygi 8dm, pagrindo spindulys – 5dm. Ritinys perkirstas plokštuma taip, kad gautasis pjūvis yra kvadratas. Apskaičiuokite atstumą nuo to pjūvio iki ašies.

Ats.: 3dm.

A lygis

1. Konservų dėžutės skersmuo lygus 10cm, o aukštis – 5cm. Kiek kvadratinių metrų skardos sunaudojama 1mln. tokių dėžučių pagaminti? (Siūlėms ir atliekoms reikia pridėti 15%.)

Ats.: $\approx 36000 m^2$.

2. Ritinio aukštinė lygi 2m, pagrindo spindulys – 7m. Įstrižai į ritinį įbrėžtas kvadratas, kurio visos viršūnės priklauso pagrindų apskritimams. Apskaičiuokite kvadrato kraštinę.

Ats.: 10m.

3. Ritinio ašiai lygiagreti plokštuma nuo pagrindo apskritimo atkerta 120^o lanką. Ritinio ašies ilgis lygus 10cm, jos atstumas nuo kertančios plokštumos – 2cm. Raskite pjūvio plotą.

Ats.: $40\sqrt{3}$ cm^2.

Kūgis

Informacinė medžiaga

1. Kūgiu vadinamas kūnas, kurį sudaro visos atkarpos, jungiančios vieną tašką – kūgio viršūnę – su skritulio – kūgio pagrindo – taškais. Atkarpos, jungiančios kūgio viršūnę su pagrindo apskritimo taškais, vadinamos kūgio sudaromosiomis.
2. Kūgio paviršių sudaro jo pagrindas ir šoninis paviršius.
3. Kūgio aukštine vadinama iš jo viršūnės nubrėžta pagrindui statmena atkarpa.
4. Kūgio ašimi vadinama tiesė, nubrėžta per kūgio aukštinę.
5. Kūgio pjūvis, gautas, kūgį perkirtus plokštuma, einančia per kūgio ašį, vadinamas ašiniu pjūviu.
6. Kūgio ašiai statmena plokštuma nuo kūgio nukerta mažesnį kūgį. Likusioji dalis vadinama nupjautiniu kūgiu.

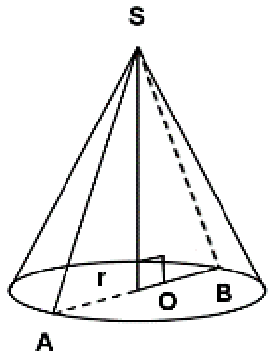
7. Į kūgį įbrėžta piramide vadinama tokia piramidė, kurios pagrindas yra į kūgio pagrindo apskritimą įbrėžtas daugiakampis, o viršūnė – kūgio viršūnė.

8. Apibrėžta apie kūgį piramide vadiname tokia piramidė, kurios pagrindas yra apie kūgio pagrindą apibrėžtas daugiakampis , o viršūnė sutampa su kūgio viršūne.

Uždaviniai

1. Paveiksle pavaizduotas kūgis, kurio aukštinės SO ilgis lygus 12 cm. Kūgio sudaromosios ir jo pagrindo spindulio ilgis lygus 8 cm. Raskite kūgio ašinio pjūvio SAB plotą.

Sprendimas.



22 pav.

1. SO = 12 cm.

SA - AO = 8 cm.

AO = r.

2. SA = r +8.

3. Iš stataus ΔSAO:

$SA^2 = SO^2 + AO^2$.

(r + 8)2 = 144 + r^2 .

$r^2 + 16r + 64 = 144 + r^2$.

16r = 80.

r = 5 (cm).

4. AB = 2r = 2·5 = 10 (cm).

5. $S_{ABS} = \frac{1}{2} AB \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$ (cm^2).

Ats.: 60 cm^2 .

2. Paveiksle pavaizduotas nupjautinis kūgis. Viršutinio pagrindo spindulio ilgis lygus 6 cm, o apatinio pagrindo – 9 cm. Nupjautinio kūgio ašinio pjūvio ABCD įstrižainė AC sudaro su pagrindo plokštuma 30° kampą. Rasti ašinio pjūvio šoninės kraštinės CD ilgį.

Sprendimas.

1. Brėžiame $CC_1 \parallel OO_1$.

$CC_1 = OO_1$.

2. AD = 2 · 9 = 18 (cm).

$AC_1 + C_1D = 18$.

3. Kadangi $C_1D = (18 – 12): 2=$ $=3$(cm).

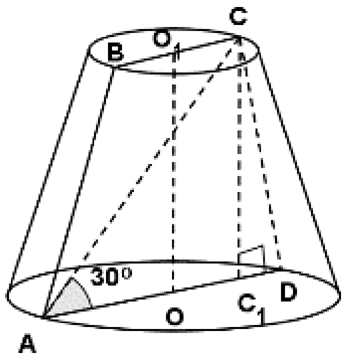
Tai $AC_1 = 18$ (cm).

4. Iš stataus ΔAC_1C:

$\frac{CC_1}{AC_1} = \text{tg } 30°$.

$CC_1 = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$ (cm).

5. Iš stataus ΔDC_1C:



23 pav.

$$CD = \sqrt{{CC_1}^2 + {CD_1}^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{75 + 9} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21} \text{ (cm)}$$

Ats.: $2\sqrt{21}$ cm.

3. Kūgio aukštinė lygi pagrindo spinduliui R. Per jo viršūnę nubrėžta pjūvio plokštuma, atkertanti 60° lanką. Rasti pjūvio plotą.

Sprendimas.

1. Plokštuma kerta kūgio paviršių per sudaromosios EA ir EB bei stygą AB (24 pav.)

2. Ieškomasis plotas yra trikampio AEB plotas.

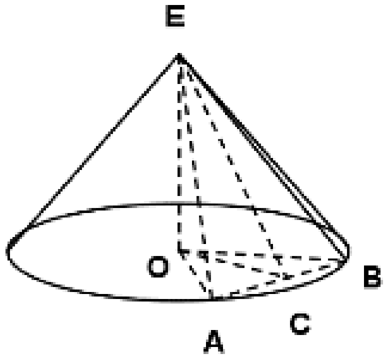
3. Kampas AOB lygus 60°, todėl AB lygi R (taisyklingojo įbrėžto šešiakampio kraštinė).

4. Pjūvio aukštinė EC yra trikampio EOC įžambinė.

5. EO = R, OC = $\frac{R\sqrt{3}}{2}$, EC = $\sqrt{EO^2 + CO^2}$ = $\frac{R\sqrt{7}}{2}$.

6. $S_{AEB} = \frac{1}{2}$ AB · EC = $\frac{R^2\sqrt{7}}{4}$.

Ats.: $\frac{R^2\sqrt{7}}{4}$.



24 pav.

Didaktinė medžiaga

B lygis

1. Kūgio aukštinė lygi 20, jo pagrindo spindulys lygus 25. Per kūgio viršūnę nubrėžtas pjūvis. Atstumas nuo pjūvio iki kūgio pagrindo centro lygus 12. Raskite pjūvio plotą.

Ats.: 500.

2. Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai lygūs 3 m ir 6 m, aukštinė lygi 4 m. Apskaičiuokite sudaromąją.

Ats.: 5 m.

3. Kūgio sudaromoji lygi 17 cm, o šoninio paviršiaus plotas – 427 cm2. Raskite kūgio aukštinę ir pagrindo plotą.

Ats.: 15 cm; 201 cm^2.

4. Kūgio pagrindo ir ašinio pjūvio plotų santykis lygus π. Kokiu kampu kūgio sudaromoji pasvirusi į pagrindą?

Ats.: 45°.

5. Kūgio sudaromoji lygi 1, ašinio pjūvio kampas prie viršūnės – φ. Raskite pagrindo plotą.

Ats.: $\pi 1^2 \cdot \sin^2(\varphi/2)$.

A lygis

1. Kūgio aukštinės ilgis lygus 6 cm. Kokiu atstumu nuo kūgio viršūnės reikia perkirsti kūgį jo pagrindo plokštumai lygiagrečia plokštuma, norint, kad pjūvio plotas būtų lygus pusei pagrindo ploto?

Ats.: $3\sqrt{2}$ cm.

2. Siloso bokšto stogas yra kūgis. Jo skersmuo lygus 6 m, o aukštis – 2 m. stogas dengiamas skardos lakštais, kurių metmenys – 0,7 m × 1,4 m. Siūlės ir atraižos sudaro 10 % stogo ploto. Kiek skardos lakštų reikia tam stogui uždengti?

Ats.: 40 lakštų.

3. Kūgio aukštinės pjūvis – statusis trikampis. Kūgio pagrindo spindulio ilgis lygus 5 cm. Apskaičiuokite kūgio ašinio pjūvio plotą.

Ats.: 25 cm^2.

4. Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai – 5 ir 3, aukštinė - $\sqrt{2}$. Per dvi jo sudedamąsias nubrėžta pjūvio plokštuma, pagrindų apskritimuose atkertanti lankus, lygius 120°. Raskite pjūvio plotą.

Ats.: 12.

Rutulys

Informacinė medžiaga

1. Rutuliu vadinamas kūnas, sudarytas iš visų erdvės taškų, nutolusių nuo vieno taško atstumu, ne didesniu už kurį nors pasirinktą atstumą. Tas taškas vadinamas rutulio centru, o atstumas- rutulio spinduliu.
2. Rutulio kraštas vadinamas rutulio paviršiumi arba sfera.
3. Kiekviena atkarpa, jungianti rutulio centrą su rutulio paviršiaus tašku, vadinama rutulio spinduliu.
4. Rutulys yra sukinys. Jis gaunamas, sukant pusskritulį apie skersmenį kaip apie ašį.
5. Rutulio pjūvis, gautas, perkirtus rutulį plokštuma, yra skritulys. To skritulio centras statmens, nubrėžto iš rutulio centro į kertančiąją plokštumą, pagrindas.
6. Rutulio pjūvis, gautas, perkirtus rutulį plokštuma, einančia per jo centrą, vadinamas rutulio didžiuoju skrituliu.
7. Plokštuma, einanti per rutulio paviršiaus tašką ir statmena į tą tašką nubrėžtam spinduliui, vadinama liečiamąja plokštuma.
8. Liečiamoji plokštuma ir rutulys turi tik vieną bendrą tašką- lietimosi tašką.
9. Rutulys vadinamas įbrėžtiniu apie briaunainį, jei visos briaunainio sienos liečia rutulį. Tokiu atveju briaunainis vadinamas apibrėžtiniu apie rutulį (sferą).
10. Rutulys vadinamas apibrėžtiniu apie briaunainį, jei visos briaunainio viršūnės priklauso rutulio paviršiui (sferai). Toks briaunainis vadinamas įbrėžtiniu į rutulį (sferą).

