Mokyklinės matematikos simbolių sistema*

VU Matematinio švietimo centras

2023 m. balandžio 28 d

Santrauka. Mokyklinės matematikos simbolių sistema yra atnaujinta ir rekomenduojama naudoti matematikos vadovėliuose. Simboliai atnaujinti siekiant integruoti matematinį samprotavimą į mokyklinės matematikos turinį, atsižvelgiant į matematikos mokymo praktiką kitose šalyse ir per daug nenukrypstant nuo mūsų mokyklinės matematikos tradicijų. Simbolių sistema sudaryta VU Matematinio švietimo centro seminare vykusių diskusijų pagrindu.

1 Matematiniai simboliai

Matematinis simbolis arba žymuo yra ženklas reprezentuojantis matematinį objektą, veiksmą su matematiniais objektais, sąryšį tarp matematinių objektų, arba struktūrinius ryšius tarp matematinių objektų formulėje. Dažniausiai naudojami matematiniai simboliai yra dešimtainiai skaitmenys 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Šių ir kai kurių kitų nekvestionuojamų simbolių neaptarinėjame. Siūlomoje matematinių simbolių sistemoje nėra tų simbolių, kurių standartizuoti, mūsų nuomone, neverta. Pavyzdžiui, dabartiniame žymenų sąraše [9] tokiais yra ploto, tūrio, perimetro, pusperimetrio, įvairių taškų žymėjimai.

Matematiniai simboliai vienaip ar kitaip atspindi matematinės sąvokos ar matematinio objekto sampratą. Mokyklinės matematikos turinyje pasitaiko įvairių laikmečių matematinių sąvokų. Pavyzdžiui, funkcijos samprata esmingai keitėsi beveik kas šimtą metų. Remdamiesi pedagoginiais sumetimais, nesiūlome naujausių sampratų, kurios reikalauja išlavinto abstraktaus mąstymo. Tačiau bandome atsisakyti supratimui nepadedančių terminų ir simbolių. Konkrečiau apie savo motyvus rašome komentaruose žemiau.

Matematiniai simboliai turi turtingą ir daugelį tūkstantmečių bei kultūrų apimančią istoriją (žr. pavyzdžiui F. Cajori knygą [3]). Matematinių simbolių rinkiniai sudaromi mokymo tikslams ne tik mūsų šalyje (žr. pavyzdžiui, Notation List).

Siūlomą mokyklinės matematikos simbolių sistemą vienija šie požymiai:

*Kontaktinis asmuo Rimas Norvaiša, el-paštas rimas.norvaisa@mif.vu.lt

1. Pagrindą sudaro švietimo ministerijos anksčiau patvirtintas ir mokyklinės matematikos praktikoje iki šiol naudojamas žymenų sąrašas [9].

2. Simboliai atnaujinti siekiant integruoti matematinį samprotavimą į mokyklinės matematikos turinį, lavinti mokinius pagrįsti matematinius teiginius naudojant logiškai taisyklingai apibrėžtas sąvokas [2].

3. Simboliai atnaujinti atsižvelgiant į matematikos mokymo tendencijas ir matematinių simbolių naudojimo praktiką kitose pasaulio šalyse.

4. Siūlomi simboliai paaiškinami ir papildomi komentarais, atkreipiant dėmesį į matematikos mokymo ir mokymosi požiūriu probleminius aspektus.

Lentelė 1: Rekomenduojami simboliai

Nr.	**Simboliai**	**Paaiškinimai**
1	$\{a, b, c\}$	Baigtinė aibė, kurios elementai a, b, c
2	$\{0, 1, 2, \dots\}$	Begalinė aibė su aiškiu elementų dėsningumu
3	$\{a \in A\colon\ S(a)\}$	Aibė visų skaičių a iš A, kuriems teisinga savybė $S(a)$
4	$\mathbb{N}$	Natūraliųjų skaičių aibė
5	$\mathbb{Z}$	Sveikųjų skaičių aibė
6	$\mathbb{D}$	Dešimtainių skaičių aibė
7	$\mathbb{Q}$	Racionaliųjų skaičių aibė
8	$\mathbb{I}$	Iracionaliųjų skaičių aibė
9	$\mathbb{R}$	Realiųjų skaičių aibė
10	$\mathbb{C}$	Kompleksinių skaičių aibė
11	(a, b)	Atviras intervalas $\{x \in \mathbb{R}\colon\ a < x < b\}$
12	$[a, b]$	Uždaras intervalas $\{x \in \mathbb{R}\colon\ a \leqslant x \leqslant b\}$
13	$(a, b]$	Intervalas $\{x \in \mathbb{R}\colon\ a < x \leqslant b\}$
14	$[a, b)$	Intervalas $\{x \in \mathbb{R}\colon\ a \leqslant x < b\}$
15	(a, ∞)	Intervalas $\{x \in \mathbb{R}\colon\ x > a\}$
16	$[a, \infty)$	Intervalas $\{x \in \mathbb{R}\colon\ x \geqslant a\}$
17	$(-\infty, a)$	Intervalas $\{x \in \mathbb{R}\colon\ x < a\}$
18	$(-\infty, a]$	Intervalas $\{x \in \mathbb{R}\colon\ x \leqslant a\}$
19	$(-\infty, \infty)$	Realiųjų skaičių aibė
20	$\in$ arba $\ni$	Aibės ir jos elemento sąryšis
21	$\notin$	Aibės ir jos elemento sąryšio neigimas
22	$\varnothing$	Tuščioji aibė
23	$\cup$	Aibių sąjunga
24	$\cap$	Aibių sankirta
25	$\setminus$	Aibių skirtumas

Lentelės tęsinys sekančiame puslapyje

Lentelės tęsinys iš ankstesnio puslapio

Nr.	Simboliai	Paaiškinimai
26	$\overline{A}$	Aibės A papildinys
27	$\subset$ arba $\supset$	Poaibio sąryšis
28	$=$ ir $\neq$	Matematinių objektų lygybė ir nelygybė
29	$\approx$	Apytikslė objektų lygybė
30	$<$ ir $>$	Griežta tvarka tarp objektų
31	$\leqslant$ ir $\geqslant$	Negriežta tvarka tarp objektų
32	$+$	Objektų sudėtis
33	$-$	Objektų atimtis
34	$\cdot$ arba $\times$	Objektų daugyba
35	$:$ arba $/$	Objektų dalyba
36	$\|a\|$	Skaičiaus a modulis
37	$\sqrt{a}$	Kvadratinė šaknis iš skaičiaus a
38	$\sqrt[n]{a}$	n-tojo laipsnio šaknis iš skaičiaus a
39	$a^{\frac{m}{n}}$	Skaičiaus a laipsnis su racionaliuoju rodikliu
40	$\mathrm{DBD}(a, b)$	Skaičių a ir b didžiausias bendrasis daliklis
41	$\mathrm{MBK}(a, b)$	Skaičių a ir b mažiausias bendrasis kartotinis
42	$f\colon X \to Y$ arba $f\colon x \mapsto f(x),\ x \in X,\ f(x) \in Y$	Funkcija f iš aibės X į aibę Y. Skaitoma „funkcija f argumentui x priskiria reikšmę $f(x)$“
43	$D_f = X$	Funkcijos f argumentų aibė lygi apibrėžimo sričiai
44	$R_f = \{f(x)\colon x \in X\}$	Funkcijos f reikšmių aibė
45	$(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots)$ arba (a_i)	Skaičių seka
46	$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$	Pirmųjų n sekos (a_i) narių suma
47	$\lim\limits_{i\to\infty} a_i = a$ arba $a_i \to a$, kai $i \to \infty$	Skaičių seka (a_i) konverguoja į skaičių a, vadinamą sekos riba.
48	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ arba $f(x) \to A$, kai $x \to a$	Funkcija f taške a artėja (konverguoja) į skaičių A, vadinamą funkcijos riba taške a
49	$f'(x)$	Funkcijos f išvestinė taške x
50	$f'\colon x \mapsto f'(x)$	Išvestinė funkcija
51	$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	Funkcijos f apibrėžtinis integralas
52	$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$	Funkcijos f neapibrėžtinis integralas
53	$\sin\alpha$	Kampo α sinusas
54	$\cos\alpha$	Kampo α kosinusas
55	$\operatorname{tg}\alpha$ arba $\tan\alpha$	Kampo α tangentas
56	$f\colon x \mapsto \sin x,\ x \in \mathbb{R}$	Sinuso funkcija
57	$f\colon x \mapsto \cos x,\ x \in \mathbb{R}$	Kosinuso funkcija