11. Norėdami apie piramidę apibrėžti rutulį, turime išpildyti būtinumą ir pakankamą sąlygą- apie piramidės pagrindą galima apibrėžti apskritimą.

12. Norėdami apie prizmę apibrėžti rutulį, turime išpildyti būtiną ir pakankamą sąlygą- prizmė stačioji, o apie jos pagrindą galima apibrėžti apskritimą.

13. Rutulio, apibrėžto apie prizmę, centras yra atkarpos, jungiančios apskritimų, apibrėžtų apie prizmę, centrus, vidurio taškas.

14. Rutulio, apibrėžto apie piramidę, centras yra statmenyje, nubrėžtame į pagrindo plokštumą per apskritimo, apibrėžto apie pagrindą, centrą.

Uždaviniai

1. Rutulį kerta plokštuma, nutolusi nuo jo centro 8cm atstumu. Pjūvio spindulio ilgis lygus 15cm. Raskite rutulio paviršiaus plotą.

Sprendimas.

1. $r = 15$cm.

$d = 8$cm.

2. $R^2 = d^2+r^2=8^2+15^2=289$.

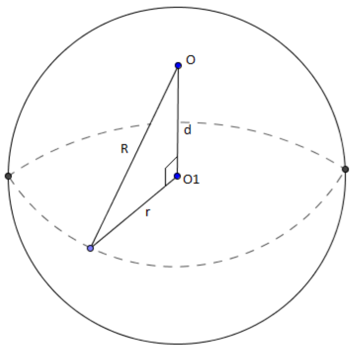
$R = 17$.

3. $S = 4\pi R^2$.

$S = 4\pi\cdot 289$

$S = 1156\pi$ cm^2.

Ats.: 1154π cm^2.



25 pav.

2. Rutulio spindulys- R. taisyklingojo trikampio kraštinė- a. Rutulys liečia visas to trikampio kraštines. Raskite atstumą nuo rutulio centro iki trikampio plokštumos.

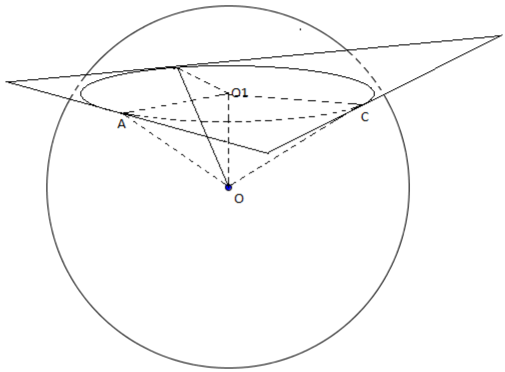
Sprendimas.

1. Sakykime, kad rutulys liečia trikampio kraštines taškuose A, B ir C.

2. Iš rutulio centro O nubrėžiame statmenį OO1 į trikampio plokštumą.

3. Atkarpos OA, OB, OC statmenos trikampio kraštinėms.

4. Pagal 3 statmenų teoremą atkarpos O1A, O1B, O1C irgi statmenos atitinkamoms trikampio kraštinėms.



26 pav.

5. Trikampiai OO1A, OO1B, OO1C lygūs (jų statinis OO1 bendras, o įžambinės lygios rutulio spinduliui), todėl lygios ir atitinkamos kraštinės:(O1A=O1B=O1C).

6. Vadinasi O_1- į trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras.

7. $O_1A=O_1B=O_1C= \frac{S}{P}$

$S = \frac{a \cdot a \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$p = \frac{3a}{2}$, todėl:

$O_1A = O_1B = O_1C = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

8. $OO_1 = \sqrt{OA^2 - O1A^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}$

Ats.: $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}$

3. Rutulio spindulio ilgis lygus 41 cm. Jį kerta plokštuma 9 cm atstumu nuo centro. Raskite pjūvio plotą, nuopjovos plotą ir išpjovos tūrį.

Sprendimas.

1. $R = 41$ cm, $OO1 = 9$cm, $S(\text{pjūvio}) = \pi r^2$.

2. Iš $\Delta OO1B$:

$O_1B^2 = OB^2 - OO_1^2$.

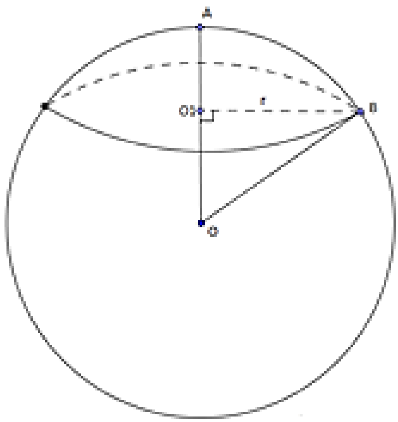
3. $r^2 = 41^2 - 9^2$.

$r^2 = 1606$.

$r = 40$ cm.

4. $S_{pjūvio} = \pi 40^2 = 160\pi(cm^2)$.

5. $h = AO_1 = R - OO_1 = 41 - 9 = 32$ (cm).



27 pav.

6. $S_{nuopj} = 2\pi Rh$.

$S_{nuopj} = 2\pi \cdot 41 \cdot = 624\pi(cm^2)$.

7. $V_{išpj} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$.

$V_{išpj} = \frac{2}{3}\pi \cdot 41^2 \cdot 32 = 1075484\pi(cm^3)$.

Ats.: $S_{pjv} = 1600\pi(cm^2)$, $S_{nuopj} = 2624\pi(cm^2)$, $V_{išpj} = 1075484\pi(cm^2)$.

4. Rutulio spindulio ilgis lygus 63 cm. Taškas A yra rutulio liečiamojoje plokštumoje 16 cm atstumu nuo lietimosi taško. Raskite trumpiausią atstumą nuo taško A iki rutulio paviršiaus.

Sprendimas.

1. R = 63 cm, AB = 16 cm.

2. OA = $\sqrt{OB^2 + AB^2}$.

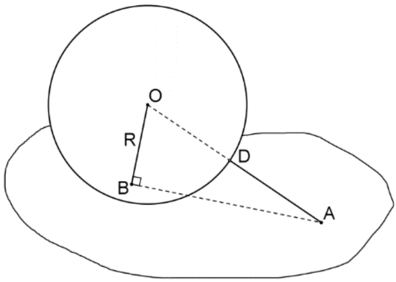
OA = $\sqrt{63^2 + 16^2} =$

= $\sqrt{33969 + 256}$ =

= $\sqrt{4225}$ = 65 cm.

3. AD = OA – OD.

AD = 65 – 63 = 2 (cm).



28 pav.

Ats.: 2 cm.

Didaktinė medžiaga

A lygis

1. Rutulį kertančios plokštumos atstumas nuo rutulio centro lygus 2 cm. Pjūvio plotas lygus 5π cm2. Raskite rutulio spindulį.

Ats.: 3 cm.

2. Rombo įstrižainės lygios 15 cm ir 20 cm. Rutulio, kurio spindulys lygus 10 cm, paviršius liečia visas to trikampio kraštines. Raskite atstumą nuo rutulio centro iki trikampio plokštumos.

Ats.: 8 cm.

3. Rutulį kerta per jo spindulio vidurio tašką einanti tam spinduliui statmena plokštuma. Raskite gautojo pjūvio ir didžiojo skritulio plotų santykį.

Ats.: $\frac{3}{4}$.

B lygis

1. Rutulio spindulys lygus 50cm. Raskite rutulio pjūvio plotą ir apskritimo ilgį, kai pjūvio atstumas nuo rutulio centro lygus 48cm.

Ats.: 28π cm, 196π cm.

2. Per rutulio spindulio vidurį nubrėžta tam spinduliui statmena plokštuma. Koks pjūvio ir didžiojo skritulio plotų santykis.

Ats.: $\frac{3}{4}$.

Gretasienio tūris

Informacinė medžiaga

1. Tūrio matavimo vienetas yra kubas, kurio briauna lygi atkarpų matavimo vienetui.

2. Lygių kūnų tūriai yra lygūs.

3. Kūno, sudaryto iš kelių kūnų, tūris lygus tų kūnų tūrių sumai.

4. Stačiakampio gretasienio tūris lygus jo trijų matmenų sandaugai.

5. Stačiojo gretasienio tūris lygus jo pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.

Uždaviniai

1. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pagrindo kraštinės AB ilgis lygus 8 cm, o gretasienio įstrižainės B_1D ilgis lygus 16cm. Gretasienio įstrižainė B_1D sudaro su šonine siena AA_1B_1B 45^o kampo didumą. Raskite gretasienio tūrį.

Sprendimas.

1. $AB = 8$ cm; $B_1D = 16$cm; $\angle AB_1D=45^o$.

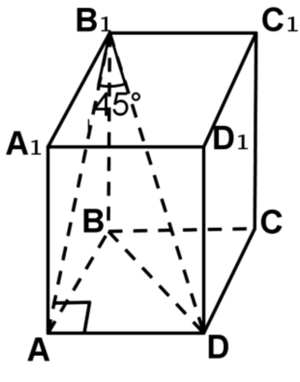
Iš stataus ΔDAB_1 :

$AD=AB_1$; $AD^2+AB_1^2=B_1D^2$.

$2AD^2=256$.

$AD^2=128$.

$AD= 8\sqrt{2}$ (cm).



30 pav.