Lentelės tęsinys sekančiame puslapyje

Lentelės tęsinys iš ankstesnio puslapio

Nr.	Simboliai	Paaiškinimai
58	$f\colon x \mapsto \operatorname{tg} x$ arba $f\colon x \mapsto \tan x$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{(n+1/2)\pi\colon n \in \mathbb{Z}\}$	Tangento funkcija
59	$f\colon x \mapsto \arcsin x$, $x \in [-1,1]$	Arksinuso funkcija
60	$f\colon x \mapsto \arccos x$, $x \in [-1,1]$	Arkkosinuso funkcija
61	$f\colon x \mapsto \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$ arba $f\colon x \mapsto \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$	Arktangento funkcija
62	$f\colon x \mapsto x^r$, $x \in (0,\infty)$	Laipsninė funkcija $r \in \mathbb{R}$
63	$f\colon x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$	Rodiklinė funkcija $a \in (0,\infty)$
64	$f\colon x \mapsto \log_a x$, $x \in (0,\infty)$	Logaritminė funkcija $a \in (0,\infty)$, $a \neq 1$
65	$\ln x = \log_e x$	Natūralusis logaritmas
66	$\lg x = \log_{10} x$	Dešimtainis logaritmas
67	AB	Atkarpa jungianti taškus A ir B
68	AB arba $\lvert AB\rvert$	Atkarpos ilgis
69	$\angle AOB$ arba $\angle O$	Kampas su viršūne taške O
70	$\angle AOB$ arba $\lvert\angle AOB\rvert$ arba $\widehat{AOB}$ $\angle O$ arba $\lvert\angle O\rvert$ arba $\hat{O}$	Kampo su viršūne taške O dydis
71	$\triangle ABC$	Trikampis ABC
72	$\parallel$	Lygiagretumas
73	$\perp$	Statmenumas
74	$\cong$	Kongruentumas
75	$\sim$	Panašumas
76	$\vec{a}$ ir $\lvert\vec{a}\rvert$	Vektorius ir jo ilgis
77	$\overrightarrow{AB}$ ir $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert$	Vektorius ir jo ilgis
78	$\vec{a}\cdot\vec{b}$	Vektorių skaliarinė sandauga
79	$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$	Koordinačių ašių vienetiniai vektoriai
80	$\vec{a} = (x,y)$	Vietos vektorius su koordinatėmis
81	$\vec{a} \upuparrows \vec{b}$	Kolinearūs vienakrypčiai vektoriai
82	$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$	Kolinearūs priešpriešiai vektoriai
83	$\mathrm{P}(A)$	Įvykio A tikimybė
84	$\mathrm{E}X$	Atsitiktinio dydžio X vidurkis
85	$\mathrm{D}X$	Atsitiktinio dydžio X dispersija
86	$\forall$	Visuotinumo ženklas
87	$\exists$	Egzistavimo ženklas
88	$\neg$	Neigimo ženklas
89	$\vee$	Disjunkcijos ženklas
90	$\wedge$	Konjunkcijos ženklas
91	$\Longrightarrow$	Loginės išvados ženklas
92	$\Longleftrightarrow$	Ekvivalentumo ženklas

2 Komentarai

Specialiosios skaičių aibės Mokykliniuose matematikos vadovėliuose papiltęs specialių skaičių aibių žymėjimas $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$. Tačiau rašant šiuos simbolius ranka sąsiuvinyje arba lentoje naudojami žymėjimai N, Z, Q, R, nes taip yra lengviau. Tokiu atveju žymėjimas neatlieka savo vaidmens, atskirti specialiąsias aibes nuo kitų aibių. Ši problema matematinėje literatūroje sprendžiama naudojant žymėjimus „su dviguba kojele“ (žr. lentelėje simbolius 4,...,10). Šiuos žymėjimus nesunku rašyti ranka.