2. $AB_1=AD=8\sqrt{2}$ (cm).

3. $S_{ABCD}=AB \cdot AD = 8 \cdot 8\sqrt{2}=64\sqrt{2}$ cm^2 .

5. Iš stataus ΔBAD:

$BD^2 = AB^2 + AD^2$.

$BD^2 = 8^2 + (8\sqrt{2})^2 = 64 + 128 = 192$.

6. Iš status ΔDBB_1:

$BB_1 = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = \sqrt{256 - 192} = \sqrt{64} = 8$ (cm).

7. $V = 64\sqrt{2} \cdot 8 = 512\sqrt{2}$ (cm^3).

Ats.: $512\sqrt{2}$ (cm^3).

2. Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinės lygios a ir b, o smailusis kampas – α. Didesnioji pagrindo įstrižainė lygi mažesniajai gretasienio įstrižainei. Raskite gretasienio tūrį.

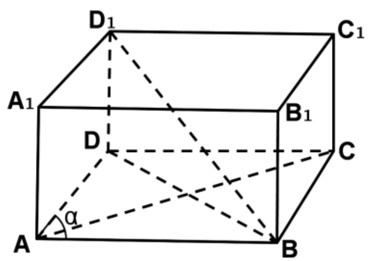
Sprendimas.

1. AD = BC = a, AB = DC = b, ∠DAB = α.
2. AC = D1B (31pav.)
3. ∠ABC = 180o-α.
4. Iš stačiojo trikampio BDD1 :

DD12 = BD12 -BD2 = AC2-BD2.

5. Iš trikampio ABD:

BD2 = a2+b2-2ab · cosα.



31 pav.

6. Iš trikampio ABC:

AC2 = a2+b2-2ab · cos (1800-α).

7. H2 = a2+b2+2ab · cosα - a2-b2+2ab · cosα.

H2 = 4ab · cosα.

8. Spagr. = ab · sinα.

9. $V = ab \cdot \sin\alpha \cdot 2 \cdot \sqrt{ab \cdot \cos\alpha} = 2ab \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{ab \cdot \cos\alpha}$.

Ats.: $2ab \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{ab \cdot \cos\alpha}$.

3. Reikia padaryti uždarą 64 dm^3 tūrio dėžę, kurios pagrindas – kvadratas. Kokie turi būti dėžės matmenys, kad būtų sunaudota mažiausiai medžiagos?

Sprendimas.

1. Sakykime, dėžės ilgis ir plotis lygūs x dm, o aukštis lygus H dm.

2. Dėžės tūris $V=x^2 \cdot H$.

3. Dėžės paviršiaus plotas $S = 4x \cdot H + 2x^2$.

4. $x^2 \cdot H=64$,

$H=\frac{64}{x^2}$.

5. $S = 4x \cdot \frac{64}{x^2} +2x^2 = 2x^2 + \frac{256}{x}$.

6. Randame funkcijos S(x) kritinius taškus:

$S'(x) = 4x - \frac{256}{x^2}$;

$4x - \frac{256}{x^2} = 0$,

$x = 4$.

7. Kadangi $S'(3)<0$, $S'(5)>0$, tai taškas $x = 4$ yra funkcijos S(x) minimumo taškas.

8. Atitinkamą H reikšmę randame iš formulės $H = \frac{64}{x^2}$;

$H =4$.

9. Vadinasi, dėžės matmenys - 4dm x 4dm x 4dm.

Ats.: 4dm x 4dm x 4dm.

Didaktinė medžiaga

B lygis

1. Stačiojo gretasienio įstrižainės lygios 9 cm ir $\sqrt{33}$ cm. Jo pagrindo perimetras lygus 18cm. Šoninė briauna lygi 4 cm. Raskite gretasienio viso paviršiaus plotą ir tūrį.

Ats.: 104 cm^2 , 64 cm^3.

2. Stačiakampio gretasienio trijų sienų plotai lygūs 6 dm2, 6dm2 ir 9 dm2. Raskite gretasienio tūrį.

Ats.: 18 dm^3.

3. Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinės lygios $2\sqrt{2}$ cm ir 5 cm, kampas tarp jų – 45o. Mažesnioji gretasienio įstrižainė lygi 7 cm. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

Ats.: 60 cm^3.

A lygis

1. Uždaros dėžės pagrindas – kvadratas. Jai pagaminti sunaudota S m2 faneros. Kokie turi būti dėžės matmenys, kad jos tūrio reikšmė būtų didžiausia?

Ats.: Kubo formos dėžė, kurios briauna $\sqrt{\frac{S}{6}}$.

2. Stačiojo gretasienio įstrižainė lygi d ir su viena siena sudaro 30o kampą, o su kita siena – 45o kampą. Raskite jos tūrį.

Ats.: $\frac{d^3 \cdot \sqrt{2}}{8}$.

3. Gretasienio sienos – lygūs rombai, kurių kraštinė – a, o smailusis kampas – 60o. Raskite gretasienio tūrį.

Ats.: $\frac{\sqrt{2}\cdot a^3}{2}$.

10. Į ritinį su pagrindo spinduliu R įbrėžtas stačiakampis gretasienis, kurio įstrižainė su ritinio pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Kampas tarp gretasienio pagrindo įstrižainių lygus 60o . Raskite gretasienio tūrį.

Ats.: $2\sqrt{3}\cdot R^3\cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Prizmės tūris

Informacinė medžiaga

1. Stačiosios prizmės tūris lygus pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.
2. Pasviroji prizmė lygiatūrė su tokia stačiąja prizme, kurios pagrindas – pasvirosios prizmės statmenasis pjūvis, o aukštinė – pasvirosios prizmės šoninė briauna.

Uždaviniai

1. Paveiksle pavaizduota taisyklingoji keturkampė prizmė, per kurios apatinio pagrindo įstrižainę DB ir viršutinio pagrindo įstrižainės A_1C_1 nelygiagrečios. DB_1 galą C_1 nubrėžta pjūvio plokštuma. Prizmės pagrindo plotas lygus pjūvio plotui ir lygus $20cm^2$. Raskite prizmės tūrį.

Sprendimas.

2. $S_{ABCD} = \frac{BD^2}{2}$

3. $S_{BDC_1} = \frac{BD\cdot C_1O}{2}$

4. $\frac{BD^2}{2} = \frac{BD \cdot C_1O}{2}$

$BD^2 = BD \cdot C_1O$.

$BD^2 - BD \cdot C_1O = 0$.

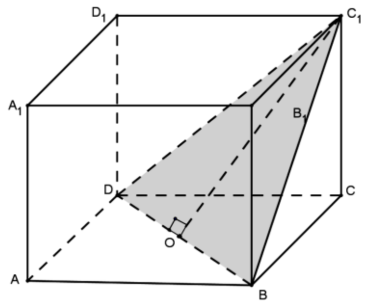
$BD(BD - C_1O) = 0$.

$BD = C_1O$.

$\frac{BD^2}{2} = 20$.

$BD^2 = 40$.

$BD = 2\sqrt{10}$.



32 pav.

5. Iš stataus ΔC_1OC:

$CC_1 = \sqrt{C_1O^2 - OC^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{10}\right)^2 - \left(\sqrt{10}\right)^2} = \sqrt{30}$.

6. $V = S_{ABCD} \cdot cc_1 = 20\sqrt{30}$ (cm^3).

Ats.: $20\sqrt{30}$ cm^3

2. Stačiosios prizmės pagrindas – taisyklingasis trikampis. Plokštuma, einanti per vieną apatinio pagrindo kraštinę ir priešais ją esančią pagrindo viršūnę, pasvirusi į apatinio pagrindo plokštumą kampu φ. Pjūvio plotas lygus Q. Raskite prizmės tūrį.

Sprendimas.

1. $AB = BC = AC$.

2. Kampas ADA_1 lygus φ, nes AD statmena BC, o pagal trijų statmenų teoremą BC statmena A_1D_1. $S_{A_1BC} = Q$ (33 pav.)

3. Tegul $AB = BC = AC = x$.

4. Iš stačiojo trikampio ADC:

5. $AD = x \cdot \sin 60^0 = \frac{x\sqrt{3}}{2}$,

6. Iš stačiojo trikampio A_1AD:

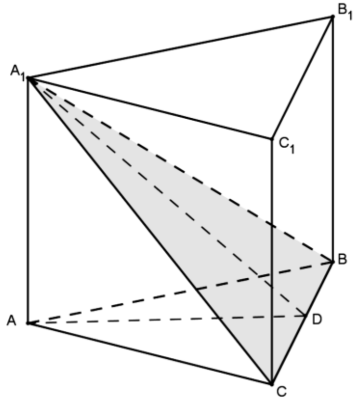
$A_1D = \frac{AD}{\cos\varphi} = \frac{x\sqrt{3}}{2 \cdot \cos\varphi}$,

$A_1A = AD \cdot \mathrm{tg}\varphi = \frac{x\sqrt{3} \cdot \mathrm{tg}\varphi}{2}$.

7. $S_{A_1BC} = \frac{BC \cdot A_1D}{2}$;

$Q = x\frac{x\sqrt{3}}{4 \cdot \cos\varphi}$;

$x = \sqrt{\frac{4Q\cos\varphi}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{\frac{Q\cos\varphi}{\sqrt{3}}}$.



33 pav.

8. $A_1A = \frac{2\sqrt{3} \cdot \mathrm{tg}\varphi}{2} \cdot \sqrt{\frac{Q \cdot \cos\varphi}{\sqrt{3}}} =$

$\mathrm{tg}\varphi\sqrt{\sqrt{3} \cdot Q \cdot \cos\varphi}$.

9. $S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 60^0}{2} = \frac{1}{2}\ \frac{4Q \cdot \cos\varphi}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = Q \cdot \cos\varphi$.

10. $V = S_{ABC} \cdot AA_1 = Q\cos\varphi \cdot \mathrm{tg}\varphi \cdot \sqrt{\sqrt{3}Q \cdot \cos\varphi} =$

$Q\sin\varphi\sqrt{\sqrt{3}Q \cdot \cos\varphi}$.