Mūsų šalies mokyklose nulis nėra laikomas natūraliuoju skaičiumi ir tai yra tik įpročio bei žymėjimų patogumo klausimas. Kompleksinių skaičių aibę $\mathbb{C}$ sudaro skaičiai $a + \imath b$, čia a ir b yra realieji skaičiai, o $\imath$ yra menamas vienetas su savybe $\imath^2 = -1$.

Rekomenduojamų simbolių sąraše yra nauja speciali skaičių aibė $\mathbb{D}$ – dešimtainiai skaičiai (Nr. 6). Siūloma šių skaičių samprata - dešimtainio kablelio pagalba užrašoma trupmena $\frac{m}{10^n}$, čia $m \in \mathbb{Z}$ ir $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Kitaip tariant, siūlomas simbolis žymi baigtinius dešimtainius skaičius. Simbolio įvedimas turi bent tris priežastis. Pirma, mūsų skaičiavimo sistema yra dešimtainė. Natūralu tarp mokiniams naujų skaičių išryškinti tuos, kurie tiesiogiai susiję su dešimtaine sistema. Baigtinio dešimtainio skaičiaus dešimtainis simbolis gaunamas skaitiklį dalinant iš vardiklio. Antra, realiame gyvenime baigtiniai dešimtainiai skaičiai yra skirtingų skaičių palyginimo priemonė, nes turi standartinę išraišką. Trečia, daugelis moksle naudojamų konstantų nėra racionalieji skaičiai. *Aproksimuodami* tokius skaičius (baigtiniais) dešimtainiais skaičiais turime galimybę suvokti jų vietą tarp kitų skaičių. Vadovėlių autoriams svarbu suprasti, kad visų šių gerų savybių naudojimas reikalauja gerokai gilesnio mokyklinės matematikos turinio už dabartinį. Tokiai pagalbai rekomenduojame 5 dalį iš Hung-Hsi Wu knygos [10][1].

Veiksmai su skaičiais Skaičiaus a modulis, simbolis Nr. 36, arba absoliuti skaičiaus a reikšmė. Apibrėžiamas kaip atstumas tarp a ir 0 skaičių tiesėje, kai a realusis skaičius ir kaip Euklidinis atstumas tarp a ir 0 kai a kompleksinis skaičius.

n-tojo laipsnio šaknis iš skaičiaus a, simbolis Nr. 38, mokyklinėje matematikoje gali turėti dvi reikšmes. Pirma, *aritmetinė šaknis*: jei n nelyginis natūralusis skaičius, tai $a \in \mathbb{R}$, jei n lyginis natūralusis skaičius, tai $a \in [0, \infty)$, viena reali šaknies reikšmė, kurios ženklas toks pat kaip ir a. Pavyzdžiui, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$. Antra, *kompleksinė šaknis*: $a \in \mathbb{C}$, n reikšmių, sutampa su kompleksinėje analizėje esančia šaknimi. Pavyzdžiui, $\sqrt{4} = \pm 2$, $\sqrt[3]{-8}$ reikšmių aibė $\{-2, 1 + \imath\sqrt{3}, 1 - \imath\sqrt{3}\}$.

[1] Ši knyga, kaip ir penkios kitos H.-H. Wu knygos skirtos mokyklinės matematikos turiniui yra Vilniaus universiteto bibliotekoje

Skaičiaus a laipsnis su natūraliuoju rodikliu a^m yra sutrumpintas sandaugos $\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m}$ žymėjimas. Tai simbolis Nr. 39, kai m natūralusis skaičius ir $n = 1$. Kitais atvejais šis simbolis gali būti apibrėžiamas naudojant n-tojo laipsnio šaknį $(\sqrt[n]{a})^m$ arba remiantis laipsninės funkcijos egzistavimo teorema (žr. 9 skyrių Hung-Hsi Wu knygoje [11]).