$V = Q \cdot \sin\varphi \cdot \sqrt{\sqrt{3}Q \cdot \cos\varphi}$.

Ats.: $Q \cdot \sin\varphi \cdot \sqrt{\sqrt{3}Q \cdot \cos\varphi}$.

3. Taisyklingosios keturkampės prizmės įstrižainė sudaro su šonine siena 30° kampą. Prizmės pagrindo karštinės ilgis lygus $\sqrt{2}$. Raskite prizmės tūrį.

Sprendimas.

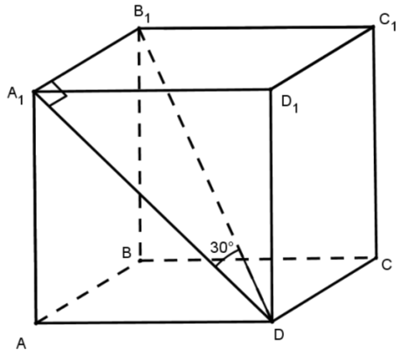
1. $\angle B_1DA_1 = 30°$.

2. $AB = \sqrt{2}$.

3. Iš ΔB_1A_1D :

4. $\frac{A_1B_1}{A_1D} = \text{tg}30°$

5. $A_1D = \frac{A_1B_1}{\text{tg}30°} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$.



34 pav.

6. Iš stataus ΔAA_1D:

7. $AA_1 = \sqrt{A_1D^2 - AD^2} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$

8. $V = (\sqrt{2})^2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4.$

Ats.: 4.

Didaktinė medžiaga

B lygis

1. Stačiosios piramidės pagrindas – trikampis, kurio 5 cm ir 6 cm ilgio kraštinės sudaro 30° kampą. Prizmės šoninė briauna lygi 4 cm. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

Ats.: 30 cm^3.

2. Taisyklingosios šešiakampės prizmės didžiausio įstrižinio pjūvio plotas lygus 4 m2, o atstumas tarp dviejų priešingų šoninių sienų – 2 m. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

Ats.: 6 m^3.

3. Stačiosios trikampės prizmės pagrindo kraštinės lygios 4,5 ir 7 cm, o šoninė briauna lygi pagrindo ilgiausiajai aukštinei. Raskite prizmės tūrį. 1

Ats.: 49 cm^3.

A lygis

1. Stačiosios prizmės pagrindas – statusis trikampis, kurio įžambinė – c, o smailusis kampas – α. Didžiausios šoninės sienos plotas lygus Q. Raskite prizmės tūrį.

Ats.: $\frac{1}{4}$ Qc·sin2α.

2. Prizmės pagrindas – trapecija, kurios lygiagrečiųjų kraštinių ilgiai – 44 cm ir 28 cm, o nelygiagrečiųjų – 17 cm. Prizmės vienas įstrižinis pjūvis yra rombas, kurio kampas lygus 45°.Tas pjūvis yra statmenas pagrindo plokštumai. Raskite prizmės tūrį.

Ats.: ≈14,9 dm^3.

3. Taisyklingosios trikampės prizmės tūris lygus $12\sqrt{3}$, šoninio paviršiaus plotas – 6. Raskite prizmės pagrindo kraštinės ilgį.

Ats.: 24.

4. Geležinkelio pylimo pjūvis yra trapecijos formos. Jos apatinis pagrindas lygus 22 m, viršutinis pagrindas – 8m, aukštis – 4 m. Kiek kubinių metrų žemės tenka 100 m pylimo?

Ats.: 6000 m^3.

Piramidės tūris

Informacinė medžiaga

1. Piramidės tūris lygus jos pagrindo ploto ir aukštinės sandaugos trečdaliui.

2. Nupjautinės piramidės, kurios aukštinė lygi H, o pagrindų plotai – S ir S_1, tūrio formulė yra:

$$V = \frac{1}{3}H \cdot (S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}).$$

3. Panašiųjų briaunainių tūriai sutinka kaip atitinkamų briaunų kubai.

Uždaviniai

1. Piramidės pagrindas – lygiašonis trikampis, kurio šoninė kraštinė lygi a, kampas prie viršūnės – α. Šoninės sienos, einančios per lygias pagrindo kraštines, statmenos piramidės pagrindo plokštumai, o trečioji siena sudaro su ja kampą φ. Raskite piramidės tūrį.

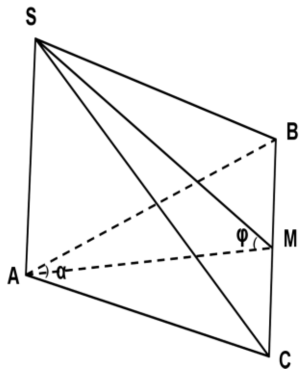
Sprendimas.

1. Tegul AB=AC= a, ∠BAC= α, AM statmena BC. Kadangi AS statmena plokštumai ABC, tai AM yra pasvirosios SM projekcija plokštumoje ABC. Vadinasi, MS statmena BC, t. y. kampas AMS lygus φ (35 pav.).

2. Iš stačiojo trikampio AMC:

$AM = AC \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = a \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$

3. Iš stačiojo trikampio SAM:



35 pav.

$$H = AS = AM \cdot tg\varphi = a \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot tg\varphi$$

4. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin\alpha.$

5. $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot H;$

6. $V = \frac{1}{6} \cdot a^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot tg\varphi.$

Ats.: $\frac{1}{6} \cdot a^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot tg\varphi.$

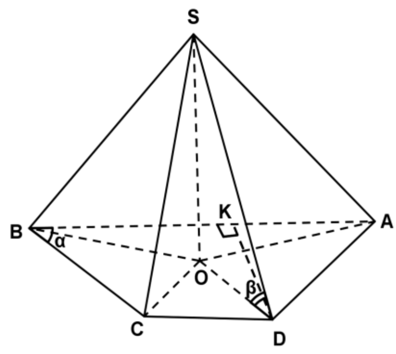
2. Piramidės pagrindas yra trapecija, kurios šoninės kraštinės ir mažesnysis pagrindas lygūs a, o smailusis kampas – α. Piramidės šoninės briaunos su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Raskite piramidės tūrį.

Sprendimas

1. Tegul BC= CD= AD= a, ∠ABC= =∠BAD = α, ∠SDO= β.

2. Kadangi ∠SDO= ∠SCO = ∠SBO= =∠SAO, tai OA= OB= OC= OD, ir O – apskritimo, apibrėžto apie trapeciją ABCD, centras (36, 37 pav.).

3. BCD= 180°-α. Trikampis BCD yra lygiašonis, todėl CO dalija kampą BCD į dvi lygias dalis. ∠ BCO =∠ DCO = $90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Trikampis BOC yra lygiašonis, todėl kampas OBC lygus - $\left(90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$, o kampas BOC – α.

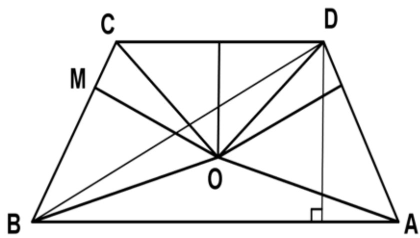


36 pav.

4. OM – lygiašonio trikampio BOC aukštinė, pusiaukampinė ir pusiaukraštinė.

Iš stačiojo trikampio OMC:

$$OC = \frac{CM}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{2\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$



37 pav.

5. Nubrėžiame DK, statmeną AB. Iš stačiojo trikampio AKD:

$AK = AD \cdot \cos\alpha = a \cdot \cos\alpha$;

$KD = AD \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\alpha$;

$AB = CD + 2 \cdot AK = a + 2a \cdot \cos\alpha$.

6. $S_{ABC} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot KD = \frac{1}{2}(2a + 2a \cdot \cos\alpha) \cdot a \cdot \sin\alpha =$

$= a^2 \cdot (1 + \cos\alpha) \cdot \sin\alpha = 2a^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\alpha.$

7. Iš stačiojo trikampio SOD:

$$OS = OD \cdot tg\beta \frac{a}{2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} tg\beta$$

8. $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot OS = \frac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\alpha \cdot \frac{a \cdot tg\beta}{2\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} =$

$$= \frac{a^3}{3}\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} tg\beta = \frac{2a^3}{3}\cos^3\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot tg\beta ;$$

$$V = \frac{2a^3}{3}\cos^3\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot tg\beta$$

Ats.: $\frac{2a^3}{3}\cos^3\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot tg\beta.$

3. Taisyklingosios trikampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinės – a ir b (a>b), dvisienis kampas prie pagrindo – α. Raskite jos tūrį.

Sprendimas.

1. AB = BC= AC = a,

2. $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = b$ (38 pav.).

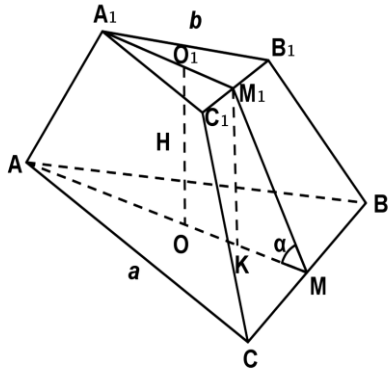
3. $V = \frac{1}{3}H \cdot \left(S_{ABC} + S_{A^1B^1C^1} + \right.$
$\left. + \sqrt{S_{ABC} \cdot S_{A^1B^1C^1}}\right)$

4. kur H - OO_1 (piramidės aukštinė).

5. $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

6. $S_{A_1B_1C_1} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$;

7. $\sqrt{S_{ABC} \cdot S_{A_1B_1C_1}} = \frac{ab\sqrt{3}}{4}$.



38 pav.

8. M ir M_1 - kraštinių BC ir B_1C_1 vidurio taškai. A_1M_1 statmena B_1C_1; AM statmena BC, MM_1 statmena BC.

9. $M_1MO = \alpha$

10. Nubrėžiame KM_1 lygiagrečią OO_1.

11. Iš stačiojo trikampio KM_1M:

$H = KM_1 = OO_1 = KM \cdot tg\alpha$, kur $KM = OM - O_1M_1$.

12. Iš taisyklingojo trikampio ABC, kuriame AM statmena BC:

$AM = a \cdot \sin 60° = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}$.

$OM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}$.

13. Iš taisyklingojo trikampio $A_1B_1C_1$ analogiškai randame O_1M_1, kuri lygi $\frac{b\cdot\sqrt{3}}{6}$.

14. $M = \frac{a\sqrt{3}}{6} - \frac{b\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}\cdot(a-b)}{6}$.

15. $H = \frac{\sqrt{3}\cdot(a-b)}{6} \cdot tg\alpha$.

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(a-b)\sqrt{3}}{6} \cdot tg\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} (a^2 + b^2 + ab)$.

$V = \frac{(a^3 - b^3)\cdot tg\alpha}{24}$.

Ats.: $\frac{(a^3-b^3)\cdot tg\alpha}{24}$.

Didaktinė medžiaga

B lygis

1. Taisyklingosios šešiakampės piramidės šoninė briauna lygi 1,4 m. Jos pagrindo kraštinė lygi 0,2 m. Raskite piramidės tūrį.

Ats.: 48 dm^3 .

2. Piramidės pagrindas – lygiašonis trikampis, kurio kraštinės lygios 6 cm, 6 cm ir 8 cm. Visos šoninės briaunos lygios 9 cm. Raskite piramidės tūrį.

Ats.: 48 cm^3 .

3. Trikampės nupjautinės piramidės aukštinė 10 m, vieno pagrindo kraštinės lygios 27, 29 ir 52 m, kito pagrindo perimetras lygus 72 m. Raskite nupjautinės piramidės tūrį.

Ats.: 1900 m^3.

A lygis

1. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinės lygios a ir $a\sqrt{3}$. Šoninė siena pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu γ. Raskite piramidės tūrį.

Ats.: $\frac{a^3\cdot(3\sqrt{3}-1)\cdot \mathrm{tg}\gamma}{6}$.

2. Piramidės pagrindas – taisyklingasis trikampis, kurio kraštinė – a. Viena šoninė siena yra statmena pagrindo plokštumai, o kitos dvi šoninės sienos su pagrindu sudaro kampus φ. Raskite piramidės tūrį ir didžiausios šoninės sienos plotą.

Ats.: $\frac{1}{16}a^3\cdot \mathrm{tg}\varphi$, $\frac{a^2\sqrt{3}}{8\cdot\cos\varphi}$.

3. Raskite taisyklingosios keturkampės piramidės tūrį, jeigu šoninės sienos plotas lygus S, o plokščias kampas prie viršūnės lygus α.

Ats.: $\frac{4S\cdot\sqrt{S}}{3\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\sqrt{\cos\alpha\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

4. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė briauna lygi 1 ir su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Raskite piramidės tūrį.

Ats.: $\frac{1^3\sqrt{3}}{8}\cdot\sin2\alpha\cdot\cos\alpha$.

5. Taisyklingosios trikampės piramidės tūris lygus V, o jos šoninė siena su pagrindu sudaro kampą α. Raskite piramidės paviršiaus plotą.

Ats.: $\frac{\sqrt{3}^3\cdot\sqrt{9\cdot V^2\cdot \mathrm{ctg}^2\alpha}\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}$.

6. Taisyklingosios šešiakampės piramidės tūris lygus $66\sqrt{3}$, o pagrindo kraštinės ilgis – 2. Raskite piramidės aukštinės ilgį.

Ats.: 33.

Ritinio, kūgio, rutulio ir jo dalių tūris.

Informacinė medžiaga

1. Rutulys vadinamas įbrėžtu į ritinį (kūgį), jei ritinio (kūgio) pagrindai (pagrindas) ir kiekviena sudaromojo liečia ritinį. Rutulio, įbrėžto į ritinį (kūgį) centras yra šio kūno ašyje.

2. Rutulys vadinamas apibrėžtu apie ritinį, jei ritinio pagrindai yra rutulio pjūviai. Rutulio centras yra ritinio ašyje.

3. Rutulys vadinamas apibrėžtu apie kūgį, jei kūgio pagrindas yra rutulio pjūvis, o kūgio viršūnė priklauso paviršiui. Rutulio centras yra kūgio ašyje.

4. Rutulys vadinamas apibrėžtu apie nupjautinį kūgį, jei jo pagrindai yra rutulio pjūviai. Rutulio centras yra nupjautinio kūgio ašyje.

5. Ritinio tūris lygus jo pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai:

$$V = \pi r^2 \cdot H.$$

6. Kūgio tūris lygus jo pagrindo ploto ir aukštinės sandaugos trečdaliui.

$$V = \frac{1}{3}\,\pi r^2 \cdot H$$

7. Nupjautinio kūgio tūris lygus:

$$V = \frac{1}{3}\pi H \cdot (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2).$$

Kur R_1 ir R_2 – pagrindų spinduliai, H- kūgio aukštinė.

16. Rutulio, kurio spindulys – R, tūrio formulė yra:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^2.$$

8. Rutulio nuopjova vadinama rutulio dalis, kurią nuo jo nukerta kuri nors plokštuma.

9. Jei rutulio spindulys lygus R, o nuopjovos aukštinė – h rutulio nuopjovos tūris yra:

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} \cdot h\right)$$

10. Rutulio sluoksniu vadinama rutulio dalis, esanti tarp dviejų lygiagrečių kertamųjų plokštumų. Skrituliai, susidarę, lygiašonėms plokštumoms perkirtus rutulį, vadinami rutulio sluoksnio pagrindais, o atstumas tarp tų plokštumų – dviejų rutulio sluoksnio aukštine. Rutulio sluoksnio tūrį galima apskaičiuoti kaip dviejų rutulio nuopjovų tūrių skirtumą.

11. Rutulio išpjova vadinamas kūnas, gautas skritulio išpjovą, kurios kampas mažesnis nei 90°, apsukus, apie tiesę, einančią per vieną skritulio išpjovą ribojančių spindulių. Rutulio išpjova sudaro nuopjova ir kūgis. Kai rutulio spindulys lygus R, o rutulio nuopjovos aukštinė lygy h , rutulio išpjovos tūrio V formulė yra:

$$V = \frac{2}{3}\, \pi\, R^2 \cdot h.$$

Uždaviniai

1. Ritinio aukštinės ilgis lygus 4 dm. Jo ašinio pjūvio įstrižainė sudaro su pagrindo plokštuma 30° kampą. Raskite ritinio tūrį.

Sprendimas.

1. $OO_1 = 4$ cm.

$\angle CAD = 30°$.

2. Iš stataus ΔCAD:

$\frac{CD}{AD} = tg30°$.

$\frac{4}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

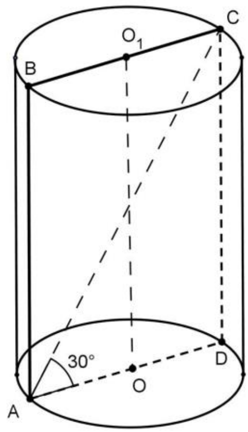
$AD = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$(cm).

3. $R = AO = OD = 2\sqrt{3}$(cm).

4. $V = \pi \cdot R^2 H$.

$V = \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot 4 = \pi \cdot 3 \cdot 4 =$

$48\pi(cm)^3$.



39 pav.

Ats.: $48\pi(cm)^3$.

2. Raskite kūgio tūrį, jeigu jo pagrindo plotas lygus Q, o šoninio paviršiaus plotas S.

Sprendimas.

1. 40pav. Pavaizduoto kūgio ašinis pjūvis.
2. $V = \frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot OS$.

4. $Q = \pi \cdot OA^2$ arba $OA = \sqrt{\frac{Q}{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi \cdot Q}}{\pi}$.

5. $S_{šon} = S = \pi \cdot OA \cdot AS$.

6. $AS = \frac{s}{\pi \cdot OA} = \frac{S}{\sqrt{\pi \cdot Q}}$.

7. Iš stačiojo trikampio AOS:

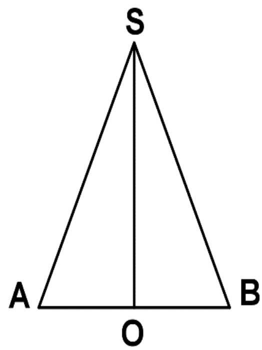
$OS = \sqrt{AS^2 - OA^2} =$

$= \sqrt{\frac{S^2}{(\pi \cdot Q)} - \frac{Q}{\pi}} = \sqrt{\frac{(S^2 - Q^2)}{\pi \cdot Q}}$.

8. $V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{Q}{\pi}\sqrt{\frac{(S^2 - Q^2)}{\pi \cdot Q}} =$

$= \frac{1}{3}\sqrt{Q \cdot \frac{S^2 - Q^2}{\pi}}$.

$V = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{Q \cdot (S^2 - Q^2)}{\pi}}$.



40 pav.

Ats.: $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{Q \cdot (S^2 - Q^2)}{\pi}}$.

3. Nupjautinio kūgio apatinio ir viršutinio pagrindu spindulių santykis lygus 2. Sudaromosios ilgis lygus 8 cm. Kampo, kurį šoninė briauna sudaro su pagrindo plokštuma, didumas lygus 60°. Raskite duotojo kūgio tūrį.

Sprendimas.

1. $\frac{AO}{BO_1} = 2$, $\angle BAO = 60^\circ$.

2. Brėžiame:

$AC \perp AO$, $O_1B = r$.

3. Kadangi $\frac{R}{r} = 2$, tai

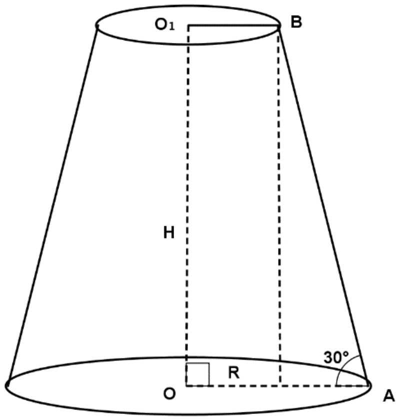
$R = 2r$. $OA = r$.