Funkcija Simbolis $f\colon X \to Y$ (Nr. 42) yra pakankamai tikslus, kai funkcija laikoma *taisyklė* f kiekvienam aibės X elementui priskirianti vienintelį aibės Y elementą. Pakankamai tikslus mokykloje bet ne matematikoje. Matematikoje funkcija apibrėžiama naudojant Dekarto sandaugos poaibį vadinamą *funkciniu sąryšiu.* Funkciniu sąryšiu grindžiama apibrėžtis iš besimokančiojo reikalauja aukštesnio abstrakcijos lygio nei galima būtų tikėtis. Išsamus mokyklinės funkcijos sampratos aiškinimas yra H.-H. Wu knygoje [11].

Taisykle grindžiama funkcijos apibrėžtis daugeliui, net ir matematikos mokytojų, yra rimtas iššūkis. Funkcijos sąvokos sudėtingumas pasireiškia nagrinėjant, pavyzdžiui, funkcijos išvestinę ir funkcijų sumą, kurios taip pat yra funkcijos. Pavyzdžiui, funkcijų $f\colon X \to Y$ ir $g\colon X \to Y$ suma yra funkcija, žymima $f + g$, kuri kiekvienam aibės X elementui x priskiria vienintelį aibės Y elementą $f(x) + g(x)$. Funkcijų sumos $f + g$ išvestinė yra funkcija, žymima $(f + g)'$, kuri kiekvienam aibės X elementui x priskiria vienintelį aibės Y elementą $f'(x) + g'(x)$, t.y. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ kiekvienam $x \in X$. Pastarąją formulę galima užrašyti kaip *funkcijų lygybę*: $(f + g)' = f' + g'$ aibėje X. Ši formulė iliustruoja lygybės simbolio = daugiaprasmiškumą, nes ja išreiškiama skirtingų rūšių objektų lygybė, ne tik skaičių lygybė. Funkcijų lygybė turėtų būti formuluojama su nuoroda į funkcijų apibrėžimo sritį, bet to nedaroma matematikos brandos egzamino formulėse [7].

Funkcijų supratimą apsunkina matematikos vadovėliuose dažnai naudojami terminai „kintamasis“, „nepriklausomas kintamasis“ir „priklausomas kintamasis“. Funkcijos argumentas tapatinamas su „nepriklausomu kintamuoju“, funkcija tapatinama su „priklausomu kintamuoju“ ir žymima simboliu $f(x)$. Paprastai „kintamojo“ reikšmė laikoma savaime suprantama ir besimokančiųjų galimai perimama iš programavimo ar statistikos. Neretai „kintamasis“ funkcijos kontekste interpretuojamas kaip kažkas kintančio. Tokia kintamojo samprata buvo naudojama maždaug iki 18 amžiaus. Vėliau šis terminas reiškė matematinį objektą esant kuriuo nors nurodytos aibės elementu.

Sekos simbolis Seka yra funkcija, o ne aibė. Be to, funkcija yra taisyklė, o ne funkcijos reikšmių aibė. Todėl sekos žymėjimas naudojant aibei skirtus skliaustus nėra tinkamas. Sekos žymėjimas simboliu Nr. 45 dera su vektoriaus, kaip baigtinės sekos atvejo, žymėjimu.

Ribos simboliai Tai simboliai Nr. 47 ir Nr. 48. Funkcijos ribos sąvokos yra aptariamos kai kuriuose matematikos vadovėliuose ([4], [1]). Nurodytuose vadovėliuose aptarimas grindžiamas žodžio „artėjimas“ aiškinimu. Tačiau skirtingai. Matematikoje šiame kontekste vietoje žodžio „artėjimas“ naudojamas jo lotyniškas atitikmuo „konvergavimas“. Pakankamai tiksliai sekos konvergavimas yra apibrėžtas Visuotinės lietuvių enciklopedijos straipsnyje konvergavimas. Funkcijos ribą galima apibrėžti naudojant sekos ribą tokiu būdu: $\lim_{x \to a} f(x) = A$, jei kiekvienai funkcijos argumentų sekai (x_n) konverguojančiai į a, konverguoja funkcijos reikšmių seka $f(x_n) \to A$. Išsamiai šios ir kitos sąvokos apibrėžiamos H.-H. Wu knygoje [12, 119 ir 286 pusl.].