4. Iš stataus ΔACB:

$\frac{BC}{AB} = \sin 60°$.

$BC = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (cm).

$H = BC = 4\sqrt{3}$(cm).



41 pav.

5. $AC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ (cm).

6. Vadinasi $r = 4$ (cm).

$R = 8$ (cm).

7. $V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr)$

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4\sqrt{3}(16 + 69 + 32) = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi \cdot 112 = 448\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3}$ (cm^3).

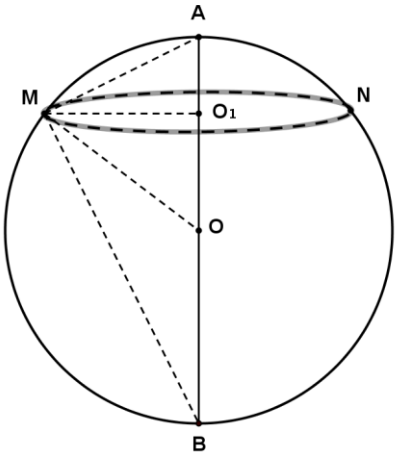
Ats.: $448\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3}$ (cm^3).

4. Rutulio skersmeniui statmena plokštuma ω skersmenį dalija į 3 cm ir 9 cm atkarpas. Raskite rutulio dalių, į kurias ji dalija ta plokštuma, tūrius.

Sprendimas.

1. $MN \perp AB$, $AO_1 = 3$(cm), $O_1B = 9$(cm).

2. Gauname dvi rutulio nuopjovas, kurių aukštinės $AO_{ą1} = h_1$, $O_1B = h_2$ ir $MO = R$.



42 pav.

3. ΔBMA status, nes įbrėžtinis kampas BMA remiasi į skersmenį AB.

$MO_1^2 = AO_1 \cdot O_1B$

$MO_1^2 = 3 \cdot 9 = 27$

$MO_1 = 3\sqrt{3}.$

4. $O_1O = R - AO_1 = R - 3$.

5. Iš stataus ΔMO_1O;

$MO^2 = MO_1^2 + O_1O^2$

$R^2 = (3\sqrt{3})^2 + (R-3)^2.$

$R^2 = 27 + R^2 - 6R + 9.$

$6R = 36.$

$R = 6.$

6. Randame nuopjovą tūriui V_1 ir V_2;

$V_1 = \pi h_1^2 (R - \frac{1}{3} h_1).$

$V_1 = 45\pi(cm^3)$.

$V_2 = \pi \cdot h_2^2\left(R - \frac{1}{3}h_2\right) = \pi \cdot 81\left(6 - \frac{1}{3} \cdot 9\right) = 243\pi(cm^3)$.

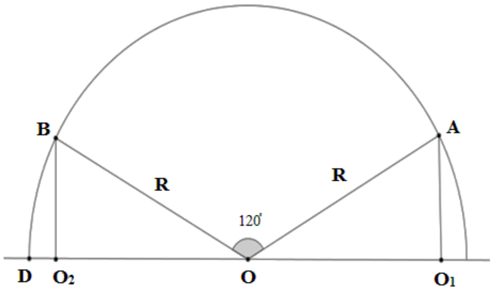
Ats.: $45\pi(cm^3)$; $243\pi(cm^3)$.

5. Skritulio išpjova, kurios spindulys – R, o lankas 120° kampu sukasi apie tiesę, einančia per centrą ir sudarančia su išpjova 30° kampą. Raskite sukimosi kūno tūrį (42 pav).

Sprendimas.

1. AO = R, ∪AB = 120°, BOD = 30°.

2. ∪AB = 120°, AOO_1 = 180° – (120° + 30°) = 30°. Aišku, kad gautų dviejų išpjovų tūriai yra lygūs.



42 pav.

$V_{S.K.} = V_{rut.} - 2 \cdot V_{išpj.}$

3. Iš stačiojo trikampio OO_2B:

$OO_2 = R \cdot \cos 30^\circ = \frac{R \cdot \sqrt{3}}{2}$.

4. $V_{S.K.} = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3(R - OO_2) = \frac{4}{3}\pi \cdot R^2(R - R + OO_2) = \frac{4}{3}\pi \cdot R^2 \cdot \cdot \frac{R \cdot \sqrt{3}}{2}$,

$V_{S.K.} = \frac{2\pi \cdot R^3\sqrt{3}}{3}$.

Ats.: $\frac{2\pi \cdot R^3\sqrt{3}}{3}$.

6. Į kūgį, kurio sudaromoji pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α, įbrėžtas rutulys. Raskite rutulio tūrio santykį su kūgio tūriu.

Sprendimas.

1. 43 pav. Pavaizduotas kūgio ašinis pjūvis. Susikirtimo su rutuliu pjūvis yra apskritimas, kurio spindulys – OD, ir kuris įbrėžtas į trikampį ABS.

2. Tegul OD = R, ABS = α.3.

3. Iš stačiojo trikampio ODB:

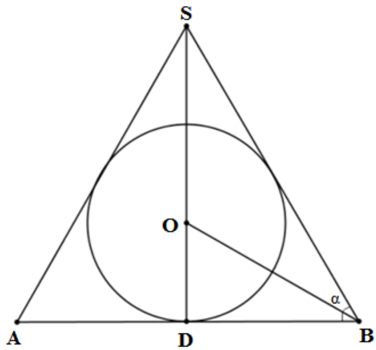
$\frac{R}{DB} = tg(\alpha/2)$,

$DB = \frac{R}{tg(\propto/2)}$.

4. Iš stačiojo trikampio SDB:

$\frac{SD}{DB} = tg\alpha$,

$SD = \frac{R}{tg(\propto/2)} \cdot tg\alpha$.



43 pav.

5. $V_{rut.} = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$.

6. $V_{K.} = \frac{1}{3}\pi \cdot DB^2 \cdot SD = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2}{tg^2(\propto/2)} \cdot \frac{R}{tg(\propto/2)} \cdot tg\alpha = \frac{1}{3}\pi \cdot$ $\cdot R^3 \frac{tg\propto}{tg^3(\propto/2)}$.

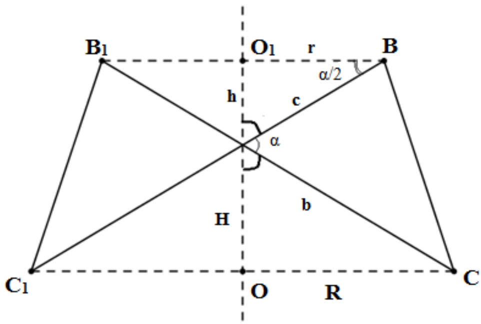
7. $\frac{V_{rut.}}{V_{K.}} = \frac{(4/3)\cdot \pi \cdot R^3}{(1/3)\cdot \pi \cdot R^3 \cdot (tg\alpha/tg^3(\propto/2))} = \frac{4 \cdot tg^3(\alpha/2)}{tg\alpha}$.

Ats.: $\frac{4 \cdot tg^3(\alpha/2)}{tg\alpha}$.

7. Trikampis, kurio kraštinės b ir c sudaro kampą α, sukamas apie ašį, einančią per kampo α viršūnę ir sudarančią lygius kampus su kraštinėmis b ir c. Raskite sukimosi kūno tūrį.

Sprendimas.

1. Sukimosi kūno tūris V (44 pav.) lygus kūgio, gauto, sukant trapeciją OO_1BC, tūrio ir dviejų kūgių, gautų, sukant trikampius AO_1B ir AOC, tūrių skirtumui.



44 pav.

2. Pagal sąlygą kampas BAO_1 lygus kampui CAO, todėl:

$\angle BAO_1 = \angle CAO = 90^\circ - \alpha/2;$

$\angle O_1BA = \angle OCA = \alpha/2.$

3. $AO = H = b \cdot \sin(\alpha/2);$

$OC = R = b \cdot \cos(\alpha/2)$ (iš stačiojo trikampio AOC).

4. $O_1A = h = c \cdot \sin(\alpha/2);$

$O_1A = r = c \cdot \cos(\alpha/2)$ (iš stačiojo trikampio AO_1B).

5. $V = \frac{\pi}{3}(H + h)(R^2 + R\cdot r + r^2) - \frac{\pi}{3}H \cdot R^2 - \frac{\pi}{3}h \cdot r^2 =$

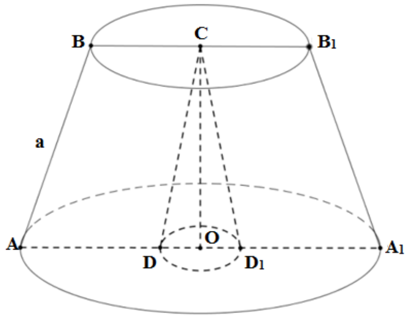
$= \frac{\pi}{3}\sin(\alpha/2) \cdot \cos^2(\alpha/2) \cdot ((b + c)(b^2+bc+c^2) - b^3 - c^3) =$

$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \sin\alpha \cdot \cos(\alpha/2) \cdot (b^3 + b^2c + bc\cdot(b + c) + bc^2 + c^3 - b^3 - c^3) =$

$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot \cos(\alpha/2) \cdot 2bc \cdot (b + c) = \frac{1}{3}\pi \cdot bc \cdot (b + c) \cdot \sin\alpha \cdot \cos(\alpha/2).$

Ats.: $\frac{1}{3}\pi \cdot bc \cdot (b + c) \cdot \sin\alpha \cdot \cos(\alpha/2).$

8. Rombas, kurio kraštinė lygi a ir smailusis kampas – α, sukamas apie ašį, einančią per smailiojo kampo viršūnę ir statmeną jo kraštinei. Raskite gauto sukimosi kūno tūrį (45 pav.).



45 pav.

Sprendimas.