Dešimtainis skaičius su tašku ar kableliu? Kitaip tariant, $2,3$ ar 2.3? Dešimtainį kablelį naudojančių šalių ir dešimtainį tašką naudojančių šalių skaičiai yra panašūs. Dešimtainis kablelis naudojamas kaip susitarimas kalboje. Dešimtainis taškas naudojamas dėl tam tikros programinės įrangos paplitimo. Yra šalių, kuriose naudojamas ir dešmtainis taškas, ir dešimtainis kablelis. Bet kuriuo atveju, klausimas apie taško ar kablelio pasirinkimą dešimtainiame skaičiuje nepriklauso matematikų prerogatyvai.

Kabliataškis ar kablelis intervalo simbolyje? Kabliataškis intervalo žymenyje gali būti naudojamas norint išvengti dviprasmiškumo kai naudojamas dešimtainis kablelis. Su tuo galima būtų sutikti kai kalbama apie galimą dviprasmiškumą aibėje. Pavyzdžiui, aibė iš dviejų elementų $\{2, 3\}$ ir aibė iš vieno elemento $\{2{,}3\}$ skiriasi tarpu tarp skaitmenų, bet atrodo panašiai. Tačiau intervalų atveju turime lyginti $(2, 3)$ vs $(2{,}3)$ ir $[2, 3]$ vs $[2{,}3]$. Antrasis pasirinkimas interpretuojant 2,3 kaip dešimtainį skaičių praranda prasmę, jei iš konteksto numanomas intervalas.

Kabliataškio naudojimas intervalo simbolyje gali būti naudingas, kai intervalo galais yra deųimtainiai skaičiai. Pavyzdžiui, kabliataškis padeda atveju $(0{,}2; 0{,}(3))$. Bet tokiais atvejais dešimtainius skaičius galima pakeisti trupmenomis, pavyzdžiui, $(\frac{1}{5}, \frac{1}{3})$.

Matematinėje literatūroje anglų kalba intervalo simbolyje rašomas kablelis. Galima manyti taip esant todėl, kad JK, JAV, Australijoje, Kanadoje naudojami dešimtainiai taškai. Tai viena iš objektyvių priežasčių, kodėl rekomenduojame intervalų simbolyje naudoti kablelį.

Geometrijos simboliai Susitarimas mokykliniuose vadovėliuose *visada* kampą ir jos didumą, bei atkarpą ir jo ilgį žymėti vienodai būtų prastas sumanymas. Kai kuriais atvejais, kai figūros didumo simbolis yra nepatogus naudoti, pavyzdžiui, kampo tarp dviejų vektorių didumo atveju, galima susitarti laikinai naudoti tą patį figūros žymėjimą. Bet toks susitarimas turi būti aiškiai formuluojamas. Turėtume laikytis principo, kad bet kurioje vadovėlio vietoje yra aiški simbolio prasmė, geometrinė figūra ar skaičius. Nepaisydami šio principo sukuriame prielaidas besimokančiajam neskirti matematinio objekto reprezentacijų. Pavyzdžiui, nedarant skirtumo tarp kampo, kaip plokštumos dalies, ir kampo, kaip tos plokštumo dalies dydžio, trigonometrinių funkcijų argumento samprata tampa problemiška.

Trigonometrinių funkcijų atveju yra keletas universalių susitarimų nesilaikyti standartinių taisyklių. Vienas jų yra susitarimas rašyti $\sin x$ vietoje $\sin(x)$. Tas pats galioja ir kitoms trigonometrinėms funkcijoms. Tai prieštarauja funkcijos reikšmės simbolio rašymo su skliaustais taisyklei. Skliaustai naudojami rašant trigonometrinės funkcijos reikšmes tais atvejais, kai argumentas užrašomas keliais simboliais. Pavyzdžiui, rašome $\sin(2x)$, o ne $\sin 2x$. Apie šiuos ir kitus trigonometrinių funkcijų apibrėžimo aspektus rekomenduojame skaityti pirmąjį skirių iš H.-H. Wu knygos [12].

Dar vienas sunkumas su geometriniais objektais atsiranda ignoruojant tai, kad, pavyzdžiui, trikampio plokštumoje vidus yra trikampio dalis. Tokiu atveju netenka prasmės trikampio ploto skaičiavimas. Panašiai yra su kitais geometriniais objektais. Pavyzdžiui, tenka matyti rašant frazes „apskritimo plotas“ vietoje „skritulio plotas“.