1. Sukimosi kūno tūris lygus nupjautinio kūgio ABB_1A_1 tūrio bei kūgio DCD_1 tūrio skirtumui:

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot OC \cdot (AO^2 + AO +\cdot$

$+BC + BC^2) - \frac{1}{3}\pi \cdot OD^2 \cdot OC =$

$= \frac{1}{3}\pi \cdot OC \cdot (AO^2 + AO \cdot BC + + BC^2 - OD^2)$.

2. Iš stačiojo trikampio COD:

$OC = a \cdot \sin\alpha$,

$OD = a \cdot \cos\alpha$,

$AO = a + a \cdot \cos\alpha = a \cdot (1 + \cos\alpha) = 2a \cdot \cos^2(\alpha/2)$.

3. $V = 2\pi \cdot a^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2(\alpha/2)$.

Ats.: $V = 2\pi \cdot a^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2(\alpha/2)$.

9. Iš ritinio formos ruošinio, kurio ilgis ir skersmuo lygūs, ištekintas didžiausio tūrio rutulys. Kiek procentų medžiagos sudaro atliekos?

Sprendimas.

1. Iš uždavinio sąlygos aišku, kad ritinio aukštinė H lygi 2R.
2. $V_{rit.} = \pi \cdot R^2 \cdot H = 2 \cdot \pi \cdot R^3$.

3. $V_{rut.} = \frac{4}{3}\ \pi \cdot R^3$.

4. Surandame, kiek procentų sudaro atliekos:

$V_{rit.} - V_{rut.} = 2\ \pi \cdot R^3 - \frac{4}{3}\ \pi \cdot R^3 = \frac{2}{3}\ \pi \cdot R^3$;

$$\frac{2/3 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot 100\%}{2\pi \cdot R^3} = \frac{100\%}{3} = 33\frac{1}{3}\%.$$

Ats.: $33\frac{1}{3}\%$.

Didaktinė medžiaga

B lygis

1. Ritinio pagrindo spindulys lygus 4cm, ašinio pjūvio plotas lygus $72 cm^2$. Apskaičiuokite ritinio tūrį.

Ats.: $144\pi\ cm^3$.

2. Ritinio aukštinė lygi jo pagrindo skersmeniui. Pagrindo spindulys lygus 1 m. Raskite ritinio tūrį.

Ats.: $2\pi\ m^3$.

3. Kūgiškos grūdų krūvos aukštis – 2,4 m, o pagrindo apskritimas – 20 m. 1 m^3 grūdų masė lygi 750 kg. Kiek tonų grūdų yra krūvoje?

Ats.: $\approx$19 t.

4. Statusis trikampis, kurio statiniai lygūs 12 ir 16 cm, sukamas apie įžambinę. Raskite sukimosi kūno tūrį.

Ats.: 614,4 cm^3.

5. Kūgio ašinis pjūvis yra lygiašonis trikampis, kurio plotas lygus 9 m^2. Raskite kūgio tūrį.

Ats.: $9\pi\ m^3$.

6. Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai lygūs 1 dm ir 9dm, sudaromoji – 1m. Apskaičiuokite kūgiui tūrį.

Ats.: $182\pi\ dm^3$

7. Trijų rutulių spinduliai lygūs 3, 4 , 5 cm. Raskite spindulį, kurio tūris lygus jų tūrių sumai.

Ats.: 6 cm.

8. Rutulio išpjovos pagrindo apskritimo spindulys lygus 60 cm, o rutulio spindulys lygus 75 cm. Koks rutulio išpjovos tūris?

Ats.: $112{,}5\pi\ cm^3$, $450\pi\ cm^3$.

9. Rutulio skersmeniui statmena plokštuma dalija skersmenį į 3 cm ir 9 cm dalis. Koks atitinkamų rutulio dalių tūris?

Ats.: $45\pi c\ m^3$, $243\pi\ cm^3$.

A lygis

1. Raskite tūrį ritinio, įbrėžto į taisyklingą šešiakampę prizmę, kurios kiekviena briauna lygi a.

Ats.: $\frac{3}{4}\ \pi\ a^3$.

2. Ritinys perkirstas plokštuma, lygiagrečia ašiai ir atkertančia pagrindo apskritime lanką $\propto$. Pjūvio įstrižainė lygy a ir su pagrindo plukštuma sudaro kampą β. Raskite ritinio tūrį.

Ats.: $\frac{\pi \cdot a^3 - \sin\beta \cdot \cos^2\beta}{4 \cdot \sin^2(\frac{\alpha}{2})}$.

3. Ritinio tūris lygus V. Raskite apie jį apibrėžtos taisyklingosios keturkampės prizmės tūrį.

Ats.: $\frac{4 \cdot V}{\pi}$.

4. Kūgio pagrindo styga, kurios ilgis – a, jungia lanko 2$\propto$ galus. Kmapas tarp kūgio sudaromosios ir pagrindo plokštumos φ. Apskaičiuokite kūgio tūrį.

Ats.: $\frac{\pi \cdot tg\varphi}{24} \cdot (\frac{a}{\sin\propto})^3$.

5. Kūgio pagrindo spindulys lygus R, o kampas prieš ašinio pjūvio viršūnės – α. Raskite apie tą kūgį apibrėžtos taisyklingosios trikampės piramidės tūrį.

Ats.: $\sqrt{3} \cdot R^3 \cdot ctg(\alpha/2)$.

6. Į nupjautinį kūgį įbrėžtas rutulys, kurio spindulys – r. Kūgio sudaromoji pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α. Raskite kūgio tūrį.

Ats.: $\frac{2\pi \cdot r^3}{3} \cdot \left(\frac{4}{sin^2\alpha} - 1\right)$.

7. Trikampio ABC plotas lygus S, kraštinė AC lygi b, o kampas CAB – α. Raskite sukimosi kūno, gauto, sukant trikampį ABC apie kraštinę AB, tūrį.

Ats.: $\frac{2\pi \cdot S \cdot b \cdot \sin\alpha}{3}$.

8. Skritulio išpjova, kurios kampas - 30˚, spindulys – R, sukama apie vieną jos krašto spindulį. Raskite gauto kūno tūrį.

Ats.: $\frac{1}{3}\pi \cdot R^3 \cdot (2 - \sqrt{3})$.

9. Plokštuma, statmena rutulio skersmeniui, dalija jo statmenį į dalis, lygias 3 cm ir 9 cm. Į kokias dalis padalijamas rutulio tūris?

Ats.: 288π cm^3 ir 243π cm^3.

10. Skystis iš kūgiško 0,18 m aukščio ir 0,24 m pagrindo skersmens indo perpiltas į ritinio formos indą, kurio pagrindo skersmuo lygus 0,1 m. Koks skysčio aukštis antrame inde?

Ats.: ≈0,35 m.

11. Įrodykite, kad sferos skersmens galai ir bet kuris jos taškas yra stačiojo trikampio viršūnės.

12. Piramidės pagrindas – rombas, kurio kraštinė – a, o smailusis kampas – α. Dvisienis kampas prie pagrindo lygus β. Raskite įbrėžto į tą piramidę rutulio tūrį.

Ats.: $\frac{1}{6}\pi \cdot (a \cdot \sin\alpha \cdot \mathrm{tg}(\beta/2))^3$.

13. Apie rutulį apibrėžtas nupjautinis kūgis, kurio ašinio pjūvio plotas lygus S, o pjūvio smailusis kampas – α. Raskite rutulio tūrį.

Ats.: $\frac{\pi}{6}\sqrt{S^3 \cdot \sin^3\alpha}$.

14. Į kūgį, kurio ašinio pjūvio kampas prie viršūnės lygus 2α, įbrėžtas rutulys. Didžiojo rutulio skritulio plotas lygus k. Raskite kūgio tūrį.

Ats.: $\frac{1}{3}k \cdot \sqrt{k/\pi} \cdot ctg^3(\pi/4 - \alpha/2) \cdot \mathrm{ctg}\alpha$.

Ritinio, kūgio, rutulio ir jo dalių paviršius

Informacinė medžiaga

1. Ritinio šoninio paviršiaus ploto formulė yra:

$S = 2\pi \cdot R \cdot H,$

R – ritinio pagrindo spindulys, H – aukštinė.

2. Ritinio viso paviršiaus ploto formulė yra:

$S_{rit} = 2\pi \cdot R \cdot H + 2\pi \cdot R^2.$

3. Kūgio šoninio paviršiaus plotas lygus:

$S = \pi \cdot R \cdot l,$

R – kūgio pagrindo spindulys, l – sudaromosios ilgis.

4. Kūgio viso paviršiaus plotas lygus:

$S_k = \pi \cdot R \cdot l + \pi \cdot R^2.$

5. Rutulio paviršiaus plotas lygus:

$S = 4\pi \cdot R^2,$

R – rutulio spindulys.

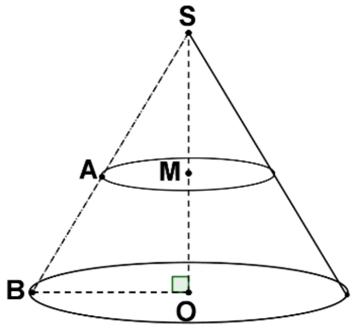
6. Sferos nuopjovos plotas lygus:

$S = 2\pi \cdot R \cdot H,$

R – sferos spindulys, H – nuopjovos aukštinė.

Uždaviniai

1. Paveiksle pavaizduotas kūgis, kurį jo pagrindui lygiagreti plokštuma dalija į dvi dalis. Raskite tų dalių šoninių paviršių plotų santykį, jei $\frac{SM}{MO} = \frac{3}{2}$.



46 pav.

Sprendimas.

1. Sakykime, kad BO = R , AM = r = $\frac{3}{5}$ R, SB = L.

2. Δ SAM ~ Δ SBO :

$\frac{SB}{SA} = \frac{SO}{SM}, \frac{SB}{SA} = \frac{5}{3}, SA = \frac{3}{5}L.$

3. $AB = L - \frac{3}{5}L = \frac{2}{5}L$.

4. Randame pirmosios dalies šoninio paviršiaus plotą:

$S_{šon_1} = \pi \cdot r \cdot SA = \pi \cdot \frac{3}{5}R \cdot \frac{3}{5}L = \frac{9\pi RL}{25}.$

5. Randame antrosios dalies šoninio paviršiaus plotą:

$S_{šon_2} = \pi \cdot AB(R + r) = \pi \cdot \frac{2}{5}L\left(R + \frac{3}{5}R\right) = \pi \cdot \frac{2}{5}L \cdot \frac{8}{5}R = \frac{16\pi RL}{25}.$

6. $S_{šon_1} : S_{šon_2} = \frac{9\pi RL}{25} : \frac{16\pi RL}{25} = \frac{9}{16}$.

Ats.: $\frac{9}{16}$.

2. Ritinio ašinio pjūvio įstrižainės ilgis lygus 15cm. Ritinio viso paviršiaus plotas lygus dvigubam jo šoninio paviršiaus plotui. Raskite ritinio viso paviršiaus plotą.

Sprendimas.

1. $AC = 15cm$, $S_{visas} = 2S_{šon.}$,

$AD = 2R$, $CD = H$.

2. Iš stataus ΔACD:

3. $AC^2 = AD^2 + CD^2$.

$4R^2 + H^2 = 225$.

4. Kadangi $2\pi R(H + R) = 2 \cdot 2\pi RH$,

tai, $H + R = 2H$,

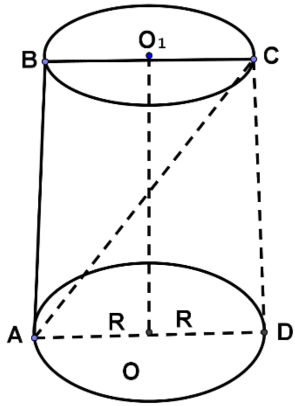
$H = R$.

5. Tada $4H^2 + H^2 = 225$, $H^2 = 45$,

$H = R = 3\sqrt{5}$ cm.

6. $S_{visas} = 2\pi \cdot 3\sqrt{5}\left(3\sqrt{5} + 3\sqrt{5}\right) =$

$= 6\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5}\,\pi = 36 \cdot 5\pi = 180\pi$ cm^2.

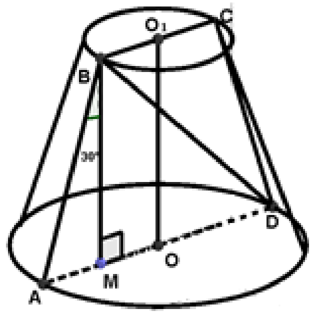


47 pav.

Ats.: 80π cm^2.

3. Paveiksle pavaizduotas nupjautinis kūgis, kurio pagrindų centrai yra taškai O ir O_1. $BM \perp AD$. $\angle ABM = 30°$. $BD \perp AB$. $OO_1 = 6$cm. Raskite duotojo nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotą.

Sprendimas.



48 pav.

1. $BM = OO_1 = 6$cm.

2. Iš stačiojo ΔABM:

$\frac{BM}{AB} = \cos 30°$.

$AB = \frac{BM}{\cos 30°} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}\, cm.$

3. $AM = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{3}cm.$

4. Iš stačiojo ΔABD:

$BM^2 = AM \cdot MD, 36 = 2\sqrt{3} \cdot MD$.

$MD = \frac{36}{2\sqrt{3}} = \frac{36}{2\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}.$

5. Tada $AD = AM + MD = 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$

$AO = OD = \frac{1}{2}AD = 4\sqrt{3}$ cm.

$MO = BO_1 = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm.

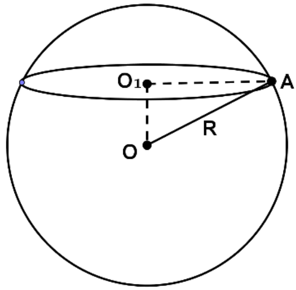
6. $S_{šon} = \pi \cdot 4\sqrt{3}(2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) =$

$= \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 72\pi$ cm^2.

Ats.: 72π cm^2.

4. Rutulį kerta plokštuma, nutolusi nuo jo centro 5 cm atstumu. Pjūvio plotas lygus $144\pi cm^2$. Raskite rutulio paviršiaus plotą.

Sprendimas.



49 pav.

1. $OO_1 = 6$ cm, $S_{PI} = 144\pi cm^2$.
2. Sakykime $AO = R$, $O_1A = r$.
3. $\pi r^2 = 144\pi$,
$r^2 = 144$,
$r = 12$ cm
4. Iš stataus ΔOO_1A:
$R = \sqrt{OO_1{}^2 + r^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169}$.
$R = 13$ cm
5. $S_R = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 13^2 = 676\pi (cm^2)$

Ats.: 676π (cm^2).

Didaktinė medžiaga

B lygis

1. Kūgiškos palapinės, kurios aukštis lygus 3,5m, o pagrindo skersmuo 4 m, šoninis paviršius padengtas kiltu. Kiek kvadratinių metrų kilto sunaudota?

Ats.: $\approx 25{,}3$ m^2.

2. Ritinio aukštinė 10 cm didesnė už pagrindo spindulį, o pilno paviršiaus plotas lygus $144\ \pi$ cm^2. Raskite pagrindo spindulį ir aukštinę.

Ats.: 4 cm ir 14 cm.

3. Nupjautinio kūgio aukštinė lygi 6 cm, pagrindų spinduliai 10 cm ir 2 cm. Apskaičiuokite jo viso paviršiaus plotą.

Ats.: $\approx 704\ \mathrm{cm}^2$.

4. Raskite kūno, gauto sukant statųjį trikampį apie mažesnįjį statinį, kurio įžambinė lygi 14 cm, o vienas statinių lygus 10 cm, viso paviršiaus plotą.

Ats.: $240\pi\ \mathrm{cm}^2$.

5. Kūgio sudaromoji, kurios ilgis lygus 6 cm, su pagrindo plokštuma sudaro 45° kampą. Raskite kūgio šoninio paviršiaus plotą.

Ats.: $18\pi\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2$.

6. Didžiojo skritulio plotas lygus 1 m^2. Raskite rutulio paviršiaus plotą.

Ats.: $4\ \mathrm{m}^2$.

A lygis

1. Kokia turi būti ritinio aukštinė, kad jo šoninio paviršiaus plotas būtų 3 kartus didesnis už pagrindo plotą.

Ats.: $\frac{3}{2}$R.

2. Statusis trikampis, kurio įžambinė c ir kampas 30°, sukamas apie tiesę, einančią per duotojo kampo viršūnę ir lygiagrečią prieš ją esančiam statiniui. Raskite gautojo kūno paviršiaus plotą.

Ats.: $7{,}8c^2$.

3. Kūgio pagrindo skersmens ilgis lygus 6 cm, kampo tarp sudaromosios ir pagrindo plokštumos didumas lygus 30°. Rasti kūgio šoninio paviršiaus plotą.

Ats.: $6\pi\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$.

4. Ritinio šoninio paviršiaus plotas lygus $56 cm^2$, jo ašinio pjūvio įstrižainė sudaro su pagrindo plokštuma kampą, kurio tangentas lygus 2. Raskite ritinio pagrindo plotą.

Ats.: $7\ cm^2$.

5. Raskite rutulio nuopjovos šoninio paviršiaus plotą, jeigu jos ašinio pjūvio lankas lygus α, o stygos ilgis a.

Ats.: $\frac{\pi a^2}{4\cos^2(\frac{\alpha}{4})}$.

6. Kaip pasikeis rutulio paviršiaus plotas, rutulio spindulį padidinus 4 kartus ?

Ats.: padidės 16 kartų.

7. Metalinis rutulys, kurio spindulys lygus 3 cm, perlydytas į kūgį. Apskaičiuokite kūgio aukštinę, jei jo šoninio paviršiaus plotas tris kartus didesnis už pagrindo plotą.

Ats.: $6\sqrt[3]{4}$cm.

8. Rutulio tūris lygus $(\sqrt{6\pi})/\pi$. Raskite rutulio paviršiaus plotą.

Ats.: 6.

9. Ritinio šoninio paviršiaus plotas lygus 56, o ašinio pjūvio įstrižainės su pagrindu sudaromo kampo tangentas lygus 2. Raskite ritino pagrindo plotą.

Ats.: 7.

10. Ritinio ašinio pjūvio įstrižainė d su sudaromąja sudaro kampą α. Raskite ritinio šoninio paviršiaus plotą.

Ats.: $\frac{1}{2}\pi d^2 \sin 2\alpha$.

11. Kūgio pagrindo apskritimo styga, kurios ilgis lygus 2, jungia 90° lanko galus. Plokštuma, kuri eina per tą stygą ir kūgio viršūnę, su pagrindo plokštuma sudaro 45° kampą. Raskite kūgio šoninio paviršiaus plotą.

Ats.: $\sqrt{64}$.

12. Į kūgį, kurio sudaromoji lygi pagrindo skersmeniui, įbrėžtas rutulys. Kūgio sudaromoji lygi a. Apskaičiuokite rutulio paviršiaus plotą.

Ats.: $\frac{\pi a^2}{3}$.

Panaudota literatūra

1. В.Б. Лидский, А.В. Овсянников задачи по элемеiтрной математике М. 1968.
2. И.С. Герасимова, В.А. Гисев Сборник задач по геометрии М. 1977
3. В.М. Говоров, П.Т. Дыбов конкурсных задач по математике М. 1986.
4. Н.П. Антонов, М.Я. Выгодский Сборник задач по алементарной математике М. 1957.

Turinys

Petrutė GREBENIČENKAITĖ

Stereometrijos kurso sisteminimas

Atsakingoji redaktorė *S. Tauraitė*
Redaktorė *I. Šiugždinytė*
Rinko ir maketavo *S. Juozapaitis*
Brėžinius braižė *A. Petkūnas*

SL. 2138. 4,67 l. l. Tiražas 1000 egz. Užsakymas 2.
Išleido leidykla „Eugrimas“, Dūkšto 28–10, 2010 Vilnius.
Spaudė „Matricos“ spaustuvė, Žalgirio 108, 2645 Vilnius.
Kaina sutartinė