Loginiai simboliai Mūsų mokyklinėje praktikoje loginių simbolių naudojimas atsižvelgiant į jų reikšmę logikoje nėra paplitęs. Bet tai neturėtų tapti priežastimi visai jų atsisakyti ar naudoti tik simbolius Nr. 91 ir Nr. 92. Mes nesame išbandę logikos *integravimo* į matematikos mokymą prieigos. Tokia prieiga reiškia loginių ryšių tarp teiginių nustatymą įrodinėjant matematinius teiginius. Loginių ryšių atskleidimas tarp teiginių sprendžiant tekstinius uždavinius yra siūloma nauja praktika (žr. [5], [6] ir [8]). Tikėtina, kad ji gali padėti mokiniams suprasti matematiką ir tuo būdu formuotis jų vidinei motyvacijai gilintis į matematiką.

Simboliai Nr. 91 ir Nr. 92 naudojami žymėti implikaciją ir ekvivalenciją kai jie yra *visada teisingi*. Priešingu atveju šiuos loginius teiginius žymi simboliais $\rightarrow$ ir $\leftrightarrow$, atitinkamai. Būtent, $T \rightarrow S$ ar $T \leftrightarrow S$ gali būti teisingi arba klaidingi priklausomai nuo teiginių T ir S loginių reikšmių. Sakoma, kad „iš teiginio S išplaukia teiginys T“ arba „teiginys T yra teiginio S loginė išvada“, žymima $S \implies T$ arba „jei S, tai T“, jei visuomet, kai teisingas S yra teisingas T. Naudodami šias frazių reikšmes sakysime, kad „teiginiai S ir T yra ekvivalentūs“, Žymėsime $S \iff T$ arba „S yra teisingas tada ir tik tada, kai teisingas T“, jei iš teiginio S išplaukia teiginys T ir iš teiginio T išplaukia teiginys S.

3 Literatūra

[1] A. Ambraškienė, A. Chrapačienė, R. Kavoliūnaitė, A. Navickienė, V. Silvanavičius, R. Švelnikienė, M. Vosylienė. Matematika. Išplėstinis kursas. 12 Pirmoji knyga. Kaunas, Šviesa, 2011.

[2] A. Augaitis, J. Dagys, V. Grabauskienė, R. Norvaiša ir A. Račkauskas. Aiškinamasis mokyklinės matematikos sąvokų rinkinys. 2021 gruodžio 31 d. `https://drive.mif.vu.lt/s/XJr4qSkd3mibLpP`

[3] F. Cajori A History of Mathematical Notations, 2 vols. Dover reprint in 1 vol., 1993.

[4] K. Intienė, A. Skūpas, V. Stakėnas, E. Stankus, V. Vitkus. Matematika 12. I dalis. Išplėstinis kursas. Vilnius, TEV, 2003.

[5] I. Kilienė ir R. Norvaiša. The use of a deductive reasoning when solving a word problem. Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12), Feb 2022, Bozen-Bolzano, Italy. hal-03746835v2

[6] I. Kilienė ir R. Norvaiša. Solving word problems with reasoned judgement. Lithuanian Mathematical Journal, 62, 467-780, 2022.

[7] Matematikos brandos egzamino pagrindinės formulės. Priedas 2 prie Matematikos brandos egzamino programos.

[8] R. Norvaiša. Dedukcinis samprotavimas sprendžiant tekstinius uždavinius. Metodinė priemonė, 2023.

[9] Vidurinio ugdymo bendrųjų programų, patvirtintų Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministro 2011 m. vasario 21 d. įsakymu Nr. V-269, 3 priedas (Matematika).

[10] Hung-Hsi Wu. Understanding Numbers ir Elementary School Mathematics. American Mathematical Society, 2011.

[11] Hung-Hsi Wu. Teaching School Mathematics - Algebra. American Mathematical Society, 2016.

[12] Hung-Hsi Wu. Pre-Calculus, Calculus, and Beyond. American Mathematical Society, 2020.